Kapitola 1

Derivace

Tento text je letmým shrnutím toho, co zhruba budete v derivacích potřebovat v rámci dalších fyzikálních partií semináře. Pokud máte zájem o to naučit se limity, derivace a integrály blíže, je na to docela dobrá učebnice *Diferenciální a integrální počet* od nakladatelství Prometheus [1].

1.0.1 Limity z rychlíku

Protože budeme chvíli používat limity, tak si je alespoň intuitivně zavedeme. Nebudeme je zavádět pořádně, protože to pro prvotní pochopení diferenciální (derivace) a integrálního počtu nebudete nutně potřebovat.

Už na základní škole jste se určitě učili, že nulou se nemá dělit. Co kdybychom to ale chtěli? Třeba pokud víme, že funkce $f(x) = x/x$ je definovaná všude kromě nuly a všude má hodnotu 1, tak proč bychom to nemohli zkrátit a nemohla by tu hodnotu mít i v 0? Právě, že jen tak to zkrátit mimo limitu nemůžeme[1], ale v limitě ano.

Limitu bereme tak, že je to něco, co nám umožňuje pracovat i s nedefinovanými výrazy v nějakém bodě. Obecně platí, že v limitě vždy upravujeme nějaký výraz, než do něj dokážeme dosadit a pak dosadíme. Můžeme pak také dokonce počítat hodnotu funkce v nevlastním bodě $(+\infty, -\infty)$ a hodnoty limit mohou být také nevlastní či se může stát, že je nedefinovaná. Ty nás ale v tuhle chvíli nebudou zajímat. Taky se pak můžeme zajímat o výrazy typu „nekonečno lomeno nekonečnem“, ňekonečno mínus nekonečno apod.

Podívejme se nejprve na to, jak limity značíme a rovnou příklad, kde stačí dosadit

$$\lim_{x\to 2}(x-1) = 2-1 = 1\,.$$

Sice v tomhle případě by místo $\lim_{x\to 2}(x-1)$ stačilo napsat, že máme funkci $f(x) = x - 1$ a počítáme hodnotu $f(2) = 1$, protože tedy nulou nedělíme, ale alespoň vidíte značení. Podívejme se na několik dalších jednoduchých úloh.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x=0} 1 = 1\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0\,,$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0\,,$$

[1] Jak jste se jistě učili na střední škole, tak je potřeba si vždy pro korektní řešení úlohy určit i definiční obor funkce. Funkce $f_1 = x$ je definovaná na $x \in \mathbb{R}$ a funkce $f_2 = x/x$ je definovaná na $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Když nejsou stejné definiční obory, není to stejná funkce. Můžeme se samozřejmě ptát i na to, jestli platí $f_1 = f_2$ na nějakém jiném intervalu, což skutečně platí pro všechny, kromě $x = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty\,,$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \lim_{x \to \pi} \frac{1}{\cos x} = -1\,,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{1 + e^{-x}} = a\,,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0\,.$$

Pokud byste se chtěli o limitách dozvědět něco dalšího, můžete se podívat do učebnice [1] či si najít něco na internetu.[2]

Samozřejmě, že samotné limity mohou být také velice komplikované. Můžete přemýšlet, proč například platí

$$\lim_{x \to +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 - 10x + 1}) = \frac{5}{3}\,.$$

1.1 Zavedení derivace

1.1.1 Motivace: Co je derivace? K čemu je to dobré?

Derivace nám udává míru, velikost změny něčeho v závislosti na změně něčeho jiného. Typický příklad derivace je rychlost, která je vlastně změnou polohy v závislosti na čase. Analogicky by vás mělo hned napadnout, že zrychlení bude derivace rychlosti - jde o změnu rychlosti v čase. Elektrický proud je změnou náboje v čase.

Je nám to k tomu, že celá fyzika stojí na vyjádření fyzikálních zákonů právě pomocí derivací (a integrálů) a na řešení problémů skrze diferenciální rovnice, kde potřebujete znát derivace a integrály. Jde vlastně o základ. Sice vám to na střední škole možná takto nepřijde, ale to je díky určitým zjednodušením. Je pravdou, že na střední škole a ve fyzikální olympiádě se často bez derivací obejdete, ale pro přednášky na soustředění FYKOSu bývají potřeba. Hlavně se vám to bude hodit na vysoké škole. Proto taky tahle přednáška.

1.1.2 Zavedení derivace přes limitu

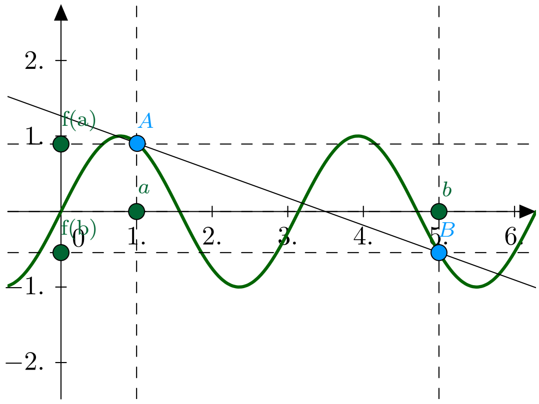
Jak jsme zmínili v motivaci, derivace nám má něco říct o to„ jak moc se funkce mění. S tím, že nás bude zajímat, jak se mění v každém bodě na nějakém intervalu. Nejdřív si musíme uvědomit, jak bychom na to mohli jít. Kdybychom chtěli nějakou průměrnou změnu za nějaký interval, tak vezmeme rozdíl funkčních hodnot na začátku tohoto intervalu a podělíme ji délkou tohoto intervalu. Označme si interval $\langle a, b\rangle$ a funkční hodnoty na okrajích intervalu značíme $f(a)$ a $f(b)$. Mohli bychom tedy psát, že

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Toto je ale tedy nějaký průměr, který nemusí moc odpovídat, pokud se naše funkce mění v rámci intervalu nějak rychle, resp. když se v rámci tohoto intervalu nemění stále stejným tempem. Pro přímku $f(x) = c_1 x + c_0$ by tento poměr byl přesný stále, ale například pro sinus, jak vidíte na obrázku 1.1, se tento průměr pro delší interval bude výrazně lišit od celkového chování funkce. Kdybychom si interval $\langle a, b\rangle$ zvolili jako přesný násobek periody našeho sinu (či jiné periodické

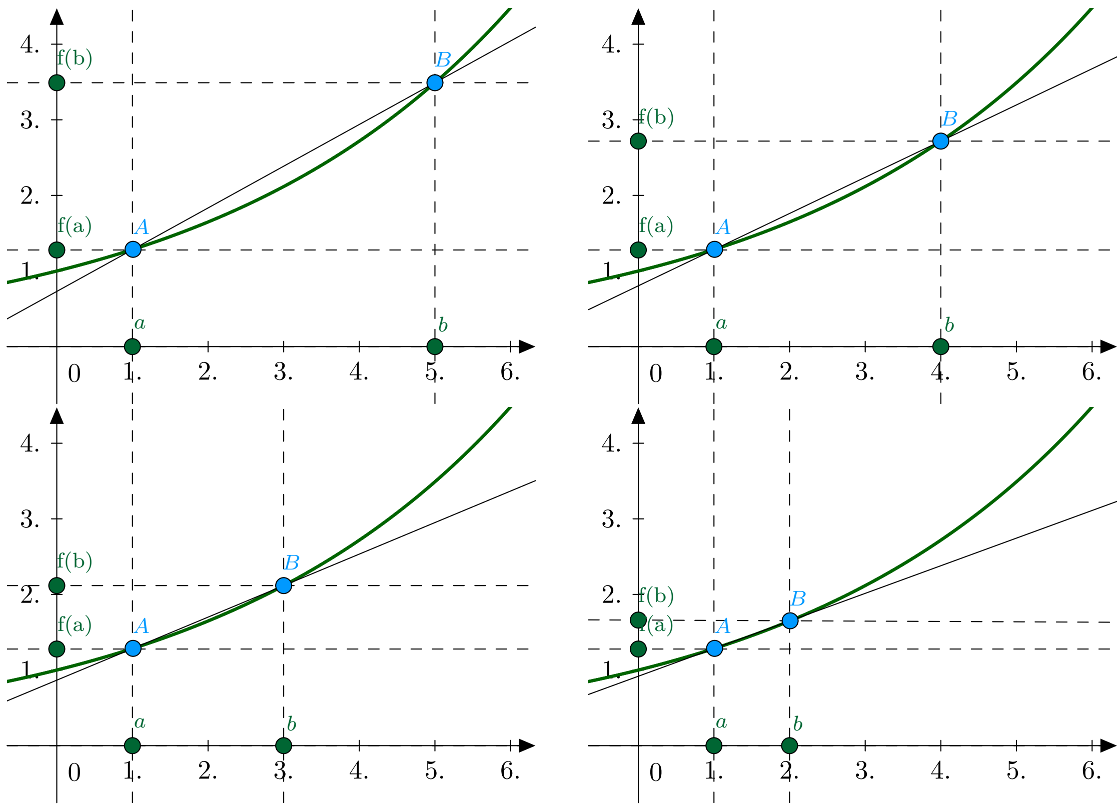
[2] Například na `http://www.matematika.cz/limita-funkce`.

funkce), pak bychom mohli dojít k závěru, že se naše funkce vůbec nemění, i když tomu tak zřejmě není.



Obrázek 1.1: Graf $\sin 2x$

Jak bychom to mohli spravit? Tedy abychom dostávali nějakou rozumnou informaci o funkci tak, aby se nám něco takového nestalo? Zkusíme zmenšovat interval.



Obrázek 1.2: Postupné zmenšování intervalu $\langle a, b \rangle$, ze kterého určujeme změnu funkce - vlevo nahoře je interval největší, vpravo dole nejmenší

Jak vidíme na skupině obrázků 1.2, zmenšování intervalu vede ke zlepšování odhadu toho, jak se funkce chová v blízkosti bodu a.[3] Dále pozorujeme, že vlastně počítáme úsek sečny, která prochází naší funkcí. Budeme se zajímat o co nejlepší odhad. Ideální by se tedy zdálo být, kdyby tento interval byl hodně malý, prakticky nulový, tedy b má splynout s a. Pro to budeme potřebovat limitu. Derivaci tedy můžeme zavést jako

[3]Tedy toto platí pouze pro rozumné funkce - tedy ty, které lze derivovat, resp. na intervalech, kde je lze derivovat. Příklad toho, co je nerozumné chování je Dirichletova funkce (má hodnotu 1 pro racionální čísla a 0 pro iracionální) či např. okolí 0 u funkce $\sin(1/x)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{a \to b} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{a \to b} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Alternativně můžeme používat následující definici, která je ekvivalentní předchozí, jenom přeznačíme $a = x_0$ a $b = x_0 + \Delta x$, kde Δx je délka intervalu $\langle a, b\rangle$, která má jít k nule

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

1.1.3 Značení derivací

Derivaci funkce $f(x)$ podle x budeme značit primárně $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. „Déčka“ se mají správně psát stojatým fontem, ale často se to zanedbává.[4] Matematici značí derivaci často pouze čárkou, tedy $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x)$.

Ve fyzice pak používáme velice často derivaci podle času, kterou značíme tečkou, např. derivace součadnice podle času $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$.

Značení derivací se může dost měnit i v závislosti na publikaci, na zvyklostech, na vhodnosti značeno vzhledem k dalšímu značení v publikaci... Takže je vhodné si zvykat na různé typy značení.

1.1.4 Základní vlastnosti derivace

Derivace funkce vyčíslená v daném bodě nám právě dává směrnici tečny funkce v tomto bodě. Čím větší tedy (v absolutní hodnotě) derivace je, tím více se funkce mění. Kladná derivace znamená, že funkce je rostoucí. Záporná derivace nám říká, že funkce klesá. Nulová derivace nám říká, že je o stacionární bod (může jít o maximum, minimum, nebo inflexní bod).

Několik příkladů na výpočet derivace z definice Jde jenom o ukázku, jak se může postupovat při výpočtu některých základních derivací. Pro potřeby počítání fyzikálních úloh nebude potřeba počítat derivace takto z definice, ale bude stačit pak používat pravidla uvedená dále, která budou ale založená na již takto provedených výpočtech.

První úloha je derivace konstantní funkce, tedy $f(x) = C \in \mathbb{R}$. Jak bychom snad všichni čekali, tak konstantní funkce se nemá nikde co měnit a její derivace by tedy měla být nulová. To si také můžeme ukázat

$$[C]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

Další úlohou je nejjednodušší lineární funkce $f(x) = x$. Ta by se měla měnit konstantně, a to jednotkově

$$[x]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

[4] Důležitá poznámka je, že se tato déčka nedají samy o sobě krátit, což bychom rádi doufali, že ani čtenáře nenapadne.

$$
\begin{aligned}
[x^n]' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\Delta x^k - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\Delta x^k + x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\Delta x^{k-2} + nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x} \\
&= nx^{n-1} \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\sin x]' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x\cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x} = 0 + \cos x 1 = \cos x \,,
\end{aligned}
$$

$$
[e^x]' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.
$$

U $\sin x$ a e^x jsme tedy použili znalosti některých limit, kterými jsou funkce definované. Nicméně dále tyhle limitní triky už používat nebudeme. U x^n je zase použita binomická věta $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} (\binom{n}{k}) a^k b^{n-k}$, kterou se sice hodí znát, ale dál ji zde už nebudeme využívat. Jo a kdyby vás zajímalo, co je kombinační číslo, tak $(\binom{n}{k}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, kde ! je faktoriál $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1$ (s tím, že $1! = 1$ a $0! = 1$).

1.2 Derivace základních funkcí

Jak bylo ukázáno na příkladech výpočtu derivace přímo z definice, tak to provádět lze, ale jedná se o relativně komplikovaný postup. Bylo by více než otravné si to počítat takto pokaždé. Proto si odvodíme/řekneme o nějakých pravidlech, které se dají pro výpočty derivací použít. Nejprve derivace nějakých základních funkcí - některé jsme si odvodili a také není složité si někde najít tabulku[5]. Často si však vystačíme s následujícími funkcemi a ty stojí opravdu za to si zapamatovat, i když s derivacemi začínáte:

Derivace funkcí složených z těchto si pak můžeme odvodit. Například si odvodíme $\mathrm{tg}\, x = \sin x / \cos x$.

1.3 Derivace mírně složitějších funkcí

Nicméně - ani derivace základních funkcí nám zpravidla nestačí pro vyřešení i relativně základních příkladů, protože se častěji objevují nějaké součty a součiny a základních funkcí či jsou tyto funkce nějak složené. Proto se naučíme následující pravidla. Pro přehlednost v pravidlech budeme derivovat pouze funkce jedné proměnné, a to x. Pokud se zde objeví jiná písmenka ve vyjádření funkce, pak jde vždy o konstanty. Nicméně stále mějte na paměti, že je to jenom označení proměnné, kterou můžete označit jinak.

[5]Jednu naleznete například na webové adrese `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~{}rokyta/vyuka/general/tahaky/derivace.htm`

$f(x)$	$f'(x)$	Definiční obor $f(x)$	Definiční obor $f'(x)$	Poznámka
$c = konst.$	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	

1.3.1 Derivace násobená konstantou

To je vůbec nejjednodušší - konstantu můžeme z derivace vytknout, tedy

$$[cf(x)]^{'} = cf^{'}(x).$$

Příklady

$$[cx]' = c\,[x]' = c \cdot 1 = c\,,$$

$$[ae^x]' = ae^x, [k \sin x]' = k \cos x\,,$$

$$[K \ln x]' = \frac{K}{x}.$$

1.3.2 Derivace součtu a rozdílu

Derivace součtu je součet derivací - tedy je to opět jednoduché. Stejně tak derivace rozdílu je rozdílem derivací.

$$[f(x) + g(x)]^{'} = f^{'}(x) + g^{'}(x)\,,$$

$$[f(x) - g(x)]^{'} = f^{'}(x) - g^{'}(x)\,.$$

Takové dva podobné vztahy obecně v matematice můžeme zapisovat pomocí $\pm$ (a/nebo $\mp$) s tím, že pokud nás zajímá jeden vztah, tak bere horní znaménka či pokud druhý, tak spodní znaménka - např. v našem případě $[f(x) \pm g(x)]^{'} = f'(x) \pm g'(x)$.

Důkaz toho, že derivace součtu, je součet derivací, je přímočará. Plyne z linearity limity

$$\lim_{\Delta x \to 0}(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\,,$$

tedy za předpokladu, že limity vpravo existují, pak existuje i ta vlevo a obě jsou si rovny.

Příklady

$$\left[1 + x + x^2 + x^3\right]^{'} = 0 + 1 + 2x + 3x^2\,,$$

$$[x + \cos x]^{'} = 1 - \sin x\,,$$

$$\left[c + bx + ax^2\right]^{'} = c \cdot 0 + b \cdot 1 + a \cdot 2x = b + 2ax\,,$$

$$[\sin x + \cos x]^{'} = \cos x - \sin x\,,$$

$$[e^x - \cos x]^{'} = e^x + \sin x\,,$$

$$[\ln x + e^x + nx^n]^{'} = \frac{1}{x} + e^x + n^2 x^{n-1}\,,$$

$$[\sinh x]^{'} = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]^{'} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\,.$$

1.3.3 Derivace součinu

Derivace součinu je už složitější! Funguje tak, že vždycky zderivujete jednu a druhou necháte a k tomu přičtete derivaci druhé funkce vynásobenou první funkcí.

$$[f(x)g(x)]^{'} = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)\,.$$

Je dobré si to pamatovat v tomto pořadí kvůli dalšímu pravidlu.

Tomuto pravidlu také říkáme Leibnizovo pravidlo.

Důkaz pro zvědavé Tento důkaz nemusí být pro vás nutné hned pochopit, ale pokud vás zajímá, jak se to dokazuje, tak ho zde máte.

$$\begin{aligned}
[f(x)g(x)]' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)) + \lim_{\Delta x\to 0}(f(x)\frac{(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}) = \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Tedy trik je přičíst vhodný výraz a zase ho odečíst a pak členy vhodně uzávorkovat a máme to. Toto byl algebraický důkaz, ale dá se to také dokázat z obrázku.

Příklady

$$[cf(x)]^{'} = 0f(x) + cf^{'}(x) = cf^{'}(x)\,,$$

$$[x\sin x]^{'} = \sin x + x\cos x\,,$$

$$\left[x^2\right]^{'} = [xx]^{'} = 1x + x1 = 2x\,,$$

$$[\sin 2x]^{'} = [2\sin x\cos x]^{'} = 2(\cos x\cos x - \sin x\sin x) = 2\cos 2x\,,$$

$$\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{'} = \left[x^{-1}\sin x\right]^{'} = -x^{-2}\sin x + x^{-1}\cos x\,.$$

1.3.4 Derivace podílu

Derivaci podílu si už jenom ukážeme, důkazy se stávají čím dál tím otravnější, ale lidi matematičtější povahy si je mohou provést za domácí úkol (nebo si je najít).

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} .$$

Příklady

$$\left[\frac{1}{x}\right]' = \frac{0-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}, \left[\frac{1}{\ln x}\right]' = \frac{(0-\frac{1}{x})}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x\ln^2 x} ,$$

$$\left[\frac{\sin x}{x}\right]' = \frac{\cos x x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} ,$$

$$[tgx]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} ,$$

$$\left[\frac{e^x}{\sin x}\right]' = \frac{(e^x \sin x - e^x \cos x)}{\sin^2 x} = e^x\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x}\right) = e^x \frac{1-\operatorname{cotg} x}{\sin x} .$$

1.3.5 Derivace složené funkce

Chceme-li derivovat složenou funkci $f(g(x))$ (např. e^{-ax^2} či $\cos\sin x^2$), pak využijeme následující poučku (na jejíž důkaz byste už museli znát něco víc o limitách)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g\left(x\right)} f\left(g\left(x\right)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) ,$$

Či kompaktněji si to můžeme pamatovat jako $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$, přičemž samozřejmě víme, že to není rozšiřování zlomku jedničkou, i když to tak na první pohled vypadá (ale dá se to tak pamatovat). Mimochodem - pochopení derivace složené funkce je docela důležitý krok a zpravidla to trochu trvá, než to člověk pochopí úplně. Nicméně to také není až tak těžké.

Z hlediska praktičnosti a možnosti omezení chyby je vždy dobré postupovat „od vnější funkce po vnitřní“.

Příklady

$$[\sin 2x]' = 2\cos 2x ,$$

$$\left[(x+1)^2\right] = 2(x+1) ,$$

$$\left[(x^2+1)^3\right] = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2 ,$$

$$\left[(e^{2x} + \sin x)^2\right]' = 2(e^{2x} + \sin x)(2e^{2x} + \cos x) ,$$

$$[\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x)\cos x ,$$

$$\left[\cos^2 x\right]' = -2\sin x \cos x (= -\sin 2x) ,$$

$$\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]' = xe^{-\frac{x^2}{2}} .$$

1.4 Druhé a vyšší derivace

Pokud něco derivujeme vícekrát, tak to prostě zderivujeme nejdříve poprvé, pak podruhé a případně derivaci opakujeme tak dlouho, kolikrát jsme chtěli derivovat. Druhé derivace značíme takto

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) = f''(x) = f_{,xx}(x)$$

Pokud máme druhou derivaci podle času, značíme ji obvykle tečkou, tedy $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s}$.

Obdobně se pak značí i třetí a vyšší derivace. Tedy přidáváme další proměnné, mocniny. Ale od čtvrté derivace značíme místo čárkami obvykle číslem v závorce, tedy $\frac{\mathrm{d}^8}{\mathrm{d}x^8}f(x) = f^{(8)}(x)$. Někdo zase občas využívá římské číslice v horním indexu $\frac{\mathrm{d}^8}{\mathrm{d}x^8}f(x) = f^{VIII}(x)$, ale to není tak obvyklé.

Příklady

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(nx^{n-1}) = n(n-1)x^{n-2}\,, \quad \text{kde}\, n \geq 2\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}x^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}2x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2 = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\sin 2x = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}2\cos 2x = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}4\sin 2x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}8\cos 2x = 16\sin 2x\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{2x} = 2\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}e^{2x} = 2^n e^{2x}\,.$$

1.4.1 Rozšíření Leibnizova pravidla na n-tou derivaci součinu

Pokud bychom chtěli rozšířit pravidlo na derivaci součinu dvou funkcí na n-tou derivaci dvou funkcí, pak dospějeme k výsledku

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\,.$$

Vzorec je možné dokázat pomocí matematické indukce. Pokud bychom chtěli n-tou derivací součinu N funkcí, pak bychom dostali opravdu složitý vzoreček, takže ten už zde ani neuvádíme.

1.5 Parciální derivace

Pokud máme funkci více proměnných, tak začínají být rozdílné pojmy totální derivace, která se značí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (tedy jak jsme doposavad funkci značili) a parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x}$. Zatím to bereme prostě tak, že pokud derivujeme parciálně, tak všechny ostatní proměnné považujeme za konstanty. Takže je to de facto jednodušší. Jediné, co se nám tu možná komplikuje, je to, že můžeme derivovat podle různých proměnných. Pro pěkné funkce pak platí

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}f(x_1, x_2)\,,$$

tedy to, že pokud derivujeme nejprve podle první proměnné a následně podle druhé, pak dostaneme stejný výsledek, jako bychom derivovali nejdříve podle druhé a až potom podle první. Respektive to pak můžeme rozšířit na více parciálních derivací, kde pak pro pěkné funkce nezávisí na pořadí, a derivovat můžete, podle jakého pořadí jenom chcete - výsledek bude vždycky stejný (pokud v zápalu neuděláte nějakou chybu, nebo ta funkce není pěkná...).

Příklady

$$\frac{\partial}{\partial x} xyz = yz\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{2x} = 2\frac{\partial}{\partial x} e^{2x} = 4e^{2x}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} x^2y^2 = 2\frac{\partial}{\partial x} x^2 y = 4xy\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha e^{\alpha} \sin\alpha = e^{\alpha}\left((1+\alpha)\sin\alpha + \alpha\cos\alpha\right)\,,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\sin(xyz) =& \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} xy\cos(xyz) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\cos(xyz) - x^2yz\sin(xyz)\Big) = \\ =& \cos(xyz) - xyz\sin(xyz) - 2xyz\sin(xyz) - x^2y^2z^2\cos(xyz) = \\ =& \Big(1 - x^2y^2z^2\Big)\cos(xyz) - 3xyz\sin(xyz)\,,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} e^{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} 2ze^{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial}{\partial x} 4yze^{x^2+y^2+z^2} = 8xyze^{x^2+y^2+z^2}\,.$$

1.6 Průběh funkce

Zkoumáme-li průběh funkce, pak je zpravidla derivace super nástrojem, který nám v tom hodně pomůže. Platí totiž, že pokud má funkce extrém (alespoň lokální), pak nutně musí být první **derivace v daném bodě nulová, nebo nesmí existovat, nebo musí jít o okraj daného intervalu**, o který se zajímáme. Nejprve tedy funkci zderivujeme a řešíme rovnici, kde ji položíme rovnou nule

$$f'(x) = 0\,.$$

Takto dostaneme (či nedostaneme) nějaká řešení $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Pokud nám žádné body nevyšly, pak se díváme pouze na body, kde není derivace definovaná.) Tyto body jsou podezřelé z lokálního extrému (lokální maximum či minimum), nicméně nemusí jít ještě nutně o extrém, ale může jít o inflexní bod. Inflexní bod je takový bod, který má sice derivaci nulovou, ale před ním i po něm derivace roste, nebo před ním i po něm klesá. Příkladem funkce s inflexním bodem v0 je $g(x) = x^3$, kde máme derivaci $g'(x) = 0$.

Jak poznáme, jde-li o lokální extrém, nebo o inflexní bod? Jednak můžeme dosadit o něco větší a o něco menší číslo než je podezřelý bod a zjistit tak, jestli funkce klesá/roste nalevo a napravo od tohoto bodu. Pokud nejprve klesá a pak roste, pak jde logicky o lokální minimum. Pokud stále roste inflexní bod. Atd. Alternativní cestou je provést druhou derivaci $f''(x)$ a pak se dívat na její hodnoty v podezřelých bodech $f''(x_1), \ldots f''(x_n)$. Pokud je tato hodnota kladná, pak víte jistě, že jde o lokální minimum. Pokud je hodnota druhé derivace v daném bodě záporná, pak jde o lokální maximum. Co když je hodnota nulová? Pak to již nedokážeme okamžitě určit - může jít o inflexní bod, ale nemusí. Příkladem funkce s inflexním bodem v0 je již výše zmíněná $g(x) = x^3$ s druhou derivací $g''(x) = 6x$, které je $g''(0) = 0$. Naopak protichůdným příkladem je $h(x) = ax^4$ $(a \neq 0)$, kde víme, že pro kladné a máme lokální (i globální) minimum a pro záporné a má lokální (i globální) maximum. Když derivujeme, tak $h'(x) = 4ax^3$, což pokud položíme rovné 0, pak dostáváme pouze jedno řešení $x_1 = 0$. Zderivujeme podruhé a máme $h''(x) = 12ax^2$, což je konkrétně pro nulový bod $h''(x_1) = h''(0) = 0$. A tedy nemůžeme rozhodnout. Pravidlo by se nějak dalo sice rozšířit na vyšší derivace, ale pokud vám vyjde druhé derivace 0, pak je rozumnější prostě dosadit.

Dále se nezapomeneme podívat na hodnoty funkce, kde nemáme derivaci definovanou a na okraje intervalu.

Hledali jsme nejprve lokální extrémy, ale jak zjistíme, že jde o extrém globální na zadané množině, kterou máme zkoumat? To už je relativně přímočaré - podíváme se na všechny lokální extrémy a okraje intervalu, a pokud do dané množiny patří to nejvyšší (nejnižší) číslo, pak je to globální maximum (minimum a pokud ne, tak to globální maximum (minimum) nemá. Co se tím myslí?

Vezměme si jako příklad funkci $f(x) = x^2 - 6x$ na množině $x?((1, 20)$. Zderivujeme jí $f^{'}(x) = = 2x - 6$. Derivaci položíme rovnou nule $2x - 6 = 0?x_1 = 3$. Bod podezřelý z extrému je tedy pouze jeden. Zkusíme druhou derivaci $f^{''}(x) = 2$. Druhá derivace je všude kladná, a tedy náš podezřelý bod je lokální minimum a má hodnotu $f(3) = 9 - 18 = -12$. Podívejme se na okraje intervalu. Levý okraj dokonce patří do množiny a je to $f(1) = 2 - 6 = -4$. S tím pravým je ale problém, protože vlastně do naší množiny nepatří... Nicméně si spočítáme, k čemu se naše funkce blíží, když se blížíme okraji našeho intervalu $f(20) = 400 - 120 = 280$. Tedy naše funkce $f(x)$ na zvoleném intervalu má globální minimum v$x = 3$ a nemá globální a ani lokální maximum.

Platí to, že pokud zkoumáme pěknou (tedy diferencovatelnou) funkci na kompaktní množině (omezené a uzavřená množina), pak tato funkce na té množině nabývá maxima a minima - takže tam globální extrém najdete. Na neomezených či otevřených množinách a u nespojitých funkcí obecně nemusíte najít globální maximum ani minimum (a ani žádné lokální).

1.7 Taylorův rozvoj

Co když chceme počítat něco s nějakými složitějšími funkcemi než základními? Co když nás zajímá jenom, jak se nějaká hodně složitá funkce chová v okolí nějaké hodnoty? Co kdybychom si chtěli nějakou funkci definovat pomocí polynomů? Na to všechno máme Taylorův rozvoj.

1.7.1 Definice Taylorova rozvoje

Taylorův rozvoj je vlastně polynomiální řada, která nám přibližuje nějakou funkci pomocí polynomů.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Tedy pokud známe funkci - resp. její hodnotu a derivace v jednom bodě, tak pokud je známe všechny, tak můžeme takto vypočítat hodnotu v libovolném bodě funkce.

Pokud si zvolíme bod, ze kterého budeme vycházet za 0, což obvykle u definice funkcí provádíme, nazývá se tato řada **Maclaurinova**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^k .$$

Tyto řady využíváme hojně ve fyzice, když se snažíme nějakou pozorovanou závislost zjednodušit a na základě pár členů Taylorovy rozvoje určit chování v nějaké oblasti. Čím vezmeme více členů, tím více se budeme blížit funkci, kterou takto přibližujeme

Pokud byste potřebovali Taylorovu řadu pro více proměnných, tentokrát v okolí bodu $A = = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, pak vypadá takto

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(x_1-a_1)^{k_1}(x_2-a_2)^{k_2}\dots(x_n-a_n)^{k_n}}{k_1!k_2!\dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} f(a_1, a_2, \dots, a_n) \,.$$

Taylorovy řady více proměnných , ale dále potřebovat nebudeme. Také můžeme funkce rozkládat do jiných řad - třeba sinových a kosinových, tzv. Fourierových řady, ale o tom zase třeba jindy.

1.7.2 Některé Taylorovy řady, které se mohou hodit

Abychom si nemuseli Taylorovu řadu odvozovat u každého příkladu znovu od začátku, je vhodné mít nějakou tabulku, kde najdete ty základní, které také bývají ve fyzice nejčastěji potřeba. Pokud byste si chtěli procvičit derivování, tak si je můžete zkusit sami odvodit.

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \,,$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{pro } |x| < 1 \,,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \,,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,,$$

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \quad \text{pro } |x| < 1 \,,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro}\, x \in (-1, 1] \,,$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \,,$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

1.8 Derivace ve fyzice

Co je čeho derivace? Či jaké vztahy jsou mezi nějakými fyzikálními veličinami, které obsahují derivace? Nějaké z těchto vztahů vám prozradí následujícím seznamu. Ale nepočítejte s tím, že by byla vyčerpávající - když se budete fyzice věnovat dále, tak se určitě dozvíte o spoustě dalších vztahů. (Tučně jsou uvedeny vektory.)

1.8.1 Některé vztahy ve fyzice s derivacemi

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{s}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t}$ Rychlost v je derivace polohy s podle času t.

$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\mathbf{s}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{s}}{\mathrm{d}t^2}$ Zrychlení a je derivací rychlosti v podle času t.

$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{a}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{v}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{s}}{\mathrm{d}t^3}$ Ryv j (anglicky *jerk*) je derivací zrychlení a podle času t.

$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ Úhlová rychlost ω je derivací obloukové míry rotace φ podle času t.

$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$ Úhlové zrychlení ε je derivací úhlové rychlosti ω podle času t.

$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}$ V konzervativních systémech je změna potenciální energie E_p v čase je stejně velká, ale opačného znaménka co změna kinetické energie E_k. (Alias diferenciálně zapsaný zákon zachování mechanické energie.)

$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ Výkon P je derivace práce W podle času t.

$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{a}}$ Pro situace s konstantní hmotností tělesa je síla F úměrná hmotnosti a zrychlení tělesa a.

$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$ Síla F je derivací hybnosti p podle času t.

$\mathbf{F} = -\nabla V$ Síla F je mínus gradient potenciálu V. Derivace jsou schované ve znaku ∇ nazývaného nabla, a to následujícím způsobem $-\nabla V = (-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z})$.

$I = \dot{Q} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ Elektrický proud I je změna elektrického náboje Q za čas t.

$U_i = -\dot{\Phi} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ Elektrické napětí U_i indukované ve smyčce vodiče je mínus derivace magnetického toku Φ.

1.8.2 Fyzikální jednotky derivací

Pro fyziku jsou také velice důležité fyzikální jednotky, které jsou v matematice zpravidla ignorované. To, jakou jednotku má derivace funkce podle nějaké proměnné je ale velice jednoduché - výsledná derivace má jednotku původní funkce vydělenou jednotkou podle čeho jsme derivovali. Formálně bychom si to mohli zapsat takto

$$\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{[f]}{[x]}\,,$$

kde nám hranatá závorka symbolizuje to, že bereme jednotku dané veličiny (a ne obyčejnou závorku jako obvykle).

1.8.3 Limita relativistické energie

Pěkným příkladem využití Taylorova rozvoje je ověření, že Speciální teorie relativity funguje pro malé rychlosti stejně, jako to funguje v klasické mechanice. Zaveďme si obvyklé označení $\beta = \frac{v}{c}$, kde v je rychlost tělesa, c je rychlost světla, a označme $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$. Vezmeme si známý Einsteinův vzoreček pro energii tělesa/částice

$$E = mc^2\,,$$

kde m je relativistická hmotnost částice, pro kterou platí, že je $m = \gamma m_0$, kde m_0 je klidová hmotnost.

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} m_0 c^2\,.$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj γ pro $\beta \to 0$ s tím, že se budeme zajímat o první tři členy

$$\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = 1 + \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}\right)_{\beta=0} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}\right)_{\beta=0} + O(\beta^3)\,,$$

Značení $O(\beta^3)$ znamená, že máme ještě nějaký zbytek, který je řádově úměrný β^3 či vyšším mocninám. To je právě to, co budeme chtít zanedbat.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}\right)_{\beta=0} = \left.\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{\beta=0} = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}\right)_{\beta=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right)_{\beta=0} = \left.\frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}}\right|_{\beta=0} = 1$$

Pro malé rychlosti ve srovnání s rychlostí světla tedy dostáváme vztah pro energii

$$E = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\beta^2 + O\left(\beta^3\right)\right)\,.$$

Pokud se tedy omezíme na přiblížení β^2, pak má celková energie tělesa tvar

$$E \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2\,.$$

Tedy skutečně dostáváme člen odpovídající kinetické energii $\frac{1}{2}m_0v^2$ a pak navíc člen odpovídající klidové energii tělesa m_0c^2, která se nám v klasické fyzice nijak neprojevuje. V obou případech ve vzorci vystupuje klidová hmotnost tělesa, což je sice rozdíl oproti klasické fyzice, nicméně pro $\beta \ll 1$ je rozdíl mezi relativistickou a klidovou hmotností nepatrný.

1.9 Literatura, reference

[1] D. Hrubý, J. Kubát: *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet.* Nakladatelství Prometheus