Kapitola 1

Křivkový integrál

1.1 Křivkový integrál prvního druhu

Možná jste se už někdy ve fyzice setkali s problémem, kdy bylo třeba sečíst příspěvky k jisté veličině, které byly rozloženy podél určité čáry. Čarou přirozeně míníme jedno-dimenzionální spojitý útvar[1], rozprostírající se v prostoru nebo na ploše[2]. Typickým příkladem je určení hmotnosti nehomogenního lana, které leží nepravidelně zkroucené na palubě Sindibádovy lodi. Jelikož má lano nehomogenní hustotu, musíme užít metod integrálního počtu. To však není jediná komplikace. Jsme zvyklí, že standardní (Riemannův) integrál funguje dobře pro funkce jedné proměnné, nebo případně funkci více nezávislých proměnných. V našem případě ale chceme integrovat přes více proměnných, které nejsou nezávislé. Proměnnými jsou souřadnice bodů lana a vzájemná závislost souřadnic odráží ten fakt, že lano není natažené podél žádné osy. V takovém případě musíme pro výpočet použít tzv. *křivkový integrál prvního druhu.*

Metodu výpočtu demonstrujeme v praxi. Nechť je problém položen takto:

Vypočítejte hmotnost lana M, které je obtočené okolo stožáru lodi, víte-li, že délková hustota, ϱ, lana je dána funkčním předpisem $\varrho(x, y) = \kappa \cdot x^2 \cdot y^4$ a stožár má základnu kruhového tvaru s poloměrem $3m$. Souřadnice bodů lana jsme označili x a y, symbol κ představuje konstantu, jejíž hodnota v základních jednotkách SI je rovna jedné. Předpokládejte také, že se počátek souřadnic nachází ve středu stožáru.

Řešení takového problému učiníme ve dvou krocích.

Krok 1: K výpočtu křivkového integrálu musíme, pochopitelně, dobře znát cestu, podél níž budeme sčítat elementární (tzv. *infinitezimální*) hmotnostní příspěvky. Znát cestu znamená mít jasno, jak vypadá její obecná rovnice nebo parametrické vyjádření[3]. Protože lano obepíná stožár, je hledanou čarou kružnice. Jak víme, obecná rovnice kružnice (se středem v počátku) na ploše je

[1] Takový útvar splňující několik rozumných požadavků je speciálním případem objektu, kterému odborně říkáme *varieta*, nebo anglicky *manifold*.

[2] Nebo obecněji, ve více-dimenzionálním Euklidově prostoru.

[3] I když podle Buddhy znamená *znát cestu* něco poněkud jiného.

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{1.1}$$

kde r je poloměr kružnice, v našem případě tedy $3\ \mathrm{m}$. Jak uvidíme dále, důležitější pro nás bude parametrické vyjádření takové kružnice. Můžeme se snadno přesvědčit, že parametrické vyjádření kružnice je soustava

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin t \\ y &= r \cdot \cos t \end{aligned} \tag{1.2}$$

Naším (bezrozměrným) parametrem je t a je přirozené se ptát, jakých hodnot nabývá. Úkolem je získat všechny body kružnice právě jednou. Vhodnou volbou intervalu je tedy $[0, 2\pi]$. Každý větší interval by díky 2π-periodicitě obou goniometrických funkcí kódoval nějaký již dříve zakódovaný bod. V dalším zkusíme diskutovat i tyto případy a jejich význam. Parametrickému vyjádření cesty společně s intervalem hodnot, kterých parametr nabývá, říkáme *křivka*.

Krok 2: Uvědomme si, že znalost parametrické závislosti souřadnic nám dovolí vyjádřit parametrickou závislost libovolné veličiny, která explicitně závisí na souřadnicích. Toto pozorování konkrétně upotřebíme pro parametrizaci naší hustotní funkce ϱ. Když za jednotlivé souřadnice dosadíme příslušné funkce parametru, dostaneme funkci

$$\varrho(t) = \kappa \cdot r^6 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^4 t. \tag{1.3}$$

Pokud by se nám nyní podařilo vyjádřit infinitezimální příspěvek hmotnosti $\mathrm{d}\, m$ v závislosti na hodnotě parametru, stačilo by provést jednoduchou substituci $m \longrightarrow m(t)$, která by výpočet křivkového integrálu efektivně převedla na jednorozměrný určitý (Riemannův) integrál, poněvadž lze psát

$$M = \int_0^M \mathrm{d}\, m = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\, m(t). \tag{1.4}$$

My však dokážeme napsat velmi jednoduchý vztah mezi hmotnostním přírůstkem a délkovou hustotou. Tím převodním vztahem jest $\mathrm{d}\, m = \varrho \mathrm{d}\, l$, kde $\mathrm{d}\, l$ značí délkový přírůstek lana. Jediné, co zbývá zjistit, je závislost přírůstku délky lana na parametru. To však dostáváme rovnou z Pythagorovy věty. Pro infinitezimální přírůstek $\mathrm{d}\, l$ platí [4]

$$[\mathrm{d}\, x(t)]^2 + [\mathrm{d}\, y(t)]^2 = [\mathrm{d}\, l(t)]^2. \tag{1.5}$$

A po provedení derivace (respektive diferenciace) funkce

$$\left(\frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}\, t}\right)^2 (\mathrm{d}\, t)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t}\right)^2 (\mathrm{d}\, t)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\, l(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 (\mathrm{d}\, t)^2, \tag{1.6}$$

[4] Druhá mocnina u diferenciálů ve skutečnosti má dobrý smysl jedině jako tzv. *tenzorová mocnina*, uvedený vztah potom pojednává o tvaru tzv. *metrického tenzoru*.

což si ještě upravíme na tvar [5]

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t}\right)^2}=\frac{\mathrm{d}\,l(t)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1.7}$$

S využitím tohoto vztahu můžeme napsat sérii rovností

$$\mathrm{d}\,m(t)=\frac{\mathrm{d}\,m(t)}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{d}\,t=\varrho(t)\frac{\mathrm{d}\,l(t)}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{d}\,t=\varrho(t)\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t}\right)^2}\mathrm{d}\,t. \tag{1.8}$$

Dosazením do integrální formule pro hmotnost lana tak konečně získáváme explicitní vzorec

$$M=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,m(t)=\int_0^{2\pi}\varrho(t)\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t}\right)^2}\mathrm{d}\,t. \tag{1.9}$$

Nyní již máme nejtěžší část příkladu za sebou, zbývá jen jako laskomina dopočítat výše uvedený jednorozměrný integrál. Nejprve zderivujeme parametrickou závislost souřadnic.

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}&=r\cdot\cos t\\ \tfrac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t}&=-r\cdot\sin t\end{aligned} \tag{1.10}$$

Když do integrálu dosadíme, dostaneme jej v následující podobě

$$M=\int_0^{2\pi}\kappa\cdot r^6\cdot\sin^2 t\cdot\cos^4 t\cdot\sqrt{(r\cdot\cos t)^2+(-r\cdot\sin t)^2}\mathrm{d}\,t. \tag{1.11}$$

Při použití několika málo úprav a dosazení číselných hodnot za konstantní veličiny nám vychází

$$M=\left(\int_0^{2\pi}3^7\cdot\sin^2 t\cdot\cos^4 t\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{kg}. \tag{1.12}$$

Tento integrál lze skutečně dopočítat (přenecháváme jako cvičení), výsledkem je

$$M=\frac{3^7\pi}{8}\mathrm{kg}\doteq 859\mathrm{kg}. \tag{1.13}$$

K výpočtu a terminologii připojme ještě pár poznámek. Všímavý čtenář by mohl namítnout, že ve výpočtu jsme pracovali s něčím, co neslo bohatější informaci o kružnici než je jen její geometrická podstata. Při volbě parametrizace jsme měli de-facto širokou libovůli, jelikož existuje nepřeberné moře parametrizací kružnice, které nejsou o nic horší nebo lepší než naše volba. Příkladně bychom si mohli zvolit parametrizaci

[5] Rovnost diferenciálů je ekvivalentní rovnosti jejich funkčních prefaktorů, zvaných *souřadnice diferenciálu.*

$$x = r \cdot \sin 2t$$
$$y = r \cdot \cos 2t \tag{1.14}$$

a zároveň zkrátit interval pro parametr t na polovic, tedy na $[0, \pi]$. Otázka nyní je, změní to výsledek našeho počítání? Projeví se změna parametrizace křivky (tzv. *reparametrizace*[6]) na našem výsledku? V tomto jednoduchém případě změny parametrizace vidíme, že nám to výsledek neovlivní (vyzkoušejte si sami!), dokonce ale ani v obecném případě výsledek dotčen nebude. Tomuto tvrzení říkáme *reparametrizační invariance křivkového integrálu prvního druhu.* Tvrzení je poměrně netriviální k dokázání, proto je tu zmiňujeme bez důkazu. Pokud lze dvě křivky vzájemně převést pomocí reparametrizace, říkáme jim *(reprametrizačně) ekvivalentní.* Každá množina všech vzájemně ekvivalentních křivek se pak nazývá *třída ekvivalence.*

Poslední poznámka bude mířit opět na vztah mezi křivkou a geometrickým objektem. Chápeme už, že geometrický objekt můžeme poměrně svobodně parametrizovat, otázkou však nyní je, jestli každý geometrický útvar určuje právě jednu třídu ekvivalentních křivek. Zdá se, že ano, ale je tu malý háček. Pokud bychom například zvolili vícenásobné navinutí, geometrický obraz by to nezměnilo, ačkoliv bychom dostali jinou třídu ekvivalentních křivek. V řeči našeho příkladu by to odpovídalo zadání, kdy lano obtočíme okolo stožáru vícekrát. Intuice s lanem nám napovídá, že by to mělo změnit výsledek počítání, a to právě tolikrát, kolikrát lano obtočíme. Dává nám vybudovaný aparát křivkového integrálu toužebně očekávaný výsledek? Ano! Přesvědčete se sami, že pokud lano obtočíme třeba dvakrát, meze integrálu se nafouknou dvakrát (interval bude $[0, 4\pi]$) a výsledek se taktéž zvětší dvakrát[7].

1.2 Křivkový integrál druhého druhu

Cílem tohoto studijního textu je sblížit čtenáře s křivkovým integrálem druhého druhu. Pro jeho zavedení si opět pomůžeme jistým význačným příkladem. Jak už je cítit ve vzduchu, budeme opět shromažďovat jistou infinitezimální kvantitu rozmístěnou podél dané cesty. Tentokráte kvantitu nebudeme mít k dispozici rovnou (jako jsme měli hustotu v každém bodě lana), nýbrž si ji budeme muset odpracovat. Hezkým příkladem na použití křivkového integrálu druhého druhu je výpočet práce silového pole. Příklad by mohl vypadat asi takto.

Nechť v prostoru existuje silové pole $\boldsymbol{F}$, jakožto vektorové pole (vektorová funkce více proměnných) dané předpisem $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \kappa \cdot (y, 3x - z, z)$. Určete, jakou práci vykoná silové pole na hmotném bodu, pokud je hmotný bod přemístěn po trajektorii s parametrickým vyjádřením $x = \alpha \cdot t; y = \beta \cdot t^2; z = -\gamma \cdot t^4$ v rozmezí hodnot parametru $[-1, 1]$. Všechny rozměrové konstanty $(\alpha, \beta, \gamma, \kappa)$ nabývají při vyjádření v soustavě SI hodnoty jedna.

Řešení si opět rozdělíme do dvou kroků.

[6] Obecná reparametrizace ($t \to \tilde{t}$, $[t_1, t_2] \to [\min\{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2\}, \max\{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2\}]$) je dána rovnicí $g(t) = h(\tilde{t})$ a podmínkou $g(t_1) = h(\tilde{t_1})$ a $g(t_2) = h(\tilde{t_2})$, kde g, h jsou na intervalech parametrů prosté funkce.

[7] Pro ověření počtů jen uveďme, že primitivní funkce ke studovanému integrandu je $\int \sin^2 t \cos^4 t \mathrm{d}\, t = \frac{1}{16}t + \frac{1}{64}\sin 2t - \frac{1}{64}\sin 4t - \frac{1}{192}\sin 6t$.

Krok 1: V prvé řadě si musíme uvědomit, proč jsme v jiné situaci než dříve, a co naopak zůstává stejné jako u křivkového integrálu prvního druhu. Stejně jako v předchozím případě je důležité znát parametrický popis trajektorie, který společně s intervalem hodnot definuje křivku. Stejně jako dříve se budeme snažit převést křivkový integrál na jednorozměrný Riemannův integrál. Na rozdíl od předchozího nám v každém bodě na trajektorii „sedí“ vektor, což nám znemožňuje pokračovat naučeným postupem. Pokud by někoho napadlo, že bychom sčítali celé vektory, tak to bohužel nejsme schopni, jelikož se ukazuje, že nedokážeme bez dodatečné struktury[8] srovnávat vektory „sedící“ v různých bodech prostoru.

Pokud odhlédneme od fyzikální motivace zavedení pojmu práce přes křivkový integrál druhého druhu, a budeme se soustředit jen na matematicky konzistentní zavedení, bude naším cílem najít univerzální způsob přechodu od vektorového pole podél křivky k poli skalárnímu [9]. Pokud se nám to povede, budeme mít dobrou šanci postupovat technikami již dříve naučenými z části věnované křivkovému integrálu prvního druhu. Určitě by nás napadlo mnoho různých způsobů, ale pro matematiky je vždy podstatné, aby takový postup nedával různé výsledky křivkového integrálu pro různé volby souřadnic. Proto se vymyslelo, že by mohl být vhodný způsob převedení vektoru na číslo skalární součin. Má to ale jednu vadu, ke skalárnímu součinu potřebujeme vektory dva. Pokud bychom skalárně vynásobili vektor sám se sebou, neměli bychom problém příklad dopočíst, úplně bychom ale ztratili informaci o orientaci vektorů vektorového pole. Aby byla orientace vektorů podél křivky zohledněna, pokusíme se vylovit druhý vektor z tajemna křivky samotné.

K tomuto nám matematici dali návod, budeme hledat tzv. *tečné vektorové pole* k zadané křivce. V každém bodě křivky tak budeme mít k dispozici jeden *tečný vektor*. Vektoru říkáme tečný k dané křivce tehdy, když jeho směr souhlasí s tečnou přímkou vedenou k tomuto bodu křivky[10]. Když si však vzpomeneme na geometrický význam derivace, nebude nás tolik překvapovat, že tečný vektor ke křivce se najde právě využitím derivace. Naši geometrickou představu musíme jen přesunout do více rozměrů. Tečný vektor se bude rozkládat do jednotlivých směrů přesně v poměru přírůstků příslušných souřadnic při infinitezimální změně parametru. Poměr velikostí kartézských komponent tečného vektoru je tedy přesně poměrem derivací souřadnic podle parametru. Navíc platí, že velikost tečného vektoru je koeficient úměry mezi přírůstkem délky křivky a infinitezimální změnou parametru. Jen pro zopakování, tímto koeficientem je ve dvourozměrném případě funkce daná rovnicí (1.7), což do případu tří rozměrů zobecníme přidáním třetího čtverce derivované souřadnice. Vidíme tedy, že jednotlivé komponenty tečného vektoru $\boldsymbol{v}_t \equiv \boldsymbol{v}(t)$[11] musí při dostání zmíněných podmínek[12] nutně nabývat tvaru

$$\boldsymbol{v}_t = \left(\frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}\, t}, \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t}, \frac{\mathrm{d}\, z(t)}{\mathrm{d}\, t} \right). \tag{1.15}$$

Nyní jsme připraveni vyrobit si vlastní tečné vektorové pole. Použijeme k tomu křivku ze zadání. Po krátkém derivování zjistíme, že naše tečné vektorové pole $\boldsymbol{w}$ vypadá takto:

[8] Takové struktuře v prostoru se říká *konexe*. Ta nám slouží k přenosu vektorů napříč prostorem, technicky řečeno, k *paralelnímu přenosu*

[9] Skalární pole je pro naše účely reálná funkce více reálných proměnných.

[10] Tečna ke křivce v bodě, jež odpovídá parametru t_0, je lineární křivka (souřadnice jsou až na reparametrizaci lineární funkcí parametru), která má do prvního řádu Taylorova rozvoje parametrických funkcí souřadnic okolo bodu t_0 stejné hodnoty koeficientů jako původní křivka.

[11] Tento zápis nám říká, že jsme si označili symbolem $\boldsymbol{v}_t$ vektor, který je obrazem tečného vektorového pole v bodě t.

[12] Tyto podmínky jsou přirozeně splněny, pokud na tečný vektor nahlížíme jako na tzv. *tečné zobrazení*.

$$\boldsymbol{w}(t) = (\alpha, \beta \cdot 2t, -\gamma \cdot 4t^3). \tag{1.16}$$

Jedná se o vektorové pole, chcete-li, tak vektorovou funkci jedné reálné proměnné. Pro každou hodnotu parametru t získáme jednoznačně tečný vektor vektorového pole tak, že do předpisu vektorového pole dosadíme danou hodnotu parametru.

Krok 2: Nyní už máme k dispozici tečné vektorové pole, ve druhém kroku nás už nečeká žádná velkolepá myšlenka, jen zužitkujeme nabyté informace.

Abychom mohli skalárně vynásobit dva vektory, musí nám „sedět“[13] ve stejném bodě na křivce. Je zřejmé, že v bodě $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ „sedí“ tečný vektor $\boldsymbol{w}(t_0)$, jaký tu ale „sídlí“ vektor silového vektorového pole? Stejně jako v případě křivkového integrálu prvního druhu platilo, že jakmile jsme si parametrizovali křivku, tak jsme byli sto parametrizovat libovolnou veličinu závislou na souřadnicích, tak i tady dokážeme parametrizovat silové vektorové pole, které vede podél naší křivky. Po dosazení funkcí parametru na místa souřadnic dostáváme parametrické vyjádření silového vektorového pole

$$\boldsymbol{F}(t) \equiv \boldsymbol{F}(x(t), y(t), z(t)) = \kappa \cdot (\beta \cdot t^2, 3 \cdot (\alpha \cdot t) + \gamma \cdot t^4, -\gamma \cdot t^4). \tag{1.17}$$

Tedy v bodě t_0 máme vektor silového vektorového pole

$$\boldsymbol{F}(t_0) = \kappa \cdot (\beta \cdot t_0^2, 3 \cdot (\alpha \cdot t_0) + \gamma \cdot t_0^4, -\gamma \cdot t_0^4). \tag{1.18}$$

Vidíme, že v bodě t_0 (a v jakémkoliv jiném bodě křivky také – opět upustíme od indexu nula) nám nic nebrání provést skalární součin. Tedy

$$\boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{w}(t) = \kappa \cdot (\beta \cdot t^2, 3 \cdot (\alpha \cdot t) + \gamma \cdot t^4, -\gamma \cdot t^4) \cdot (\alpha, \beta \cdot 2t, -\gamma \cdot 4t^3). \tag{1.19}$$

Po vynásobení dostáváme kýženou funkci jedné reálné proměnné

$$\boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{w}(t) = \kappa \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot t^2 + (\alpha \cdot \beta \cdot 6t^2 + \gamma \cdot \beta \cdot 2t^5) + \gamma^2 \cdot 4t^7). \tag{1.20}$$

Ve finále výsledky skalárních součinů podél křivky sečteme, na což budeme potřebovat integrál. Formulka pro výpočet práce tedy vypadá

$$W = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{w}(t) \mathrm{d}\, t = \left(\int_{-1}^{1} (t^2 + 6t^2 + 2t^5 + 4t^7) \,\mathrm{d}\, t \right) \mathrm{J}. \tag{1.21}$$

Když si dáme tu práci a integrál spočteme, vyjde nám luxusních

$$W = \frac{14}{3} \mathrm{J}. \tag{1.22}$$

[13] Abychom pořád neopakovali to infantilní „sedět ve stejném bodě“, můžeme použít přesnější vyjádření „náležet do stejného tečného prostoru“.

Vidíme, že pokud by měl parametr t význam času (což, jak již chápeme, nemusí), tak tečné vektorové pole přesně odpovídá vektorovému poli okamžitých rychlostí hmotného bodu. Zcela stejný vzoreček pro práci jsme už potkali ve studijním textu Práce a energie, srovnej! V tomto studijním textu jsme na vzoreček pro práci přišli z matematické strany, kdy jsme jej dostali jen jako speciální parametrizaci při výpočtu křivkového integrálu druhého druhu.

Závěr bude patřit diskuzi o tom, jestlipak platí reparametrizační invariance i pro křivkový integrál druhého druhu. Trochu tušíme, že by se nám ve fyzice pro definici konzervativního silového pole hodilo, aby invariance splněna nebyla. Ano, jako fyzikové bychom si přáli, aby *převrácená parametrizace*[14] trajektorie dávala opačné znaménko křivkového integrálu. To bychom pak mohli použít trik u zavedení konzervativního pole tak, jak je uvedeno ve studijním textu Práce a energie.

Reparametrizační neinvarianci pro křivkový integrál druhého druhu si dokážeme na předešlém příkladě[15].

Zavedeme nový parametr l, který bude s naším starým parametrem t svázán vztahem $t = -l$. Naše nová parametrizace bude tedy vypadat následovně.

$$x = \alpha \cdot (-l); y = \beta \cdot (-l)^2; z = -\gamma \cdot (-l)^4. \tag{1.23}$$

Takováto reparametrizace jistě nezmění interval hodnot, kterých bude parametr nabývat, opět se tedy jedná o interval $[-1, 1]$. Tvrdíme, že pro takovouto parametrizaci dostaneme opačný výsledek křivkového integrování. Podívejme se na to tedy zblízka.

Tečný vektor $\boldsymbol{v}(l)$ v bodě l bude mít tyto hodnoty komponent

$$\boldsymbol{v}(l) = (-\alpha, \beta \cdot 2l, -\gamma \cdot 4l^3). \tag{1.24}$$

Parametrizace silového vektorového pole podél křivky dopadne takto:

$$\boldsymbol{F}(l) = \kappa \cdot (\beta \cdot (-l)^2, 3 \cdot (\alpha \cdot (-l)) + \gamma \cdot (-l)^4, -\gamma \cdot (-l)^4). \tag{1.25}$$

Součin vektorů tedy vypadá následovně:

$$\boldsymbol{F}(l) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}(l) = \kappa \cdot (\beta \cdot (-l)^2, 3 \cdot (\alpha \cdot (-l)) + \gamma \cdot (-l)^4, -\gamma \cdot (-l)^4) \boldsymbol{\cdot} (-\alpha, \beta \cdot 2l, -\gamma \cdot 4l^3). \tag{1.26}$$

Tedy

$$\boldsymbol{F}(l) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}(l) = \kappa \cdot (-\alpha \cdot \beta \cdot l^2 + (-\alpha \cdot \beta \cdot 6l^2 + \beta \cdot \gamma \cdot 2l^5) + \gamma^2 \cdot 4l^7). \tag{1.27}$$

Dosazením do integrálu

[14] Převrácená parametrizace je taková parametrizace, která se vzrůstající hodnotou parametru probíhá trajektorii v opačném směru než diktuje parametrizace původní. Jak snadno nahlédneme, jde o speciální případ reparametrizace.

[15] Ukazuje se ale, že převrácená parametrizace je jediná reparametrizace, na kterou je výsledek křivkového integrálu citlivý.

$$W = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{F}(l) \cdot \boldsymbol{v}(l)\mathrm{d}l = \left(\int_{-1}^{1} (-l^2 - 6l^2 + 2l^5 + 4l^7)\mathrm{d}l \right) \mathrm{J}. \tag{1.28}$$

A skutečně!

$$W = -\frac{14}{3}\mathrm{J}. \tag{1.29}$$

Z toho tedy vidíme, že pokud probíháme křivku opačným směrem, vyjde nám opačná hodnota křivkového integrálu druhého druhu. Ve fyzikální hantýrce bychom řekli, že znaménko práce silového pole na hmotný bod po trajektorii závisí na tom, v jakém směru hmotný bod trajektorii překonává. Ve fyzice to zní logicky, když gravitační síla uvádí hmotný bod do pohybu, směr jeho pohybu bude souhlasný se směrem působení silového pole. Gravitační pole bude konat kladnou práci, která se projeví jako kladný přírůstek kinetické energie hmotného bodu. Analogicky v případě brždění. Ale to už je fyzikální pohádka...

Shrnutí

1. Tří-dimenzionální křivkový integrál prvního druhu je definován:

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{s})\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_a^b f(t)\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t, \tag{1.30}$$

   kde trajektorie $\mathcal{C}$ je popsána parametricky pomocí trojice souřadných funkcí parametru t: $(x(t), y(t), z(t))$. Počáteční bod trajektorie $\mathcal{C}$ je $(x(a), y(a), z(a))$, koncový bod $(x(b), y(b), z(b))$.

2. Tří-dimenzionální křivkový integrál druhého druhu je definován:

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}(\mathbf{s}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(t) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t, \tag{1.31}$$

   kde trajektorie $\mathcal{C}$ je popsána parametricky pomocí trojice souřadných funkcí parametru t: $(x(t), y(t), z(t))$. Počáteční bod trajektorie $\mathcal{C}$ je $(x(a), y(a), z(a))$, koncový bod $(x(b), y(b), z(b))$.