1. Úvod do kinematiky bodu

I do not know what I may appear to the world; but to myself, I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself now and then in finding a smoother pebble or prettier shell than ordinary, while the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

I can calculate the motion of heavenly bodies, but not the madness of people.

Isaac Newton

V této kapitole se chceme podívat na pohyb jednoho bodu. Často se uvádí pojem *hmotného bodu*, který navíc obsahuje informaci o hmotnosti. Pro účely kinematiky tuto hmotnost však nebudeme potřebovat, a proto ji podruhé zmíníme až v další kapitole o dynamice.

Hlavní částí této kapitole bude sledovat polohu zkoumaného bodu. K tomu je potřeba rozumět tomu, co poloha je. Změna polohy se pak dá popsat několika kinematickými veličinami, na nichž si ukážeme skutečnou sílu diferenciálního počtu, který lze najít v dodatku (současně v samostatném textu).

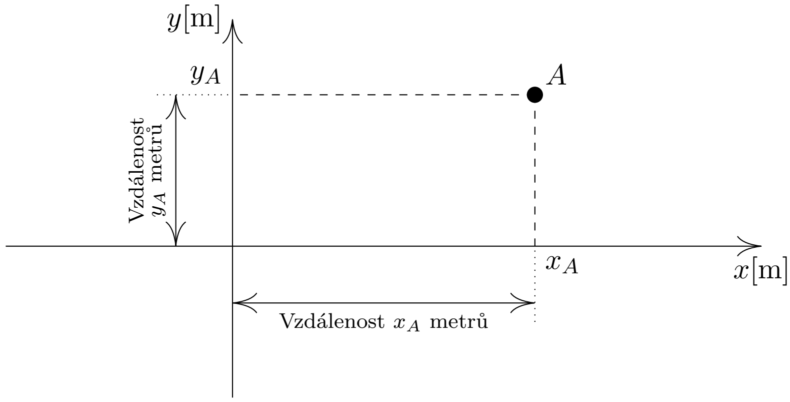
1.1 Poloha bodu

Hmotný bod se může nacházet v nějakém místě. Pro fyzika je důležité dokázat popsat, kde toto místo je, aniž by se na něj díval a přímo ukazoval. Jeho kolega potom musí mít přesnou informaci, kde bod najde.

Podívejme se na úlohu očima dvou fyziků v laboratoři, kteří se dívají na monitor svého počítače. Oba vidí stejné věci, avšak jsou na opačné straně laboratoře (to může být taková vzdálenost, na níž už krátkozraký fyzik svého kolegu vidí pouze jako šmouhu před jinou šmouhou). Mohou na sebe ale mluvit, sluch jim i v pokročilém věku stále funguje dobře.

Představme si, že kolega Alfréd chce vypnout webový prohlížeč, protože zjistil, že se vrací vedoucí laboratoře, neměl by tak přijít na to, že Alfréd ve své pracovní době hraje piškvorky. Zavolá na svého spolupracovníka Vilfréda: „Hele, Vili, jak to vypnu?“ Ten mu odpoví: „Vpravo nahoře je křížek!“ Informace je užitečná a je kompletní, neboť při pohledu do pravého horního rohu Alfréd zjistí, že se tam skutečně nalézá křížek, jímž okno zavře.

Situace se ale může zhoršit. Vedoucí laboratoře, prof. Suchar, podezřívá své podřízené z toho, že v pracovní době hrají hry po internetu. Naboură se tedy do struktury prohlížeče a Alfrédovi se den na to objeví na monitoru křížků, co se tam vejde, ve chvíli, kdy se Suchar rozhodne jít na kontrolu. Vilda je ale kolega znalý, a tak povídá: „Je to ten krídek tři centimetry zleva a dva centimetry odshora“. Jelikož je Alfréd stará škola, má vždy v kapse pravítko perfektně zkalibrované s tím Vilfrédovým, a proto najde křížek, okno zavře. Po příchodu vedoucího vše vypadá v pořádku a Suchar je spokojený, že jeho kolegové neměli otevřený prohlížeč, věnují se práci a ona řízená exploze zkoumané jaderné hlavice nebude problém.



Obrázek 1.1: Kartézské souřadnice mají význam orientované vzdálenosti. Na obrázku vidíme, že bod A je jednoznačně dán dvěma čísly, které odpovídají souřadnicím x, y.

1.1.1 Kartézské souřadnice

Demonstrovali jsme si, jak důležité je dokázat najít polohu nějaké bodu (nebo křížku). Nejlepším způsobem je vzít si referenční osy, jimiž byly v našem případě hrany monitoru, a od nich následně měřit vzdálenost. Stejný systém použil Renés Descartes (*lat. Renatus Cartesius*) při popisu polohy mouchy na stropě svého příbytku.

Ukažme si, jak taková věc funguje na obrázku 1.1. Vidíme, že je potřeba znát referenční osy x, y, na nichž podáváme i informaci o tom, že vzdálenost měříme v metrech. Souřadnice x_A nám symbolizuje vzdálenost od osy y a souřadnice y_A od osy x. Vzdálenost je orientovaná, tzn. osy mají šipky, kterými symbolizují růst hodnoty, díky tomu jsme schopni říci, že pokud jsme vpravo od osy y, potom je $x_A > 0$, pokud by bod A byl nalevo od osy y, potom by $x_A < 0$, analogicky máme orientaci kladnou výše osy x a zápornou níže.

Zkonstruovali jsme tedy *referenční systém*, tedy soubor mnoha matematických prvků k přesnému popsání polohy – souřadné osy, jejich orientace a měřítko. Počátek soustavy (bod $[0, 0]$) je referenčním bodem, díky němuž celému systému říkáme referenční (vztažný). Číslům x_A, y_A říkáme *kartézské souřadnice bodu A*.

Pokud bychom byli v prostoru, lze kartézské souřadnice jednoduše rozšířit. Konkrétně souřadnice x by se stala orientovanou vzdáleností od roviny (y, z), y od roviny (x, z) a z od roviny (x, y).

1.1.2 Polární souřadnice

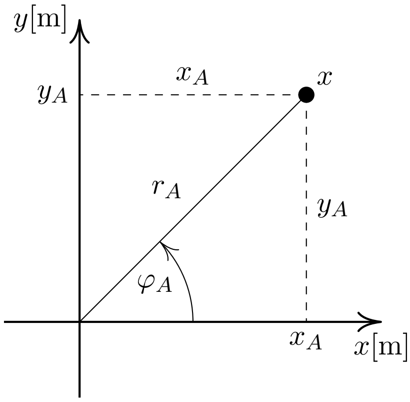
Ve dvourozměrném prostoru můžeme popisovat polohu bodu i jinak než kartézsky. Nesmíme však zapomínat na naší hlavní úlohu, konkrétně na tu, že bod musí být popsán jednoznačně. Budeme-li přecházet ze souřadnic (x, y) na jinou dvojici (ξ, ζ), musí platit, že daným x, y odpovídá pouze jediná dvojice ξ, ζ. Stejně tak opačně daným ξ, ζ musí odpovídat pouze jediná dvojice x, y.

Jedním ze způsobů je přejít na tzv. polární souřadnice (r, φ), jak ukazuej obrázek 1.2. Z prosté definice funkcí $\sin\varphi, \cos\varphi$ lze vydedukovat, že platí transformační vztahy

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

a naopak

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$



Obrázek 1.2: Polární souřadnice (r, φ) odpovídají jediné dvojici (x, y), pokud $r \geqq 0$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$. Souřadnici r se říká polární a φ azimutální.

zde zmiňme, že funkce $\arctan\varphi$ je funkce inverzní k funkci $\tan\varphi$, na kalkulačce ji najdeme jako funkci $\tan^{-1}$, ovšem nepleťme si s funkcí $\cot\varphi = 1/\tan\varphi$.

Jednoznačnost zadaného zápisu je dána tím, že jsou dány meze $r > 0$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$. S těmito souřadnicemi jsme se již setkali při studiu komplexních čísel, kdy jsme ukázali, jak pomocí polárních souřadnic jednoduše rotovat okolo počátku. Skutečně polární souřadnice využijeme pro popis pohybu po kružnici a využijeme vlastností ukázaných v kapitolce s komplexními čísly (V budoucnu by zde měl být ref na kapitolu.)

Než opustíme polární souřadnice, měli bychom probrat dvě věci. V transformaci $(r, \varphi) \mapsto (x, y)$ lze vybrat libovolné r, φ z našeho definičního oboru, tedy $\varphi = \pi/2$ a $\varphi = 3\pi/2$ nedělají žádný problém. Jedná se o body, které leží na ose y. Jak bude ale vypadat obrácená transformace? V případě $x = 0$ dostáváme

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{0}\right),$$

což jistě není dobře definovaný výraz, situaci proto musíme řešit limitně, tj.

$$\varphi = \lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

tato definice je exaktnější, neboť funkce $\arctan(z)$ má pro $z \to \infty$ hodnotu $\pi/2$ a pro $z \to -\infty$ hodnotu $-\pi/2$, které v našem obrázku odpovídá $3\pi/2$. Kdykoliv se nám tedy ukáže tento vztah $\varphi = \arctan(y/x)$, nahlížíme na něj limitně.

Poslední z důležitých věcí, kterou je třeba zmínit, je počátek kartézské referenční soustavy $x = 0, y = 0$, ten se zobrazí na $r = 0$, nicméně φ zde nelze určit. Hodnotě $r = 0$ odpovídá totiž nekonečně mnoho φ. Tuto věc již nijak nedokážeme ošetřit. Poprvé jsme se setkali s něčím, čemu se v praxi říká *patologie souřadnic*. Polární souřadnice proto nebudeme používat, budeme-li mluvit o počátku.

Existuje také nějaké vhodně lehké rozšíření polárních souřadnic do třírozměrného prostoru? Existuje jich hned několik! My si zmíníme dvě z těchto možností.

1.1.3 Válcové souřadnice

Pro potřeby přednášky nepodstatné.

1.1.4 Sférické souřadnice

Pro potřeby přednášky nepodstatné.

Shrňme, že v poloze jsme našli různé souřadnice, jimiž lze popisovat fyzikální situace. Proč nepracovat přímo s kartézskými pochopíme především na pohybu po kružnici, kde práce v polárních souřadnicích bude daleko jednodušší.

Souřadnice, které jsme zde probírali, jsou ve skutečnosti vždy souřadnice tzv. polohového vektoru v našem 3D prostoru. Vektor spojující počátek souřadné soustavy $[0, 0]$ s naším bodem v místě $[x, y]$ nazýváme polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ (radius vector) a platí $\boldsymbol{r} = (x\ y\ z)$. Vyjádření v jiných než kartézských souřadnicích už není tak snadné. Budeme se mu proto věnovat až později.

1.2 Změna polohy – rychlost

V určité chvíli je potřeba začít přemýšlet o tom, že námi zkoumaný bod, kterým reprezentujeme reálný objekt (např. křížek na monitoru) může začít pohybovat. Pokud by prof. Suchar byl vážně zlomyslný a chtěl se pojistit, že jeho podřízení nepřijdou na to, který z křížků je ten správný, mohl by naprogramovat chaotický pohyb křížků. Je tedy potřeba umět popsat i pohyb, tedy změnu polohy v závislosti na čase.

Zastavme se na chvilku, abychom se zeptali na jednu velice důležitou filosofickou otázku, totiž *Co je to čas?* Máme-li pracovat s časovým vývojem polohy, je potřeba vědět, jak na čas pohlížet. Skutečná podstata času nám, fyzikům, prozatím zůstává utajena. Existuje však několik příjemných vysvětlení toho, jak čas funguje.

Obecná (nebo i speciální) teorie relativity nám říká, že náš vesmír je jakási entita, která má čtyři dimenze – tři prostorové a jednu časovou. V této představě je vesmír statický a zkrátka jen exisutje, nevyvíjí se. Plynutí času je potom jakási *iluze* pohybu v jednom ze čtyř směrů. Jak a proč tento pohyb probíhá, netušíme, avšak pozorujeme to skrze naše smysly evolucí námi pozorovaných tří dimenzí.

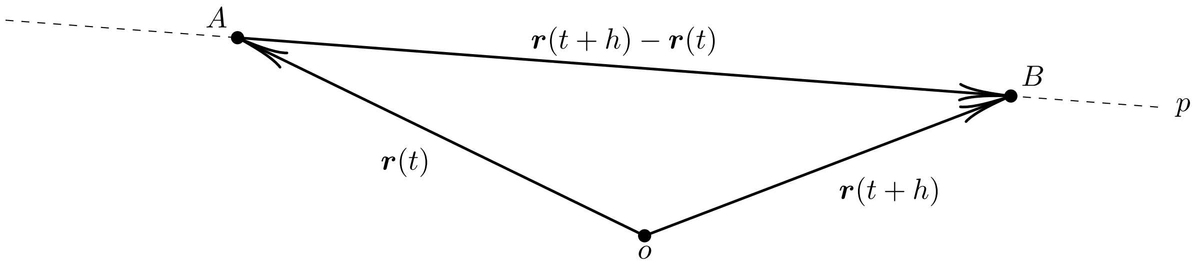
K zamyšlení stojí také tepelná smrt vesmíru; existuje teorie, v níž se teplota vesmíru pomalu blíží k absolutní nule. Pokud v určitou chvíli teplota k absolutní nule dojde, bude to znamenat, že všechny neelementární pohyby ustanou[1]. Díky tomu, že mimo bázové/elementární pohyby nebude existovat nic jiného, nebude existovat ani možnost se rozhodovat, možnost měřit. Celý vesmír od této doby by byl statický i ve svém 3D obraze. To znamená, že čas by sice existoval – např. elementární oscilace v pevných látkách, nicméně neměl by žádný smysl.

Po několika fyzikálně-filosofických úvahách se vraťme zpět k tomu, že body mohou měnit svou polohu. Máme referenční způsob, jak měřit čas[2], tudíž jsme schopni říci, že poloha se změnila za čas $\Delta t = t_2 - t_1$. Matematicky to znamená, že původně statická poloha se nyní stala funkcí času $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ a každému času přiřazuje nějakou polohu.

Jak vidíme na obrázku 1.3, změna polohy je vektor $\Delta\boldsymbol{r}$, jímž lze proložit přímku p. Tato přímka je přímkou ve 3D prostoru, a proto jí lze přisoudit tři směry, směr x, směr y a směr z. V každém z těchto směrů přímka roste, klesá či zůstává stejná. Abychom vyjádřili, jak moc, na to máme v 1D směrnici. V tomto případě budeme potřebovat směrnice tři. Jak bychom čekali,

[1] Zde si položme otázku, co je to neelementární pohyb. Díky kvantové mechanice jsme ve 20. století zjistili, že i při absolutní nule a základních stavech všech částic, neustává pohyb, který jsme do té doby považovali za pohyb tepelný. Oscilátor nepřestane kmitat, jen změní energii na nejmenší možnou $E = \hbar\omega/2$. Tyto elementární pohyby tedy i při absolutní nule zůstanou, avšak jejich význam je pro měření času nulový, pokud neexistuje žádný jiný pohyb.

[2] Referenční jednotkou je sekunda, jíž definujeme skrze elementární atomové přechody. Měření času je tak vyjádření toho, kolik takových přechodů nastane, než se změní poloha bodu.



Obrázek 1.3: Poloha se změní z $\boldsymbol{r}_1$ na $\boldsymbol{r}_2$, tedy změna polohy je $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. To vše probíhá za čas $\Delta t = t_2 - t_1$. Proložíme-li body $\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1$ přímku, získáme opět sečtu k trajektorii pohybu, pro níž můžeme zjistit trajektorii. Jelikož se tentokrát nejedná o zkoumání funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ale o $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, získáme místo jedné směrnice tři, každá odpovídá nárůstu do jednoho ze směrů x, y, z. O tom, že skutečně spojovací vektor $\Delta \boldsymbol{r}$ má směr od A do B se můžete přesvědčit pomocí sčítání s dalšími dvěma vektory. Na obrázku jsme nepoužili osy, neboť pro demonstraci změny nejsou potřeba.

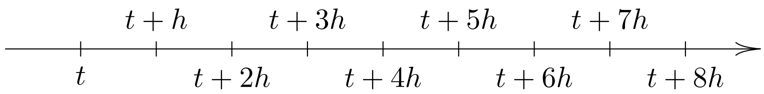
úloha se změnila na vektorovou a směrnice sečny s lze najít skrze

$$\bar{\boldsymbol{v}}(t,h) := k_s(t, t+h) = \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{t+h-t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h}.$$

Definovali jsme průměrnou rychlost $\boldsymbol{v}(\bar{t}, h)$ mezi časy t a $t+h$ jako vektorovou směrnici sečny skrze $\boldsymbol{r}(t)$ a $\boldsymbol{r}(t+h)$. Jaký má ale fyzikální význam? Průměrná rychlost udává informaci o tom, jakou konstantní rychlostí by bylo potřeba jet, abychom na úseku $(t, t+h)$ dosáhli stejné změny polohy.

Rychlost se ale v průběhu času může měnit, tudíž není nejšťastnější přistupovat k ní skrze nějakou průměrovanou veličinu. Rádi bychom znali *okamžitou rychlost*, tedy veličinu, která nám v každém okamžiku t řekne, jak by se pohyb vyvíjel dál, kdyby se už neměnila (jen s touto představou totiž doopravdy umíme intuitivně pracovat – průměrná rychlost je pro nás nejpřirozenější na chápání, bohužel nedostatečná pro fyzikální popis).

Sir Isaac Newton přišel s myšlenkou, kde na místo jednoho časové úseku mezi t a $t+h$ bude měřit velké množství časových úseků, jak popisuje obrázek.



Na každém úseku lze změřit průměrnou rychlost a poskládat informaci o celkovém průběhu pohybu. Samozřejmě h se volí co nejmenší. Podívejme se na některé možnost časového vývoje rychlosti

OBRÁZEK NĚKDY ČASEM

Vidíme, že nejlepší možností je, když je h co nejmenší. Ideálně bychom rádi, aby $h = 0$, ovšem vidíme problém, neboť průměrná rychlost na úseku t až $t + 0$ není možné vyčíslit, průměrná rychlost potřebuje dva údaje, my v tomto případě dodáváme jednu jedinou. Řešením je zkoumat situaci na okolí $h = 0$, tedy pro nenulová h a sledovat, co se s průměrnou rychlostí děje, pokud h stále zmenšujeme. Tento proces známe z matematiky jako proces limity. Okamžitou rychlost tedy najednou není problém definovat skrze tuto limitu

$$\bar{v}(t) = \lim_{h \to 0} \bar{\boldsymbol{v}}(t,h) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h},$$

tento typ limity však z matematiky také známe. Jedná se o speciální limitu, jíž říkáme derivace a určuje tečnou přímku k nějakému grafu. Ve 3D se jedná opět o tečnou přímku, která specificky vybírá i budoucí vývoj trajektorie, tj. jedná se o směrnici jedné speciální tečny ke grafu 3D funkce

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t). \tag{vel}$$

značení $\boldsymbol{v}$ vybíráme z anglického ekvivalentu pro rychlost *velocity*.

Typickou úlohou fyziky může být sledování pohybu nějakého vzorku a následné zjištění jeho rychlosti. Kupříkladu míč hozený v tíhovém poli Země začne padat směrem k zemi (i Zemi ☺). Sledováním jeho polohy lze říci, že se lineárně mění jeho rychlost (v praxi se však jde opačnou cestou, jak uvidíme později).

Představme si nyní, že známe rychlost, ale neznáme polohu. Alfréd cestou z práce nasedl do auta a nechal svoji elektroniku přesně zapisovat informace o velikosti i směru rychlosti. Chce takto Vilfrédovi ztížit nalezení cesty k němu domů. Alfréd však ví, že rychlost je pouze derivace polohy, a tak se začne ptát: „Jakou polohu $\boldsymbol{r}(t)$ musím vzít, abych získal tuhle rychlost $\boldsymbol{v}(t)$ napříč celým časovým úsekem?“ Vilfréd ještě chvilku přemýšlí a pak si vzpomene, že se přece jedná o jednoduchou věc, proces opačný derivaci! Ví totiž, že pokud bude tento proces provádět na derivované funkci, dostane funkce původní, matematicky zapsáno

$$\text{proces opačný k derivaci na} \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right) = \boldsymbol{r}(t) + \text{konstanta},$$

přičemž ona konstanta Vilfrédovi zůstane, neboť ví, že pokud tu zderivuje, dostane vždy nulu – jinak řečeno: *Rychlost nezávisí na místě, kde se bod pohybuje.* Jak se konstanty zbavit? Mohl by zkusit nějak vhodně odečíst $\boldsymbol{r}$ ve dvou různých časech, potom se mu informace o $\boldsymbol{r}(t)$ neztratí, pokud bude znát polohu ve druhém čase $\boldsymbol{r}(t_0)$ – tu on ovšem zná! Ví, že Alfréd začal na svém parkovacím místě. Konstanta není na čase závislá, a tak se odečte.

Proces opačný k derivaci je hledání primitivní funkce. Newton ukázal, že rozdíl primitivních funkcí v daných časech souvisí s určitým integrálem, o němž se můžete dozvědět více v matematické kapitole (které se snad brzy schválí, prozatím se o tom pobavíme na přednášce). Můžeme tedy psát inverzní vztah k definici rychlosti

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t')\,\mathrm{d}t' = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t')\,\mathrm{d}t'.$$

Vstupní polohu obvykle značíme $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ a bývá zvykem psát ji na pravou stranu. Polohu tedy zjistíme ze vzorce

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{1.1}$$

Na Vilfréda si tak jeho hravý kolega jen tak nepřijde!

1.3 Druhá změna polohy – zrychlení

Představme si na chvíli, že se rychlost v čase mění a my máme její průběh $\boldsymbol{v}(t)$, jak jsme jej definovali coby časovou derivaci polohy v předchozí podkapitole. Analogicky bychom se mohli ptát nejen *Jak moc a do jakého směru se mění poloha?*, ale také *Jak moc a do jakého směru se mění rychlost?* Z hlediska matematiky neexistuje mezi polohou a rychlostí rozdíl, oba dva objekty jsou vektorové funkce s jednou proměnnou t. Pokud jsme tedy mohli derivovat polohu, abychom mohli zjistit rychlost, proč bychom nemohli derivovat rychlost, abychom získali rychlost k rychlosti?

Nebrání nám samozřejmě nic! Ví to i Vilfréd a rozhodl se dát Alfrédovi stejnou hádanku, totiž kde bydlí. Na rozdíl od Alfréda však neměřil časový průběh rychlosti, nýbrž podal Alfrédovi informaci o tom, jak se v průběhu času rychlost měnila, podal mu tedy informaci o *zrychlení*

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t), \tag{acc}$$

kde $\boldsymbol{a}$ pochází z anglického *acceleration*. Stejně lze formulovat i analogicky opačný přístup

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t')\ \mathrm{d}t'. \tag{1.2}$$

Ptát se můžeme ještě na to, jak určit polohu ze zrychlení. Alfréd to ví, a proto má i Vilfréd štěstí a jeho kamarád na párty dorazí správně. Situaci měl však trochu náročnější, protože musel navíc zjistit, jakou rychlostí se Vilfréd domů rozjel. Platí totiž

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t')\ \mathrm{d}t' = \boldsymbol{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\boldsymbol{v}_0 + \int\limits_{t_0}^{t'} \boldsymbol{a}(t'')\ \mathrm{d}t'' \right) \mathrm{d}t' = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 \Delta t + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{t'} \boldsymbol{a}(t'')\ \mathrm{d}t'' \mathrm{d}t',$$

vstupní informace nyní není pouze $\boldsymbol{r}_0$, ale navíc také $\boldsymbol{v}_0$. Interval $\Delta t = t - t_0$ zde symbolizuje celkovou dobu, po kterou se Vilfréd autem pohyboval. Vidíme, že fyzikální struktura výrazu říká: Jsem na původním místě $\boldsymbol{r}_0$, připočtu k němu konstantní pohyb rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ po dobu Δt, navíc přidám korekci směru a velikosti skrze zrychlení. Je dobré si hned od začátku na nejjednodušších příkladech zvykat, že budeme interpretovat jednotlivé výrazy ve vzorcích.

Tím naše práce se zrychlením však nekončí. Matematicky jsme řekli, že rychlost udává tečný směr na trajektorii a její velikost odpovídá nějaké průměrné rychlosti. Samotná matematická struktura derivace nám vytváří tečnou strukturu, a proto vektor rychlosti musí být nutně tečný k trajektorii. Vektor zrychlení by tak měl být tečný k jakési rychlostní trajektorii. To ovšem není něco, co by nás fyzikálně zajímalo, zajímá nás, zda se zachová tečná struktura na původní trajektorii $T = \{\boldsymbol{r}(\tau) : \tau \in (t_0, t)\}$. Pojďme tedy rozebrat trochu více definici zrychlení

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v(t) \frac{\boldsymbol{v}(t)}{v(t)} \right).$$

Prozatím jsme pouze v definici zrychlení upravili rychlost tím, že jsme ji vynásobili chytrou jednickou $v(t)/v(t)$ složenou z velikostí rychlostí $v(t) = \|\boldsymbol{v}(t)\|$. Než přejdeme k derivaci součinu, ke které směřujeme, podívejme se na vlastnosti vektoru $\boldsymbol{v}(t)/v(t)$. První, co by nás mělo zaujmout, je velikost vektoru, očividně je jednotková, neboť

$$\left\| \frac{\boldsymbol{v}(t)}{\|\boldsymbol{v}(t)\|} \right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}(t)\|} \|\boldsymbol{v}(t)\| = 1,$$

a to bez závislosti na čase. Vektor má stále stejnou velikost. Mění se v čase jeho směr? Vpravdě mění, ale stále je tečný k trajektorii. Našli jsme tedy tečný vektor k trajektorii s jednotkovou velikostí, který můžeme použít v každém čase t. Označme jej proto speciálně $\boldsymbol{e}_t(t) = \boldsymbol{v}(t)/v(t)$ – spondí index t zde neznačí čas, ale informace o tom, že se jedná o tečný vektor.

Nyní tedy můžeme přejít k oné derivaci součinu

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v(t)\boldsymbol{e}_t(t)\right) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{e}_t(t) + v(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}(t).$$

Doposud jsme neustále srovnávali funkční hodnoty, tj. funkce vyčíslené v čase t. Pokud předchozí rovnici zapíšeme pouze jako funkční rovnost (tj. rovnají se v každém t), bude mít tvar

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t},$$

postupně si zvykejme, že v zápisech není rozdíl, vždy je potřeba specifikovat interval, na němž rovnosti platí. Jedinou výjimkou je, pokud rovnost platí pro celý definiční obor, jako např. zde, není potřeba tento interval explicitně zmiňovat.

Informace o zrychlení jsou tedy dvě. Vidíme, že velikost tečného zrychlení, je časová derivace velikosti rychlosti. Nic víc tedy ke změně rychlosti nepotřebujeme. Označme tedy $\boldsymbol{a}_t = \dot{v}\boldsymbol{e}_t$, kde přecházíme k fyzikálnímu značení časové derivace tečkou. Normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_n = v\dot{\boldsymbol{e}}_e$. Zbývá nám určit velikost normálového zrychlení a jeho směr. Toto spočteme v samostatné podkapitole o normálovém zrychlení.

1.4 Třetí změna polohy – ryv

Nebude důležité pro naši přednášku.

1.5 Normálové zrychlení

Často se zmiňuje, že normálové zrychlení má ten směr a tu velikost, málokdy se však normálové zrychlení skutečně probere ve své největší kráse, proto se pokusíme tento matematický rozbor udělat co nejpečlivěji.

Je-li zadána křivka Γ, lze k ní v každém bode zkontruovat tečnou kružnici. Tyto tečné kružnice nazýváme *oskulační* a platí pro ně následující: Bod pohybující se po křivce Γ, který se zrovna nachází v bodě $\boldsymbol{r}_0$, se pohybuje s takovou rychlostí a normálovým zrychlením, jako kdyby se pohyboval po oskulační kružnici, která se křivky dotýká v bodě $\boldsymbol{r}_0$.

Ať už se bod pohybuje zrychleně či nikoliv, můžeme se na něj dívat, jako by se pohyboval po kružnici. Znamená to, že existuje pevný poloměr r a můžeme psát, že okamžitá rychlost tohoto bodu je

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-r\dot{\varphi}\sin(\varphi))^2 + (r\dot{\varphi}\cos(\varphi))^2} = r\dot{\varphi}.$$

Velikost celkového zrychlení lze určit ze vzorce (podrobnější výpočet necháváme na čtenáři)

$$a = \sqrt{\ddot{x} + \ddot{y}} = r\sqrt{\left(\ddot{\varphi}\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\dot{\varphi}^2\right)^2} = r\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

abychom určili, kolik je a_n, je potřeba určit a_t, které lze zjistit snadno. Konkrétně $a_t = \dot{v}$, tedy $a_t = r\ddot{\varphi}$, identifikujeme tento člen a získáme

$$r^2\ddot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}^4 = a^2 = a_t^2 + a_n^2 = r^2\ddot{\varphi}^2 + a_n^2,$$

odtud plyne jediný možný závěr při definici úhlové frekvence $\omega = \dot{\varphi}$

$$a_n = r\dot{\varphi}^2 = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}. \tag{1.3}$$

Zavedeme-li tedy oskulační kružnici o poloměru r, je velikost normálového zrychlení bodu, který se pohybuje po křivce Γ rychlostí v rovno v^2/r. Jaký je ale směr? Víme, že normálové zrychlení musí mít směr kolmý na rychlost, takových je však ve 3D prostoru nekonečně mnoho.

1.5.1 2D normálové zrychlení

Určení velikosti normálového zrychlení nám pomůže v mnoha případech, ovšem směr nám podává kompletní matematickou informaci o pohybu, proto jej nemůžeme vynechat z našich úvah. Je-li zadána poloha $\boldsymbol{r}(t)$, lze jednoduše vypočítat rychlost i zrychlení coby první a druhou derivaci tohoto vektoru.

Z definice rozkladu zrychlení do tečného a normálového víme, že

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v},$$

stále navíc uvažujeme, že r je konstantní a zkoumáme pohyb na oskulační kružnici. V kartézských souřadnicích lze psát

$$\begin{aligned} v_x &= -r\dot{\varphi}\sin(\varphi), \\ v_y &= r\dot{\varphi}\cos(\varphi), \end{aligned}$$

víme, že $v = \dot{\varphi}r$, zbývá nám už tedy pouze zrychlení, kde využijeme derivaci součinu

$$\begin{aligned} a_x &= -r\sin(\varphi)\ddot{\varphi} - r\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2, \\ a_y &= r\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - r\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2, \end{aligned}$$

tento výpočet jsme již ostatně ukázali v předchozím postupu, kde jsme hledali velikost a. Nyní lze spočítat skalární součin

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} &= r\sin(\varphi)\dot{\varphi}\left(r\sin(\varphi)\ddot{\varphi} + r\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2\right) + r\cos(\varphi)\dot{\varphi}\left(r\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - r\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2\right) = \\ &= r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^3 - r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\dot{\varphi}^3 = r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}, \\ \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2} &= \frac{r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{r^2\dot{\varphi}^2} = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}. \end{aligned}$$

Dosazením do vektorového vyjádření lze získat

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \begin{pmatrix} -r\ddot{\varphi}\sin(\varphi) \\ r\ddot{\varphi}\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi)\ddot{\varphi} - r\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 \\ r\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - r\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi)\ddot{\varphi} \\ r\cos(\varphi)\ddot{\varphi} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 \\ r\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix}.$$

Velikost tohoto vektoru je $a_n = r\dot{\varphi}^2$, což odpovídá předchozím výpočtům. Navíc však máme i směr zadaný v kartézských složkách vektoru pomocí polárních souřadnic. Abychom mohli zapsat výsledek jako velikost $\times$ směr, je potřeba získat jednotkový vektor ve směru normálového zrychlení

$$\boldsymbol{e}_n := \frac{\boldsymbol{a}_n}{a_n} = -\frac{1}{r\dot{\varphi}^2}\begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 \\ r\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

což je skutečně vektor o jednotkové velikosti, který bychom s trochou praxe skutečně očekávali, překvapivé je snad jedině znaménko mínus. Celkovým výsledkem je tedy normálové zrychlení

$$\boldsymbol{a}_n = -r\dot{\varphi}^2 \left(\cos(\varphi)\boldsymbol{e}_x + \sin(\varphi)\boldsymbol{e}_y\right), \qquad \text{(def. } \boldsymbol{a}_n\text{)}$$

kde jsme označili $\boldsymbol{e}_x$ resp. $\boldsymbol{e}_y$ coby jednotkový vektor ve směru x resp. y.

Zdůrazněme, že (x, y) rovina, o níž se zde bavíme, je rovina oskulační kružnice, která se během pohybu neustále mění.

1.5.2 3D normálové zrychlení

Nepotřebné pro účely přednášky, je potřeba zvládnout metodu určování oskulačních kružnic v závislosti na trajektorii – sám v tuto chvíli nevím, jak bych to udělal, aby to nebyl podfuk.

1.6 Speciální typy pohybů

Již bylo ukázáno, že pro obecný pohyb lze zadáním průběhu zrychlení $\boldsymbol{a}$ zjistit průběh rychlosti i polohy. Lze najít speciální typy pohybů, u nichž se pohybové rovnice velice zjednoduší. Připomeňme obecné vzorce

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t')\mathrm{d}t',$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t'} \boldsymbol{a}(t'')\mathrm{d}t''\mathrm{d}t'.$$

1.6.1 Rovnoměrný pohyb

Rovnoměrným pohybem máme na mysli takový pohyb, který není nijak ovlivňován vnějšími vlivy. Pokud není, očekáváme na základě naší moderní intuice, že na něj bude působit nulové zrychlení. Tento fakt je více podložen postuláty dynamiky hmotného bodu, konkrétně zákonem setrvačnosti. Pokládáme tedy $\boldsymbol{a} = 0$, odkud dostáváme

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_{t_0}^{t} 0 \ \mathrm{d}t = \boldsymbol{v}_0 + 0(t - t_0) = \boldsymbol{v}_0,$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0(t - t_0) + 0 = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0(t - t_0).$$

Dostáváme velikost podobné vzorce těm středoškolským pro rovnoměrný phoyb. Měli bychom si ještě uvědomit, že má-li se jednat o rovnoměrný pohyb, musí být nulové jak tečné, tak i normálové zrychlení. To znamená, že existuje taková vztažná soustava, v níž je $\boldsymbol{r}_0$ rovnoběžná k vektoru $\boldsymbol{v}_0$. Takovou referenční soustavou je např. taková soustava, která má počátek v $\boldsymbol{r}_0$.

Podívejme se, jaká je trajektorie našeho bodu. Máme zadány tři parametrické rovnice

$$x(t) = x_0 - v_x t_0 + v_x t,$$
$$y(t) = y_0 - v_y t_0 + v_y t,$$
$$z(t) = z_0 - v_z t_0 + v_z t,$$

kde jsme si rozepsali $v_i(t-t_0) = -v_i t_0 + v_i t$, abychom odlišili členy závisející na t a členy v čase konstantní. Víme, že rychlost konstantní, neboť $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0$, tudíž $x_0 - v_x t_0$ a další lze prohlásit za konstantní číslo. Struktura výrazu, jak vidíme, je přímka, bez ohledu volbu počátku.

S onou speciální volbou počátku však můžeme nalézt soustavu, kde $v_y = v_z = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, díky čemuž můžeme systém popisovat pouze skalárně, volba x_0, y_0, z_0 je libovolná. Volba y_0, z_0 pouze vybírá přímku ve 3D, na které se budeme pohybovat, zůstává nám tedy jediná pohybová rovnice

$$x(t) = x_0 + v_x \Delta t = x_0 + v_x(t-t_0).$$

Jelikož má rychlost pouze složku v_x, je zároveň $v_x = \|\boldsymbol{v}\| = v$. Zajímá-li nás uražená dráha tělesa, potom na přímce při rovnoměrném pohybu lze tuto dráhu najít coby $s = x - x_0 = \Delta x$. To nám přináší dvojici rovnic, kterou známe ze středních škol

$$\begin{aligned} v &= \text{const.}, \\ s &= v\Delta t, \end{aligned}$$

kde se často volí $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, tudíž $\Delta t = t - t_0 = t$.

1.6.2 Rovnoměrně zrychlené pohyby

Rovnoměrné zrychlený pohyb se vyznačuje tím, že jeho zrychlení je konstantní. Obecně rozlišujeme dva typy rovnoměrně zrychlených pohybů – lineární a rovinné. Ukážeme si, že pohyb po přímce není vždy to, co z konstantního zrychlení plyne.

Po vzoru obecné kapitoly lze najít rychlost a polohu bodu pro konstantní funkci $\boldsymbol{a}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t' = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}(t-t_0), \\ \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \big(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}(t'-t_0)\big)\,\mathrm{d}t' = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(t^2 - t_0^2) - \boldsymbol{a}t_0(t-t_0) = \\ &= \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0(t-t_0) + \boldsymbol{a}(t-t_0)\left(\frac{t+t_0}{2} - t_0\right) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(t-t_0)^2 \end{aligned}$$

Na první pohled je vidět, že směr rychlosti se může a nemusí měnit. Platí totiž rovnice $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\Delta t$, která říká, že změna rychlosti je dána zrychlením. Tedy pokud by např. zrychlení bylo kolmé na vstupní rychlost $\boldsymbol{v}_0$, bude i Δv muset být kolmé na $\boldsymbol{a}$, tzn. $\boldsymbol{v}(t) \nparallel \boldsymbol{v}_0$. Pohyb je tak rovinný a neprobíhá po přímce.

Existuje možnost, kdy bude pohyb probíhat po přímce? Pokud $\boldsymbol{v}_0 \parallel \boldsymbol{a}$, poté i $\Delta\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{a}$, odkud plyne $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{v}_0$ v libovolném čase t. Je-li tedy zrychlení a vstupní rychlost stejného směru, pohybu se bod po přímce. V tomto případě lze opět zavést známé vzorečky ze střední školy položením $t_0 = 0$

$$v = v_0 + at, \tag{1.4}$$

$$s = x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.5}$$

1.7 Složitější příklady pohybů

Nemám tušení, co jsem původně myslel, že tady bude... No, třeba si vzpomenu. ☺