KAPITOLA 1

FUNKCE

Funkce je v matematice velmi důležitý a často používaný pojem. Zasahuje do mnoha odvětví přírodních i společenských věd, kde je matematika užívána. Setkáme se s ní v ekonomii, statistice, fyzice, nebo také třeba chemii. Pro každého fyzika je proto nezbytné tento pojem chápat, jelikož právě ve fyzice hrají funkce ústřední úlohu. Namátkou uveďme, že ve fyzice jaderné najdeme tzv. radioaktivní zákon, který je vyjádřen pomocí exponenciální funkce, v mechanice hmotného bodu je zase znázornění kmitavého pohybu oscilátoru v čase dáno funkcí sinus, popřípadě kosinus. Pojďme se tedy blíže podívat, co to funkce vlastně je.

1.1 Co je to funkce?

Intuitivně si funkci můžeme představit jako přístroj, do kterého vložíme nějaké číslo a on nám nějaké číslo vrátí, přičemž čísla vložené a vrácené se mohou lišit, ale nemusí. Pokud opakujeme vložení jednoho a toho samého čísla, funkce nám jedno a totéž číslo vrací. V matematické hantýrce pak říkáme, že **funkce je zobrazení z množiny čísel do množiny čísel**.[1] Z první číselné množiny vybíráme čísla, která do funkce vkládáme, čísla z druhé množiny jsou naopak těmi, která funkce vrací. Množina, z níž čísla vybíráme, se nazývá *definiční obor funkce*, množina čísel, které nám funkce může vrátit, se nazývá *obor hodnot funkce*. Například, pokud jsou obě množiny podmnožinami reálných čísel, říkáme, že jde o reálnou funkci jedné reálné proměnné. V mezích středoškolské fyziky si více méně vystačíme s tímto typem funkce, mezi důležité funkce ve fyzice ale řadíme také komplexní funkce komplexní proměnné, funkce více proměnných, nebo funkce vektorové.

Pokud bychom chtěli formálně zapsat reálnou funkci jedné reálné proměnné, tak bychom psali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tento zápis nám říká, že máme co do činění s funkcí, kterou jsme označili f, která zobrazuje z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel. Obraz prvku z definičního oboru se nazývá *funkční hodnota*. Obyčejně se tedy jedná o reálné číslo.

[1] V další části textu uvidíme, že funkce mohou vybírat z číselných n-tic a zobrazovat do číselných m-tic, naše definice tedy není pro tuto chvíli úplně obecná.

1.2 Jak funkci zadat?

Pro vyjádření konkrétní funkce bylo vytvořeno několik metod, každá z nich se uplatní v jiné situaci. V praxi se setkáme se třemi[2] způsoby, jak lze konkrétní funkci popsat.

1. **Pomocí funkčního předpisu**: S pomocí této metody zápisu funkce dokážeme najít funkční hodnotu funkce pro celý její definiční obor. Smyslem této metody je zakódovat pomocí matemaické operace vztah mezi hodnotami definičního oboru a jejich příslušejícími funkčními hodnotami. Pro názornost si vezměme jako příklad funkci kvadratickou, jejíž funkční předpis nabývá tvaru $f(x) = x^2$. Tento zápis nám říká, že funkční hodnota $f(x)$ funkce f v bodě x je rovna x^2. A pro maximální konkrétnost si nyní zvolme jedno číslo, které dozajista leží v jejím definičním oboru, a pro ně vyslovme stejné tvrzení. Funkční hodnota $f(3)$ kvadratické funkce f v bodě $x = 3$ je $x^2 = 3^2 = 9$. Případu, kdy pro zjištění funkční hodnoty funkce stačí jen dosadit jistou hodnotu z definičního oboru a provést příslušné aritmetické[3] operace, říkáme *funkce zadaná explicitně*. Již pokročilejším příkladem zadání funkce pomocí funkčního předpisu je *funkce zadaná implicitně*. K zjištění funkční hodnoty funkce zadané implicitně musíme navíc řešit na určitém intervalu nějakou rovnici. Dost často za nás tyto rovnice řeší počítač numericky, jsou totiž příliš složité. Jednoduchým příkladem takové funkce zadané implicitně je $f^2(x) = x^2 + 4$. V některých případech, jako je například tento, není funkční hodnota $f(x)$ stanovena jednoznačně, takže nejde o funkci v původním slova smyslu, museli bychom některé funkční hodnoty zakázat. Pokud známe funkční předpis, není pro nás složité zadat funkci prostřednictvím tabulky.

2. **Pomocí tabulky**: Asi nejjednodušší způsob, jak zachytit informaci o funkci, je učinit výčet uspořádaných dvojic čísel, která vždy reprezentují vstupní a výstupní hodnotu funkce. Ačkoliv tento postup dovoluje velmi přímočarým způsobem funkci zadat, nebo funkční hodnoty v některých jejích bodech definičního oboru nahlédnout, trpí tento způsob některými významnými nedostatky. V první řadě, většinou nám nedovoluje popsat funkci celou. Abychom mohli poznat celou funkci, musíme uvést výčet funkčních hodnot pro celý definiční obor. Definiční obor je ale typicky nekonečná množina, pro níž nemáme možnost tabulku vytvořit. Další nedostatek této metody spočívá v tom, že nelze žádným způsobem analyzovat vlastnosti a průběh zadané funkce. Vlastnostem funkcí se budeme věnovat později, na tomto místě jenom uveďme, že nejrozumnější způsob, jak zadat funkci, jejíž vlastnosti zkoumáme, je již jmenované zadání funkčního předpisu.

   Jak taková tabulka může vypadat není pravděpodobně nikomu na obtíž si představit, pro úplnost ale uveďme jako vzor vyjádření funkce $f(x) = x^2$ pomocí tabulky, zachycující funkční hodnoty pro několik málo vstupních hodnot.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81

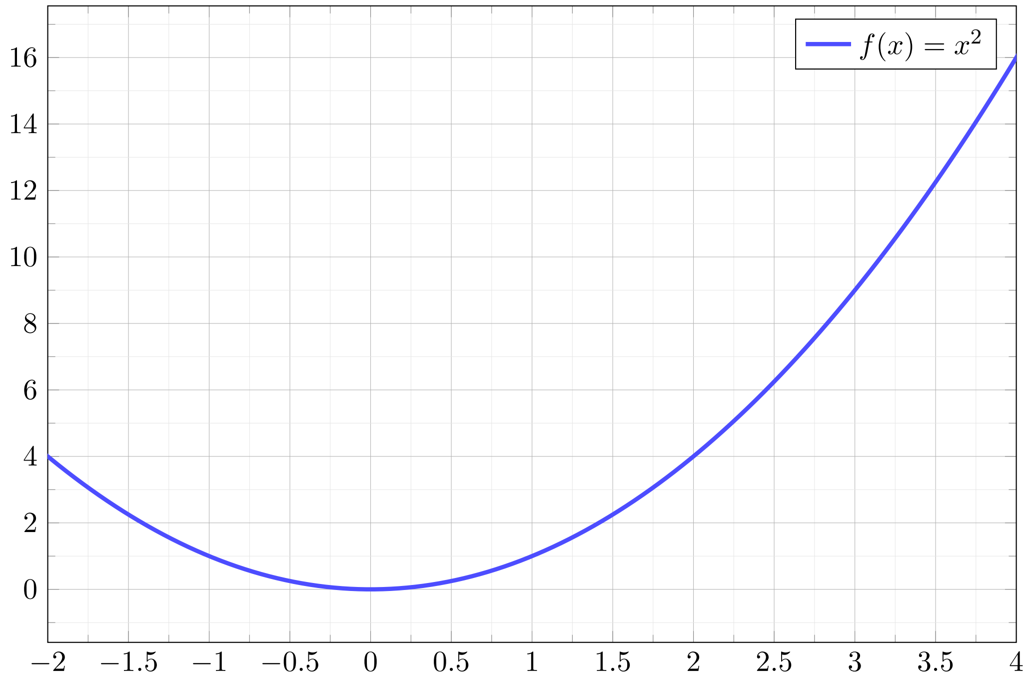
3. **Pomocí grafu**: Grafické vyjádření funkce je užitečné zejména k lepší představě o globálním nebo i lokálním chování funkce. Lze z části sestrojit ze znalosti vyjádření funkce prostřednictvím tabulky. Při praktických konstrukcích grafů potřebujeme ale zároveň jistou představu o chování funkce mezi body,

[2] Mimo jmenované způsoby bychom ještě neměli opomenout na, v teorii vyčíslitelnosti hojně používaný pojem, *funkce zadaná rekurentně*. Jde o zadání funkce pomocí nějakého rekurentního předpisu, předpisu pro funkční hodnotu v jistém bodě pomocí funkčních hodnot v bodech jiných.

[3] V principu se nemusí jednat výlučně jen o aritmetické operace, může jít o operace tzv. limitní, ale pro naše účely si s aritmetickými operacemi vystačíme.

které jsou zachyceny tabulkou, abychom věděli, jak body spojit.[4] Graf funkce se totiž sestává z bodů v rovině (pokud je řeč o reálné funkci jedné reálné proměnné), jejichž souřadnice přesně odpovídají uspořádané dvojici čísel vstupní-výstupní hodnota funkce.

Opět pro demonstraci uveďme, jak může takový graf vypadat, konkrétně pro naši oblíbenou kvadratickou funkci $f(x) = x^2$.



1.3 Vlastnosti funkcí

Pod tímto pojmem většinou míníme nějaký charakteristický vztah mezi jednotlivými funkčními hodnotami dané funkce v různých bodech. Analýza těchto vlastností nám dá lepší vhled do lokálního nebo globálního chování funkce. Z tohoto důvodu se vlastnostmi funkcí zaobíráme právě při vyšetřování průběhu funkce. Pro orientaci v pojmech tedy uvedeme několik základních vlastností, které funkce může mít.

- *Rostoucí funkce.* To je taková funkce f, pro níž platí $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
- *Klesající funkce.* Funkce f, pro níž platí $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.
- *Periodická funkce.* Pokud řekneme, že funkce f je periodická s periodou $p \in \mathbb{R}$, potom tím myslíme, že $f(x) = f(x + kp)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
- *Prostá funkce.* Funkce f je prostá, pokud $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.
- *Sudá funkce.* O funkci f řekneme, že je sudá, pokud platí $f(x) = f(-x)$.
- *Lichá fukce.* O funkci f řekneme, že je lichá, pokud platí $f(x) = -f(-x)$.

[4] Buďme ale opatrní, ne vždy lze graf funkce sestrojit jako jednolitou křivku, v matematice existují i tzv. nespojité funkce, jako například funkce *signum*.

- *Konvexní funkce.* Funkce f je na intervalu (a,b) (který je podmnožinou definičního oboru této funkce) konvexní, pokud na tomto intervalu nemá žádná lokální maxima a spojnice bodů a a b leží celá nad grafem. Přesněji, funkční hodnoty lineární funkce procházející body o souřadnicích $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ jsou pro všechny $x \in (a,b)$ větší než $f(x)$.
- *Konkávní fukce.* Funkce f je na intervalu (a,b) (který je podmnožinou definičního oboru této funkce) konvexní, pokud na tomto intervalu nemá žádná lokální minima a spojnice bodů a a b leží celá pod grafem. Přesněji, funkční hodnoty lineární funkce procházející body o souřadnicích $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ jsou pro všechny $x \in (a,b)$ menší než $f(x)$.
- *Omezená funkce.* Funkce f je omezená, pokud je *shora omezená*, nebo *zdola omezená*. Pokud existuje takové číslo $M \in \mathbb{R}$, že $f(x) < M$ pro libovolné x náležící do definičního oboru f, pak je funkce shora omezená. Pokud existuje $M \in \mathbb{R}$, že $f(x) > M$ pro libovolné x náležící do definičního oboru f, pak je funkce zdola omezená.

1.4 Inverzní funkce a složená funkce

V matematice se často potkáme s inverzí v mnoha podobách. V aritmetice poznáme inverzní hodnotu čísla, v geometrii je to zase prostorová, případně kruhová, inverze. Ptáte se, co mají všechny inverze matematického světa společného? Obecně řečeno, inverze k nějakému matematickému objektu je matematický objekt, jehož kompozice s původním matematickým objektem dá dohromady objekt identity. Identita v aritmetice násobení je jednička, identita u geometrických transformací je transformace, která nechává všechny body na místě. A tak bychom mohli pokračovat.

Když chceme hovořit o tom, co je to inverze k nějaké funkci, musíme se dohodnout na tom, co je identita. Nedá moc práce si rozmyslet, že je to taková funkce, která ke každému číslu přiřadí to samé číslo, tedy funkce $f(x) = x$. K tomu, abychom ale plně pochopili, co je inverzní funkce, dlužni jsme dodat, co je v případě funkcí jejich kompozice, neboli skládání. Terminologie praví, že pokud složíme funkci f s funkcí g, dostaneme *složenou funkci* h, pro kterou platí $h(x) = f(g(x))$ pro všechna x, která leží v průniku definičního oboru funkce g s množinou takových hodnot x, že $g(x)$ leží v definičním oboru funkce f. Tuto kompozici symbolicky značíme $h = f \circ g$. U skládání funkcí si musíme dát pozor na jejich pořadí, protože při obráceném složení dostáváme v mnoha případech dosti jinou funkci. Pokud je $f(x) = 10^x$ a $g(x) = x^2$, potom $(f \circ g)(x) = 10^{(x^2)}$, kdežto $(g \circ f)(x) = (10^x)^2 = 10^{2x}$.

Nyní jsme připraveni na vyslovení následující definice. *Inverzní funkce* k funkci f značíme f^{-1} a definujeme ji podmínkou $f^{-1} \circ f = x$. Jak se můžeme přesvědčit, existují funkce, které jsou samy sobě inverzí, neboli pro ně platí $f = f^{-1}$. Vyzkoušejte si, že jsou to kupříkladu funkce $f(x) = x$, nebo $f(x) = \frac{1}{x}$. A jak je to s inverzí inverzní funkce? Všeobecně patí, že inverzní funkce k inverzní funkci f^{-1}, kterou bychom mohli značit $(f^{-1})^{-1}$, je vždy rovna funkci původní, tedy f. Díky tomu můžeme uzavřít, že pokud platí $f^{-1} \circ f = x$, musí nutně také platit $f \circ f^{-1} = x$, a naopak.

1.5 Jaké důležité funkce poznáme?

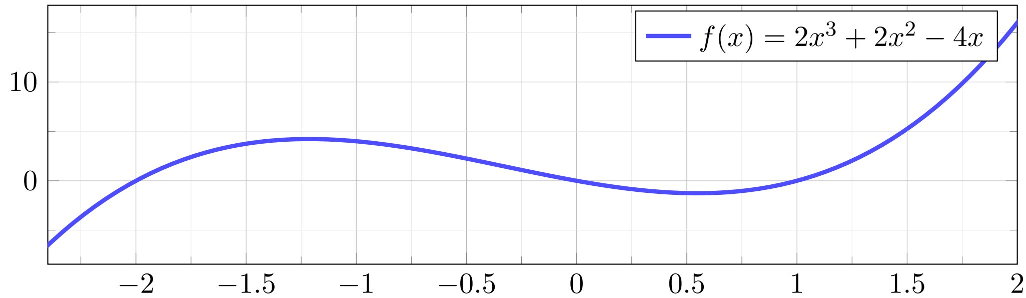
V první řadě čtenáře upozorněme, že kdykoliv budeme v této části textu hovořit o funkci, budeme ji specifikovat právě pomocí jejího funkčního předpisu.

Ještě než začneme s výčtem funkcí, povšimněme si, že přece jen jsme již jednu funkci z předchozích odseků poznali. Jde o kvadratickou funkci, lépe řečeno, jednu speciální variantu kvadraické funkce. Obecný předpis pro kvadratickou funkci nabývá tvaru $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$. Diskutovaný případ získáme z tohoto obecného volbou $a = 1, b = 0, c = 0$.

- Kvadratická funkce je zase speciální podtřída funkcí, které nazýváme *polynomiální funkce stupně* n. Každá taková funkce má předpis $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, kde a_j s $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ jsou nějaké reálné konstanty a zároveň platí $a_n \neq 0$. Opět jen poznamenejme, že kvadratické funkce získáme volbou $n = 2$.

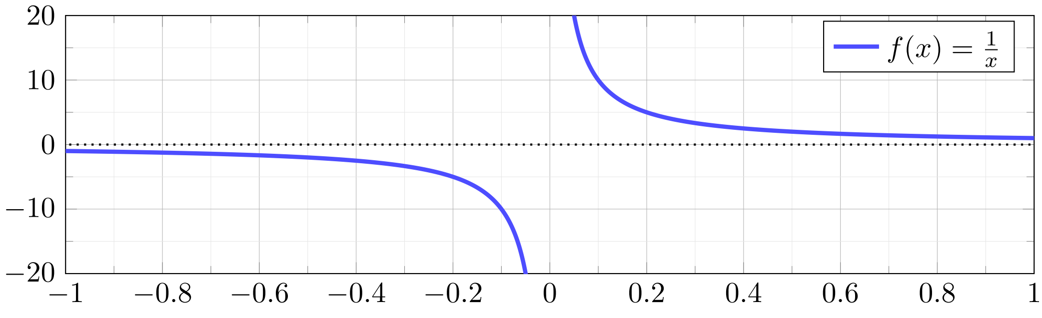
  S polynomiálními funkcemi se ve středoškolské fyzice setkáváme snad nejčastěji. Jejich výhodou je snadná vyčíslitelnost v libovolném bodě reálné osy, s tím spojená jednoduchá pravidla pro aritmetické manipulace a v neposlední řadě dobře předvídatelný průběh. Na vysoké škole se k těmto výhodám přidá ještě nekonečná diferencovatelnost, neboli *hladkost*. Díky těmto výhodám se matematikové snaží nacházet ekvivalnty všemožných funkcí právě mezi funkcemi polynomiálními. Byl vynalezen postup, jak ke konkrétnímu tvaru polynomu, kterým nahradíme původní funkci, dojít. Takovému polynomu se říká *Taylorův polynom*.

  Abychom se s polynomiálními funkcemi lépe seznámili, uveďme jeden příklad, který blíže prozkoumáme. Uvažujme funkci $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$.



  Jak asi tušíme, protože nám nic nebrání dosadit za x libovolné číslo, jelikož vždy získáme dobře definovanou funkční hodnotu, jsou definičním oborem této funkce všechna reálná čísla. Tato funkce má tři kořeny $\{-2, 0, 1\}$, na podmnožině definičního oboru $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$ je záporná, na podmnožině definičního oboru $(-2, 0) \cup (1, \infty)$ je kladná. Tato funkce není omezená ani shora ani zdola, funkční hodnoty mohou nabývat libovolně velké hodnoty. Pokročilejší techniky zkoumání průběhu funkce by nám ukázaly, že má tato funkce v bodě $x = -\frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$ lokální maximum (což si lze představit jako místo, kde je „vrcholek kopečku“) a lokální minimum v bodě $x = \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{7})$. Rostoucí je tím pádem na intervalu (který je opět podmnožinou definičního oboru funkce) $(-\infty, -\frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})) \cup (\frac{1}{3}(-1 + \sqrt{7}), \infty)$ a klesající na intervalu $(-\frac{1}{3}(1 + \sqrt{7}), \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{7}))$. Pomocí vyšších derivací bychom pak mohli zkoumat další vlastnosti funkce, jako intervaly konvexnosti, konkávnosti, apod. To už je ale spíše cvičením na derivace, které tento text nepokrývá.

- Dalšími důležitými fukcemi v pořadí jsou funkce *lomené*, jejichž nejdůležitějším zástupcem je funkce $f(x) = \frac{1}{x}$. Grafické vyjádření této funkce je hyperbola.

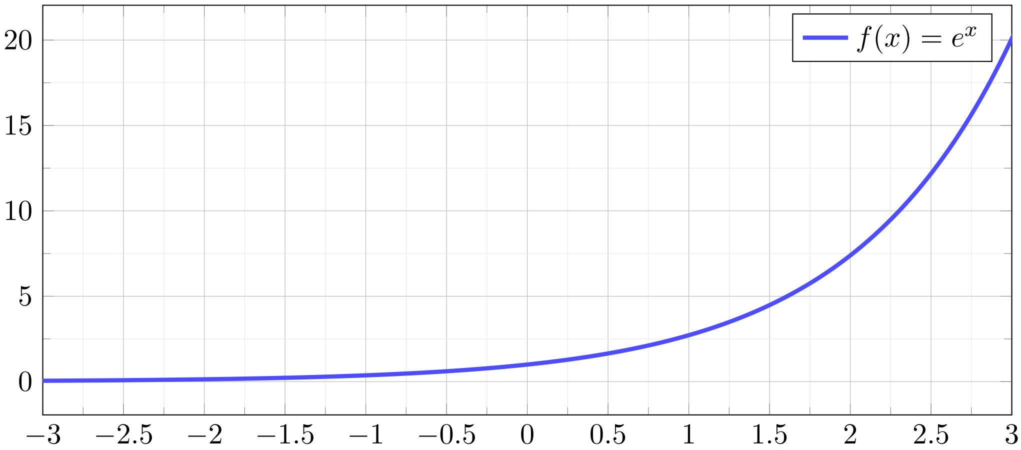


  Jak z grafu vidno, v tomto případě definiční obor nejsou všechna reálná čísla, pokud bychom dosadili za x hodnotu nula, dostali bychom nedefinovaný výraz $\frac{1}{0}$. Oborem hodnot jsou všechna reálná čísla.

Funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Z grafu můžeme také nahlédnout, že funkce je prostá a lichá.

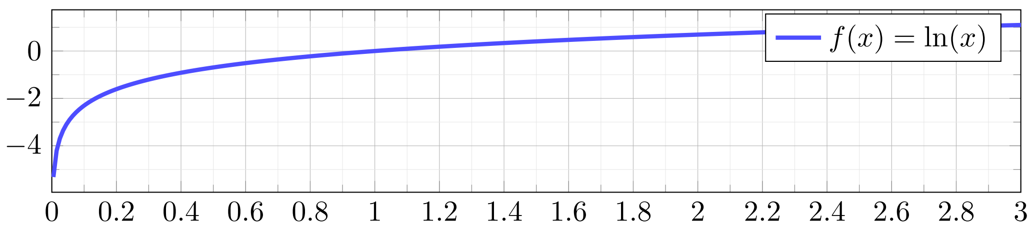
- Přímo nepostradatelnou funkcí ve fyzice je *exponenciální funkce*. Ve středoškolské fyzice se sice vyskytuje jen sporadicky, ve vysokoškolské fyzice se bez nadsázky dá říci, že vystupuje v různých podobách jako většina řešení diferenciálních rovnic. Její obecný tvar je $f(x) = ab^x$, kde $a \in \mathbb{R}\backslash 0, b \in \mathbb{R}^+$. Pokud ovládáme počítání s výrazy v exponentu[5], jistě nás nezaskočí, že definičním oborem takových funkcí jsou opět všechna reálná čísla.

  Pro přiblížení vlastností exponenciální funkce si vezměme snad nejslavnější z exponenciálních funkcí, funkci zadanou předpisem $f(x) = e^x$, kde e je konstanta zvaná *Eulerovo číslo* a její přibližná hodnota je $e \doteq 2,718$. Důvod, proč je zrovna tato funkce tak důležitá se dočtete ve studijním textu o derivacích.

  Jak je z grafu patrné, oborem hodnot jsou tentokráte všechna kladná reálná čísla, podle požadavku, v $x = 0$ je funkční hodnota $f(0) = 1$. Funkce je na celém svém definičním oboru rostoucí, pro záporné hodnoty x je funkce rostoucí velmi pozvolna, pro kladné hodnoty x naopak fukce roste velmi strmě. Dokonce se dá ukázat, že pro kladné hodnoty x roste libovolná exponenciální funkce rychleji než libovolná polynomiální funkce. Také vidíme, že jde o funkci prostou a na celém definičním oboru konvexní.

- Inverzní funkcí k funkci exponenciální je funkce *logaritmická*. Obecný předpis pro logaritmickou funkci je $f(x) = a \log_b x$, kde $a \in \mathbb{R}\backslash 0$ a $b \in \mathbb{R}^+$. Graf této funkce vznikne zrcadlením exponenciální funkce okolo osy dané předpisem $f(x) = x$. Pro lepší představu o průběhu funkce opět sestrojme graf. Stejně jako tomu bylo u exponenciály, položme $a = 1, b = e$. Takový logartmus se základem Eulerova čísla se nazývá *přirozený*.

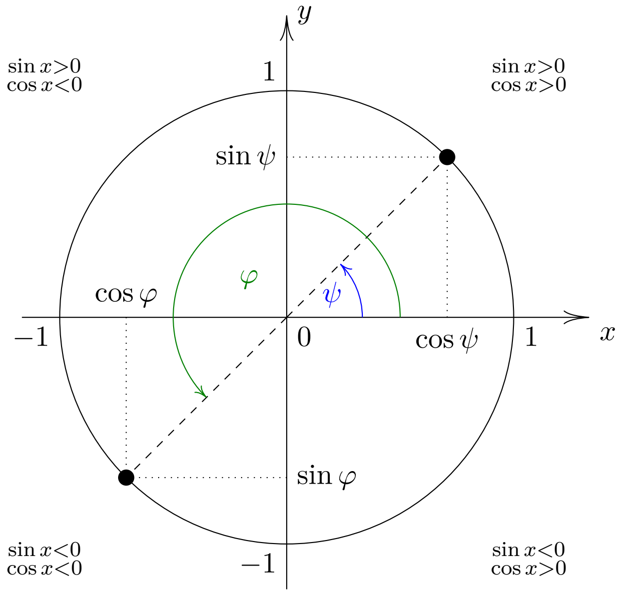
  

[5]Jen pro připomenutí, pravidla, která se uplatňují při počítání s exponentou ($a, b \in \mathbb{R}\backslash 0; x \in \mathbb{R}^+; y, z \in \mathbb{R}$), jsou:

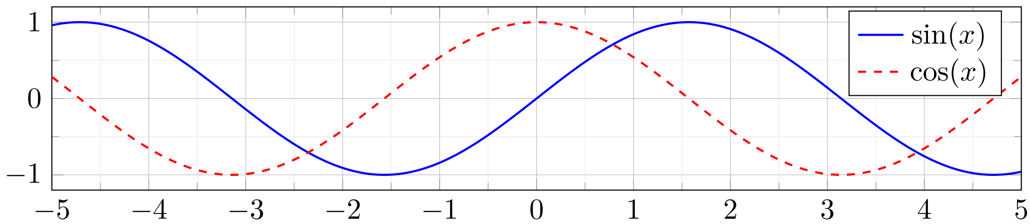
1. $(ax^y)(bx^z) = (ab)x^{(y+z)}$
2. $x^0 = 1$
3. $x^{-y} = \frac{1}{x^y}$

Funkce je tedy definována pouze na $\mathbb{R}^+$, zato obor hodnot pokrývá všechna reálná čísla. Funkce je na celém definičním oboru rostoucí a tudíž prostá. Také stojí za povšimnutí, že je na celém definičním oboru konkávní.

- Ve vyšších ročnících střední školy poměrně časté funkce, právě pro jejich úzký vztah ke kmitání a vlnění jsou funkce *sinus* a *kosinus*. Tyto funkce vychází z geometrie pravoúhlého trojúhelníka a popisují poměr některých jeho stran v závislosti na jistém úhlu vyjádřeném v radiánech. Funkce sinus je funkce poměru protilehlé strany a odvěsny pravoúhlého trojúhelnika v závislosti na úhlu, pro změnu kosinus je funkce poměru přilehlé strany a odvěsny pravoúhlého trojúhelníka v závislosti na úhlu. Sinus je funkcí úhlu přeponě protějšího, kosinus je funkcí úhlu přeponě přilehlého. Pro úhly menší než 90° jde o úhel vnitřní, jinak jde o úhel vnější. Pro přesnější představu definice obou funkcí si pomůžeme jednotkovou kružnicí.



Nyní již dokážeme lépe pochopit, proč grafy obou funkcí vypadají takto



Obě funkce jsou definované na celém $\mathbb{R}$, jejich oborem hodnot je interval $[-1, 1]$. Obě funkce jsou periodické. Funkce sinus má maximum v bodech $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$, minimum v bodech $\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$ a kořeny v bodech $\{k\pi\}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Funkce kosinus má maximum v bodech $\{2k\pi\}$, minimum v bodech $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$ a kořeny v bodech $\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Sinus je lichá funkce, kosinus zase sudá.

1.6 Některé operace s funkcemi

Stejně jako lze provádět aritmetické operace s čísly, analogicky lze provádět aritmetické operace s funkcemi. Funkce lze také sčítat, odčítat, násobit a dělit. Pokud máme funkce f a g, pak jejich součet je funkce h pro jejíž funkční hodnoty platí $h(x) = f(x) + g(x)$ pro libovolné x z průniku definičních oborů funkcí f a

g. Analogicky definujeme rozdíl funkcí pomocí podmínky $h(x) = f(x) - g(x)$, který opět platí jen pro x z průniku definičních oborů funkcí f a g. Asi nás nepřekvapí, že velice podobně je tomu u součinu a podílu. Součin funkcí je definován podmínkou $h(x) = f(x)g(x)$, podíl podmínkou $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Jediná zákeřnost, která na nás číhá při dělení funkcí, je ta, že výsledná funkce je definovaná na průniku definičního oboru funkce f a definičního oboru funkce g bez bodů, pro něž je funkce g nulová.

1.7 Funkce více proměnných a vektorové funkce

Závěrečná část tohoto studijního textu bude patřit zevšeobecnění naší definice funkce a představení několika takových příkladů ve fyzice. Důvodem je, že se zejména ve vysokoškolské fyzice snadno setkáme s funkcí, jejíž definičním oborem není množina čísel, ale uspořádaná množina množina číselných dvojic, trojic, obecně tedy n-tic. Jedná se o zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Takovým funkcím říkáme *funkce více proměnných.* Ve fyzice je s výhodou používáme například v situacích, kdy chceme vystihnout průběh nějaké skalární veličiny v prostoru. Pak samozřejmě volíme $n = 3$, jelikož máme právě tři prostorové dimenze. Jindy jsme v situaci, kdy potřebujeme navíc zachytit časový vývoj tohoto prostorového průběhu, tak volíme $n = 4$, kde poslední proměnnou je čas. Typicky se s takovou funkcí setkáme při vyšetřování vedení tepla v materiálu. Funkční předpis takové funkce může vypadat třeba takto $f(x, y, z, t) = t + xy - 3z^2$.

Druhý směr, kterým můžeme zevšeobecňovat definici funkce, je zevšeobecnění oboru hodnot. Zatím jsme se setkali jen s případem, kdy to byla reálná čísla, obecněji to zase mohou být m-tice reálných čísel. A protože m-tice čísel může reprezentovat vektor, funkcím tohoto typu říkáme *vektorové.* Vektorová funkce více proměnných je potom zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ve fyzice je často užitečná volba $m = 3$, opět z toho důvodu, že máme tři prostorové dimenze. Partie fyziky, kde se hojně využívají vektorové funkce je elektromgnetismus. Vektorovými funkcemi jsou tam časové vývoje elektrické intenzity, případně magnetické indukce, v prostoru. Pro lepší představu opět uveďme příklad, jak taková funkce $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ může vypadat: $f(x, y, z, t) = (1, 15t, x + y + z)$.