3. Mechanika více hmotných bodů

Mechanika jednoho hmotného bodu probraná v předcházejících kapitolách se stala velice jednoduchou se zavedením infinitesimálního počtu do fyzikálního zkoumání přírody. Dalším krokem je ukázat, že při existenci mnoha hmotných bodů se stává situace složitější, avšak stále lze řešit jednoduchým diferenciálním počtem.

3.1 Soustava hmotných bodů

Kinematika hmotných bodů je velice transparentní. Každému hmotnému bodu lze přiřadit jeho trajektorie daná časovou závislostí polohy $\boldsymbol{r}_i$. Pro každý bod následně musí platit Newtonovy dynamické zákony. Pokud tedy na i. bod působí síla $\boldsymbol{F}_i$, lze zapsat veškeré zákony ve tvaru

$$\boldsymbol{F}_i\left(\boldsymbol{r}_j(t), \dot{\boldsymbol{r}}_j(t), t\right) = \dot{\boldsymbol{p}}_i(t),$$

přičemž síla působící na i. bod je závislá na polohách a rychlostech všech ostatních bodů. Pro N bodů se tak jedná o N vektorových rovnic, tj. $3N$ rovnic skalárních. Ty udávají evoluci systému, navíc je potřeba zadat počáteční polohy a rychlosti všech částic.

Bez ohledu na to, jak neefektivní tento popis je pro mnoho částic ve skutečných mikroskopických teoriích, lze jej efektivně používat pro soustavu dvou bodů, která dostatečně reprezentuje tuhé těleso, má proto smysl bavit se o obecných pravidlech pro soustavy i z jiného než filosofického hlediska.

3.2 Impulsové věty

Celková hybnost soustavy je součet hybností všech bodů, které soustavu tvoří,

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i.$$

3.2.1 První impulsová věta

Dalším cílem je nalézt zákon, který bude analogický Newtonově dynamickým zákonům, tentokrát však pro celou soustavu. Hlavní myšlenkou následujícího postupu je, že síla působící na i. bod lze rozložit na sílu interní (působí mezi dvěma body soustavy) a externí (nepochází od žádného jiného bodu soustavy, ale odněkud z venčí). Na i. bod působí všechny ostatní body soustavy interní silou, tu lze ještě navíc rozložit na sílu mezi i. a j. bodem, ta se označí $\boldsymbol{F}^{\mathrm{I}}_{ij}$. Externí síla působící na i. bod je značena $\boldsymbol{F}^{\mathrm{E}}_i$. Celková interní síla působící na i. bod má tvar

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{I}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \boldsymbol{F}^{\mathrm{I}}_{ij},$$

díky čemuž lze již přímočaře zapsat časovou evoluci systému[1]

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{E}}\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\boldsymbol{F}_{ij}^{\mathrm{I}} + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{E}}.$$

Pro síly platí $\boldsymbol{F}_{ij}^{\mathrm{I}} = -\boldsymbol{F}_{ji}^{\mathrm{I}}$, veškeré příspěvky vnitřních sil odečtou[2] a na pravé straně zůstane pouze síla externí. Součet všech externích sil lze označit za celkovou externí sílu $\boldsymbol{F}^{\mathrm{E}}$ a lze zapsat *první impulsovou větu*

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{E}}, \tag{1. Impuslová věta}$$

dynamiku celkové hybnosti tak udávají pouze síly působící na těleso z vnějšku, nikoliv síly vnitřní.

3.2.2 Druhá impulsová věta

Pro odvození druhé věty impulsové je potřeba zavést moment síly $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ a moment setrvačnosti $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Tyto veličiny jsou závislé na volbě referenční soustavy, která je zvolena.

Např. pro pohyb po kružnici je $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ i $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$ měnící svůj směr a to tak, že vektor $\boldsymbol{L}$ je vždy kolmý na rovinu kružnice, jeho velikost je pak $L = rp$, neboť $\boldsymbol{r}(t) \perp \boldsymbol{p}(t)$ v každém čase t.

Pro jeden hmotný bod lze zapsat Newtonovy dynamické rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \dot{\boldsymbol{p}}, \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}}, \\ \boldsymbol{M} &= \dot{\boldsymbol{L}}, \end{aligned}$$

kde jsme nalezli časovou změnu momentu hybnosti $\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}}$, první ze členů vypadne, neboť $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{p}$, tedy $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ a skutečně platí $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}}$.

Pro momenty tedy platí analogická rovnice Newtonově pohybové rovnici. Na rozdíl od ní, která říká, že časová změna hybnosti je dána působící silou, říká, že časová změna momentu hybnosti je dána momentem síly. Pokud tak šla formulovat první impulsová věta pro soustavu hmotných bodů, jež je analogií druhého Newtonova dynamického zákona, nešla by formulovat druhá impulsová věta mluvící o momentech síly a hybnosti?

Situace je díky vektorovému součinu o trochu komplikovanější. Postup je nicméně stejný jako při odvozování první věty

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{E}} + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\boldsymbol{F}_{ij}^{\mathrm{I}}\right) = \sum_{i=1}^{N}\overbrace{\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{E}}}^{\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{E}}} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}^{\mathrm{I}}.$$

Získaný vztah ještě není konečný. Ve dvojitém součtu interních sil na pravé straně se objevují vždy příspěvky typu $\boldsymbol{F}_{mn}$ a následně i příspěvky typu $\boldsymbol{F}_{nm}$, které jsou vzájemně opačného směru, tj. $\boldsymbol{F}_{mn} = -\boldsymbol{F}_{nm}$.

[1] Připomeňme, že derivace konečného součtu je součet derivací jednotlivých sčítanců, tj. $(f+g)' = f' + g'$.
[2] Rovnost $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ víme z třetího Newtonového zákona akce-reakce.

U první impulsové věty to znamenalo odečtení veškerých sil bez ohledu na jejich vlastnosti. Nyní však budou v součtu prvky $\boldsymbol{F}_{mn}$ spolu s vektorem $\boldsymbol{r}_m$, ale $\boldsymbol{F}_{nm}$ budou stát za vektorem $\boldsymbol{r}_n$. Toto lze využít a zapsat

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{N}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}.$$

Ujistěme se, že jsme neudělali žádnou zásadní chybu. Zkusme si vypsat členy levé strany

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{11}+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{13}+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{14}+\cdots+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{1N}+&\\ +\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{22}+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{23}+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{24}+\cdots+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{2N}+&\\ \vdots\qquad\qquad&\\ +\boldsymbol{r}_N\times\boldsymbol{F}_{N1}+\boldsymbol{r}_N\times\boldsymbol{F}_{N2}+\boldsymbol{r}_N\times\boldsymbol{F}_{N3}+\boldsymbol{r}_N\times\boldsymbol{F}_{N4}+\cdots+\boldsymbol{r}_N\times\boldsymbol{F}_{NN}&\end{aligned}$$

kde přidáváme i členy typu $\boldsymbol{F}_{ii}$, které ale pokládáme rovny nule. Nyní lze členy jednoduše přeuspořádat, vezmeme si $\boldsymbol{F}_{12}$ a k němu nalezněme $\boldsymbol{F}_{21}$, napíšeme

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{21}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{12}-\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{12}=(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{F}_{12},$$

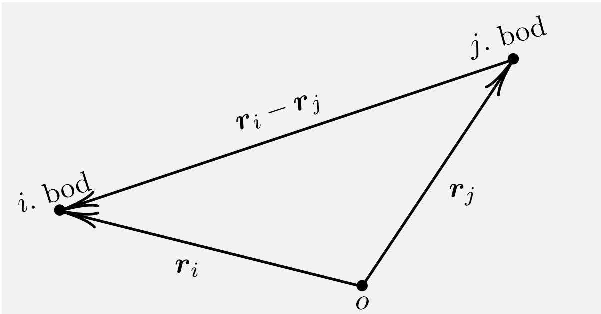
tato operace lze provést se všemi členy, které začíná $\boldsymbol{r}_1$, následně se všem, které začínají $\boldsymbol{r}_2$ atd. Získáme proto opět součet přes všechna i a přes $j>i$, neboť členy s $j<i$ jsou již zahrnuty v předchozím součtu. Příkladem je, že již máme člen $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{F}_{23}$, a tudíž již nebudeme hledat člen $(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{F}_{32}$. To tedy znamená

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{N}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}.$$

a úprava pro další práci při odvozování druhé impulsové věty je oprávněná.

Vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ je opět vektor, který je kolmý na oba dva působí vektory a jeho velikost je $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=ab\sin(\alpha)$, pokud spolu vektory svírají úhel α. Posloupnost vektorů $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ tvoří pravotočivou soustavu.

Kdy je tedy hodnota $(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}$ rovna nule? Je to tedy, jsou-li vektory rovnoběžné. Síla mezi i. a j. bodem tak musí být rovnoběžná se spojnicí obou bodů, působí tedy od středu jednoho bodu do středu bodu druhého. Takovým silám říkáme *síly centrální* a jen pro tyto centrální síly se obecně vynuluje dvojitá suma.



Obrázek 3.1: Dva hmotné body s označením i, j popsané vektory $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$, mají mezi sebou vektor $\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j$.

Druhá impulsová věta pak lze zapsat v kompaktním tvaru za zavedení celkového momentu síly $\boldsymbol{M}^{\mathrm{E}}=\sum\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{E}}$:

$$\text{Pro centrální síly platí } \dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{E}}, \qquad \text{(2. Impulsová věta)}$$

tj. moment hybnosti soustavy se mění dle zadaného vnějšího momentu síly a vnitřní moment sil nehrají roli, pokud jsou všechny interní síly centrální.

3.3 Hmotný střed

První impulsová věta velmi intuitivně definuje pojem hmotného středu. Celková hybnost $\boldsymbol{p}$ pořádá jen velmi redukovanou informaci. Výslednic všech externích sil, které na soustavu působí mění celkovou hybnost soustavy, tento dynamický zákon však neříká nic o tom, jak se pohybují jednotlivé body.

Existuje tedy jeden hmotný bod o libovolné hmotnosti μ, který by splnil Newtonovy dynamické zákony pro zadanou sílu $\boldsymbol{F}^{\mathrm{E}}$, která by působila jen na něj? Zkonstruovat takový bod není problém, neboť první impulsová věta říká

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{E}} = \dot{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i \right) = \mu \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i \right) = \mu \ddot{\boldsymbol{r}}_1$$

využili jsme triku, že pro hmotný bod platí $\dot{m}_i = 0$, pokud ze soustavy náhle nezmizí nebo se neobjeví. Předpoklad existence bodu o hmotnosti μ s časovým vývojem polohy $\boldsymbol{r}_1$ (poslední rovnost) nám ukazuje, jak musí vypadat časová evoluce takového bodu

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i(t).$$

Bod popsaný funkcí $\boldsymbol{r}_1$ je obecně pouze matematickou konstrukcí, nemusí se jednat o žádný z bodů soustavy. Už samotná volnost ve volbě hmotnosti μ ukazuje, že lze najít nekonečně mnoho takový bodů.

K současnému kurzu, neboť tuhle část nestihnu dokončit:
Řekli jsme si, že hmotný střed (a.k.a. těžiště až na slovíčkaření) má tvar $\boldsymbol{r}_1$, ale místo obecné hmotnosti μ je tam hmotnost celého tělesa

$$\mu = m = \sum_{i=1}^{N} m_i,$$

v takovém případě je potom hmotný střed bod, který je stabilní při rotaci. Takových bodů je více (celá osa otáčení). Hmotný střed je tedy jakýsi průsečík myšlenek „bod reprezentující soustavu“ a „při rotaci stojí“. Jeho pozice je poté dána vztahem

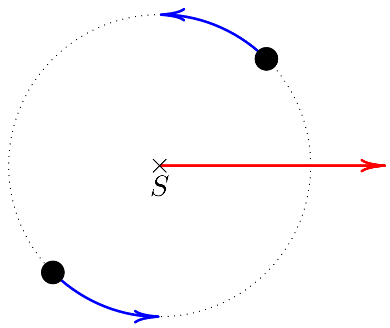
$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{t}}(t) = \boldsymbol{r}_1^{\mu=m}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},$$

což je, jak vidíme, vážený průměr poloh všech bodů.

3.4 Moment setrvačnosti

Jeden hmotný bod pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ má kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2} m v^2,$$



Obrázek 3.2: Dva hmotné body umístěné na opačný stranách kružnice obíhají okolo bodu S, který je jejich těžištěm. Toto těžiště se poté pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_\mathrm{t}$.

kde m je hmotnost objektu, který zmíněný bod reprezentuje. Pokud se hmotný bod pohybuje po kružnici s úhlovou frekvencí ω, lze kinetickou energii zapsat ve tvaru

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

kde $I = mr^2$ je tzv. moment setrvačnosti hmotného bodu. Pokud se hmotný bod obíhá kružnici, jejíž střed se pohybuje rychlostí v_t, je jeho celková kinetická energie rovna

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_\mathrm{t} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega})^2 = \frac{1}{2}m\left[\boldsymbol{v}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{t} + 2\boldsymbol{v}_\mathrm{t}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega})\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega})\right] = \\ &= \frac{1}{2}mv_\mathrm{t}^2 + m\boldsymbol{v}_\mathrm{t}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{t}^2 + m\boldsymbol{v}_\mathrm{t}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}I\omega^2, \end{aligned}$$

objevuje se zde mimo klasickou translační a rotační energii ještě člen $m\boldsymbol{v}_\mathrm{t}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega})$. Tento člen vymizí pro čistě translační pohyby ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$) i pro čistě rotační ($\boldsymbol{v}_\mathrm{t} = \mathbf{0}$). Nevymizí ovšem pro kombinaci obou pohybů.

Pokud se však budeme bavit o dvou bodech, které rotují okolo bodu S na obrázku 3.2, získáme celkovou kinetickou energii jako součet energií obou bodů, tedy

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2^2 = \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}_\mathrm{t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}_\mathrm{t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_2\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(2m)\boldsymbol{v}_\mathrm{t}^2 + \frac{1}{2}m\left(r_1^2 + r_2^2\right)\omega^2 + m\boldsymbol{v}_\mathrm{t}\cdot\left[(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{\omega})\right] = \\ &= \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{v}_\mathrm{t}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{(I_1 + I_2)}_{I}\omega^2 + m\boldsymbol{v}_\mathrm{t}\cdot\left[(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{\omega}\right] = \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{v}_\mathrm{t}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \end{aligned}$$

kde pro jednoduchost uvažujeme stejné hmotnosti obou bodů, aby těžiště bylo skutečně v bodě S, hmotnost tohoto těžiště je $\mu = 2m$ a pohybuje se rychlostí $\boldsymbol{v}_\mathrm{t}$. Ve výpočtu jsme využili toho, že $\boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{r}_2$, neboť tyto polohové vektory jsou vztahovány ke středu kružnice. Celkový moment setrvačnosti I je dán jako součet momentů setrvačnosti jednotlivých bodů.

Pro systém mnoha hmotných bodů lze, jak bylo ukázáno, zkonstruovat hmotný střed, jehož rychlost $\boldsymbol{v}_\mathrm{t}$ reprezentuje translační část pohybu soustavy. Obecná kinetická energie soustavy, v níž lze pohyb každého bodu rozdělit na pohyb s úhlovou $\boldsymbol{\omega}_i$ a translační rychlost $\boldsymbol{u}_i$, má tvar

Ve vší obecnosti je moment setrvačnosti velice důležitou veličinou, která udává vůli soustavy měnit svou celkovou úhlovou frekvenci. Pro diskrétní rozložení hmoty se jedná o veličinu

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i\ell_i^2,$$

kde ℓ_i je vzdálenost i. bodu od osy otáčení.