Kapitola 1

Práce, energie a výkon

1.1 První kontakt s pojmem práce ve fyzice

Fyzikální obec se již před mnoha lety usnesla k podivnému závěru, že držet v náručí ukřičené miminko, přidržovat na stavbě desetikilogramový trám, či pomoci přenést babičce těžké tašky přes přechod pro chodce, není žádná práce. S tím by určitě nesouhlasil nejen svaz rozhořčených maminek, ale snad každý z nás. Co tedy fyziky vedlo k takovému zvláštnímu usnesení? Inu, co v běžném životě míníme pod pojmem práce, mírně odlišně pak vyzní v hantýrce fyzikální. Ve fyzice **práci koná zdroj síly jenom pokud se bod tělesa v místě působiště síly pohybuje, navíc, pokud se nepohybuje ve směru kolmém ke směrovému vektoru síly**. Paní maminka má určitě práce až nad hlavu, síla, kterou bychom ji přáli při zaopatřování mrňouse, bude však spíše psychická, Bořivoj na stavbě dozajista zapojuje svaly svoje, ale dokud trám jen drží, nemůžeme ani mu uznat práci fyzikání. A co vnuk Izidor? Ten sílu vynakládá, taška se navíc pohybuje, proč ani tady nejsme svědky konání fyzikální práce? Může za to podmínka, že síla nesmí být kolmá na směr pohybu předmětu, k čemuž při standardním nošení tašek často dochází. Můžeme se tedy vůbec setkat s případem, kdy se fyzikální práce koná? Ale ovšem! Například když závodník na zimních olympijských hrách roztlačuje svůj bob. Toto však není jediný případ konání práce, rozmyslete si!

Určitě si ale říkáte, k čemu je zavedení takového pojmu ve fyzice dobré a co všechno fyzikální práci může konat. **Práci ve fyzice může konat libovolný zdroj síly**, setkáme se tedy s případem, kdy práci koná lidská ruka, píst v nábobě s plynem, ale i třeba gravitace. Motivace zavedení práce ve fyzice je **charakterizace účinků síly na pohybový stav tělesa**. Jak přesně práce ve fyzice vypadá a jakým způsobem souvisí s pohybovým účinkem na těleso si povíme nyní.

1.2 Definice práce ve fyzice

Jak již bylo v předešlém odseku naznačeno, práci koná pouze síla, která působí na těleso v pohybu, může je do něj uvádět, nebo je třeba naopak brzdit. Síla, která působí kolmo na směr pohybu, mění pouze orientaci vektoru rychlosti tělesa,[1] proto také práci nekoná. Pokud navíc požadujeme, aby

[1] Jak si jistě pozorný čtenář povšimnul, nyní se již nevyjadřujeme o bodu tělesa, na nějž síla působí, nýbrž o celém tělese. Pokud by se těleso nepohybovalo pouze translačně a jeho všechny body tudíž se stejným vektorem rychlosti, striktně „tělesem“ myslíme bod tělesa, v němž má síla působitě.

byla práce v síle i rychlosti lineární (tedy například dvojnásobná síla konala dvojnásobnou práci) je jediná rozumná možnost jak matematicky zavést práci W vykonanou silou $\boldsymbol{F}$ na tělesu s rychlostí $\boldsymbol{v}$ za časový úsek Δt, a to vztahem

$$W = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v})\Delta t$$

Nyní jsme definovali fyzikální veličinu, *práci*, u které stojí za povšimnutí hned několik věcí. Síla a rychlost jsou vektory, což značí jejich ztučněný font, násobení mezi vektory říkáme skalární součin. Pokud jsou síla a rychlost vzájemně kolmé vektory, práce silou konaná je skutečně nulová, jelikož skalární součin kolmých vektorů je nula. Skalární součin vektorů je číslo, takže práce je skalární veličina. Další věc, která by nás mohla napadnout, že pokud je těleso podrobeno působení této jediné síly, musí akcelerovat, jak praví Newtonův zákon síly. Při akceleraci se mění velikost rychlosti tělesa, proto není z této definice jasné, jakou rychlost do vzorečku pro práci dosazovat. Tento argument nás přivede k závěru, že pokud těleso akceleruje, je lepší použít následující definici práce

$$W^j = \sum_i (\boldsymbol{F}_i^j \cdot \boldsymbol{v}_i)\Delta t_i$$

Tady jednotlivým časovým intervalům Δt_i odpovídají dostatečně malé časové úseky, při nichž jsou rychlost tělesa, a potažmo i síla, konstantní. Jak jsme již poznamenali, na těleso může v jednom okamžiku působit několik sil naráz, proto jsme v naší novější definici indexem j upozornili na to, práci které síly počítáme. Pokud bychom chtěli být maximálně přesní, vzali bychom v potaz, že časový interval, na kterém je rychlost zrychlujícího tělesa konstantní, je tzv. infinitezimální (rozuměj nekonečně malý), takže na přesný výpočet místo sumace užijeme integrování. Naše nová a už poslední definice práce síly $\boldsymbol{F}^j$ tedy zní

$$W^j = \int_{T_1}^{T_2} (\boldsymbol{F}^j(t) \cdot \boldsymbol{v}(t))\mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

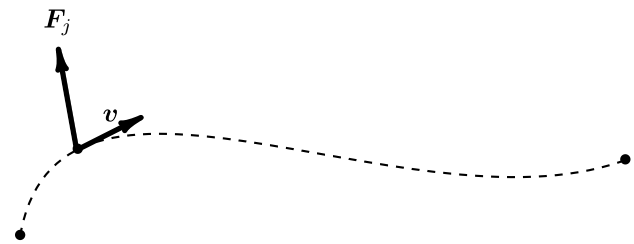
kde T_1, resp. T_2 je počáteční, resp. koncový čas konání práce.

Než začneme s hlubším zkoumáním této definice, musíme čtenáře upozornit, že ačkoli jsme definici práce podřídili argumentu, že rychlost je proměnná kvůli síle, která na těleso působí, musíme principiálně uvažovat vektor okamžité síly a vektor okamžité rychlosti jako nezávislé, poněvadž do celkové rychlosti mohou promlouvat ještě další okamžité vektory sil, ať už kolmé nebo rovnoběžné s rychlostí. Naše stávající definice je jen zobecněním té prvotní na případy časově proměnné rychlosti, potažmo časově proměnné síly.

1.3 Vlastnosti práce, pojem energie

V této části se pokusíme trochu více prozkoumat právě definovaný pojem, čímž také částečně odhalíme motivaci jeho zavedení. Už od prvního pohledu člověka může napadnout, jestli takto definovaná práce nelze přeformulovat do jednodušší, byť ekvivalentní, podoby. Řeč je o využití vztahu mezi rychlostí, časem a uraženou dráhou tělesa, tedy o rovnosti $\Delta \boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\Delta t$, v infinitezimální variantě pak $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$. Ano! Přesně tohoto vztahu využijeme a předěláme, z později zdůvodněných pohnutek, naši definici do nového kabátku[2]

$$W^j = \int_C \boldsymbol{F}^j(t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}(t) \tag{1.2}$$



Jak si můžeme všimnout, v této definici nevystupuje časový interval, po němž síla koná práci, ani rychlost tělesa, na něž síla působí. Vidíme tady celkem jasně, že na individálních informacích o času a rychlosti vlastně nezáleží, záleží pouze na jejich součinu, tedy něčem jako „vektor dráhy“. Jelikož se těleso pohybuje po obecné křivce ve třech rozměrech, musíme integrovat po infinitezimálních přírůstcích „vektoru dráhy“, přesněji řečeno, tečnách k dné trajektorii C. Jediné na čem tedy záleží, je celkový vzhled trajektorie, nikoliv způsob, jakým ji těleso zdolá. Díky tomuto zjištění například vidíme, že práce sil jsou nezávislé, protože ostatní síly, které urychlují nebo zpomalují těleso, neovlivní práci vykonanou silou $\boldsymbol{F}^j$ na trajektorii C. I když v původní formě definice vystupovala rychlost tělesa, která je při působení daných sil přímo závislá na jeho hmotnosti, v nové formě již nevystupuje, vidíme tedy, že **k výpočtu práce nemusíme o tělese vědět vůbec nic**. To je její důležitá vlastnost, která dovoluje pojem rozířit na situace, kdy těleso není tuhé (práce konaná na plyn v nádobě), nebo kdy mechanismus konání práce není potřeba do detailu znát (motor automobilu).

V tomto odseku jsme ještě čtenáři však něco dlužni, popsat jaké pohybové účinky na těleso práce má. Dá se práce definovaná vztahem (1.1) napsat pomocí změny na samotném tělese? Přestože je práce takto univerzální, existuje kvantita přímo spojená s každým tělesem, kterou práce mění všem tělesům naprosto rovnostářsky. Odvoďme si, jak tato kvantita vypadá. Jelikož lze práce jednotlivých sil sčítat, za účelem snazšího počítání nyní předpokládejme působící sílu pouze jednu.[3]

$$W = \int_{T_1}^{T_2} (\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t))\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} (m\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t))\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(T_2)\cdot\boldsymbol{v}(T_2) - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(T_1)\cdot\boldsymbol{v}(T_1)$$

A pokud budeme definovat veličinu E_k vztahem

$$E_k = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.3}$$

[2] I když se nám formálně podařilo docela jednoduchým nahrazením docílit nové podoby definice, v matematických hlubinách došlo k poměrně významným změnám, převedli jsme integrál funkce v jedné dimenzi na trojdimenzionální křivkový integrál druhého druhu. Jak snadné je otřásat matematickými hlubinami, že? Pokud se budete matematikou zaobírat déle, zjistíte, že při otřesech hlubin tentokráte nedošlo k žádné újmě, jelikož pullback z diferenciální formy zachovává Lebesgueův integrál.

[3] V následujícím odvození považujeme hmotnost tělesa jako časově neměnnou. Výhoda odvození s jedinou silou spočívá v tom, že rychlost tělesa závisí výlučně a jen na této síle, vektory nemusíme brát jako nezávislé.

můžeme práci jednoduše napsat jako

$$W = E_k(T_2) - E_k(T_1) \tag{1.4}$$

Veličině E_k potom řekneme *kinetická energie* tělesa. Vidíme, že **vykonaná práce odpovídá změně kinetické energie tělesa**.

Pokud by na tělese konalo práci více sil, platilo by nyní již něco velmi očekávatelného, tedy[4]

$$W = \sum_j W^j = \sum_j E_k^j(T_2^j) - \sum_j E_k^j(T_1^j) = \sum_j \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^j(T_2^j)\cdot \boldsymbol{v}^j(T_2^j) - \sum_j \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^j(T_1^j)\cdot \boldsymbol{v}^j(T_1^j)$$

Zároveň ale připomeňme, že platí

$$W = \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}(T_2)\cdot \boldsymbol{v}(T_2) - \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}(T_1)\cdot \boldsymbol{v}(T_1)$$

Když tyto dva vztahy zkombinujeme, dojdeme k zajímavému závěru, hleďme!

$$\frac{1}{2} m\boldsymbol{v}(T_2)\cdot \boldsymbol{v}(T_2) - \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}(T_1)\cdot \boldsymbol{v}(T_1) = \sum_j \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^j(T_2^j)\cdot \boldsymbol{v}^j(T_2^j) - \sum_j \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^j(T_1^j)\cdot \boldsymbol{v}^j(T_1^j)$$

A protože tento vztah musí platit pro libovolnou trajektorii a libovolné počáteční rychlosti, máme nutně

$$\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{v}(x) = \sum_j \boldsymbol{v}^j \cdot \boldsymbol{v}^j(x)$$

kde písmenem x značíme libovolný bod prostoru, v němž se těleso (místo působiště síly na těleso) nachází. Vidíme, že ačkoliv se práce skládají lineárně, rychlosti se sčítají v kvadrátech. Jinými slovy, když síla urychlí těleso na rychlost $\boldsymbol{v}_1$, druhá síla na tétýž dráze na rychlost $\boldsymbol{v}_2$, součet těchto sil urychlí těleso na rychlost, jejíž velikost je rovna $\sqrt{\boldsymbol{v}_2\cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1\cdot \boldsymbol{v}_1}$. Kinetické energie se tedy skládají taktéž lineárně.

I když odvozování pohybových účinků síly na těleso vypadalo obecně, ve skutečnosti zas tak obecné nebylo. Víte v čem? Jaký význam má hmotnost tělesa například při rotaci tělesa? Hmotnost sama o sobě vlastně žádný, uplatňuje se tam první moment hmotnosti, který možná znáte pod označením moment setrvačnosti tělesa (obvykle se značí písmenem J). Už víte, v čem naše předešlé úvahy postrádaly obecnost? Ano, předpokládali jsme jen posuvný pohyb, nikoliv rotační. Jak by vypadala univerzální kvantita všech těles, kterou měníme prací při jejich otáčení? Je to analogické předešlému odvození.

$$\begin{aligned} W &= \int_{T_1}^{T_2} (\boldsymbol{F}(t)\cdot \boldsymbol{v}(t))\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} (\boldsymbol{F}(t)\cdot(\boldsymbol{\omega}(t)\times \boldsymbol{r}(t))\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} ((\boldsymbol{r}(t)\times \boldsymbol{F}(t))\cdot \boldsymbol{\omega}(t))\mathrm{d}t = \\ &= \int_{T_1}^{T_2} (\boldsymbol{M}(t)\cdot \boldsymbol{\omega}(t))\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} (J\boldsymbol{\varepsilon}(t)\cdot \boldsymbol{\omega}(t))\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}(\frac{1}{2} J\boldsymbol{\omega}(t)\cdot \boldsymbol{\omega}(t)) = \\ &= \frac{1}{2} J\boldsymbol{\omega}(T_2)\cdot \boldsymbol{\omega}(T_2) - \frac{1}{2} J\boldsymbol{\omega}(T_1)\cdot \boldsymbol{\omega}(T_1) \end{aligned}$$

[4] Horní index u startovního/koncového času průběhu tělesa trajektorií C odlišuje jednotlivé časy, jenž se liší kvůli odlišným velikostem rychlosti $\boldsymbol{v}^j$. Dále poznamenejme, že první rovnost vyplývá skutečně jen ze vztahu (1.2) a linearity integrálu.

Z toho opět vykukuje, že práce na rotujícím tělese je rozdílem jisté kvantity $\frac{1}{2}J\ \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$ na konci a počátku konání práce. Tuto kvantitu nazýváme *rotační kinetická energie* tělesa a značíme ji taktéž symbolem E_k. Důvod, proč nerozlišujeme v symbolech mezi rotační a translační kinetickou energií (vyskytující se ve vzorci (1.3)), je prostý. Jde vlastně o jednu a tutéž pohybovou energii, hmotnostní konstituenty tělesa mají jen jinak rozdělené svoje vektory okamžitých rychlostí. Lze dokázat, že pokud bychom rotující těleso rozdělili na malé kousky, které se již v dobré aproximaci pohybují translačně, a sečetli všechny tyto příspěvky translačních energií, dostali bychom zase jen celkovou rotační energii tělesa. Velmi podobně případu předchozímu bychom nyní mohli vyzkoumat, že se kinetické rotační energie skládají lineárně, kdežto úhlové rychlosti rotace kvadraticky, ale to už přenecháváme k rozmyšlení čtenáři. Ke konci tohoto odseku ještě poznamenejme, že dokonce platí tvrzení, že lze lineárně skládat i kinetickou energii rotační s tou translační. Tato velmi důležitá vlastnost bude hrát důležitou roli v části věnované relativitě práce.

1.4 Výkon

Zatím jsme seznámeni se vzorečkem, který nám určuje práci vykonanou za jistý konečný časový úsek. Ve fyzice jsme často v situaci, kdy nás spíše zajímá okamžitá rychlost dané změny, než její celková velikost. Nejznámějším a snad nejjednodušším příkladem je výpočet okamžité rychlosti pohybu tělesa v prostoru. Dráhu spatřujeme jako úhrnnou změnu polohy tělesa, okamžitou rychlost jako okamžitou změnu polohy tělesa v daném čase. Paralelou k dráze je práce, změna polohy odpovídá změně kinetické energie a k okamžité rychlosti je přiřazena veličina zvaná *výkon*.

S tímto jednoduchým příkladem si pomůžeme i při matematické definici výkonu. Každý dá jistě za pravdu, že okamžitá translační rychlost (resp. její velikost) tělesa, v_o, je rozumně definovaná vztahem

$$v_o(T) = \left.\frac{\mathrm{d}s(T, T+t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

Snadno nahlédneme, že řešení této rovnice pro dráhu je

$$s(T, T+t) = \int_T^{T+t} v_o(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Jak víme, vztah pro práci má velmi obdobný tvar, užijeme jej nyní v této podobě

$$W^j(T, T+t) = \int_T^{T+t} (\boldsymbol{F}^j(\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau))\mathrm{d}\tau$$

Definice výkonu, P, je tedy na snadě

$$P^j(T) = \left.\frac{\mathrm{d}W^j(T, T+t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

Dosazením a zderivováním přecházíme k notoricky známé formulce

$$P^j(T) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_T^{T+t} (\boldsymbol{F}^j(\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau))\mathrm{d}\tau\bigg|_{t=0} = \boldsymbol{F}^j(T)\cdot\boldsymbol{v}(T) \tag{1.5}$$

1.5 Relativita práce

Dává vzoreček pro práci stjené výsledky ve všech vztažných soustavách? Vypadá vzoreček pro práci stejně ve všech vztažných soustavách? Platí ve všech vztažných soustavách, že práce je rovna změně kinetické energie tělesa? To bude předmětem studia tohoto odseku. Bude doplněno.

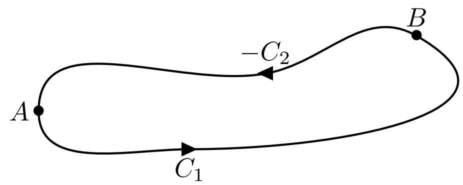
1.6 Silová pole a zákon zachování mechanické energie

Silové pole je myšlená všudyprostupující síla, která v každém místě prostoru působí na těleso, které se tam nachází, předem smluvenou velikostí a směrem. Silové pole si můžeme vizualizovat jako množinu silových vektorů, roznesených do každého bodu našeho prostoru, odtud název „pole“.

Díky tomu, že práce nijak nesouvisí s tělesem, na němž je konána, lze o práci vyslovovat obecné závěry platné pro libovolné těleso. Z definice vidíme, že práce souvisí s trajektorií v prostoru. Pokud dostaneme informaci o silovém poli, můžeme začít přemýšlet a mluvit o přímém vztahu mezi prací a trajektorií. Speciálně nás budou zajímat trajektorie uzavřené, neboli také smyčky, budeme totiž pomocí nich klasifikovat silová pole. Z určitých důvodů pro nás bude zajímavá skupinka silových polí, které pro uzavřené trajektorie dávají celkovou práci nulovou. Takovým silovým polím říkáme *konzervativní*. Je vůbec možné, aby takové pole existovalo? Ano, věru. Není to sice příliš exaktní postup, ale zkuste si například v homogenním silovém poli počítat práci získanou na různých obdélníkových trajektoriích. Pokud budete počítat správně, každá taková práce vyjde nulová.

Proč nás ale konzervativní pole zajímají a jak je poznáme? Jak dále uvidíme, právě konzervativní silová pole dovolují zavést *potenciální energii*, která hraje důležitou úlohu ve formulaci zákona zachování celkové *mechanické energie*. Pokud žádná další síla dynamiku fyzikálního systému neovlivňuje, podléhají tomuto zákonu všechna tělesa, která se v tomto silovém poli nachází. Při zavádění potenciální energie tělesa, které se vyskytuje v konzervativním silovém poli, budeme v prvé řadě potřebovat vyšetřit, jak se liší práce vykonané po různých trajektoriích, které mají stejný počáteční a koncový bod. Je naším tvrzením, které následně obhájíme, že práce v konzervativním silovém poli pro každé dvě trajektorie, které mají stejné koncové a stejné počáteční body, vychází stejně. Pro důkaz tohoto tvrzení si vezměme dva body, počáteční A a koncový B. Mezi těmito body veďme dvě různé trajektorie C_1 a C_2. Práci po trajektorii C_1 si označme W_1, práci po trajektorii C_2 zase W_2. Dále si všimneme, že pokud směr pohybu tělesa po trajektorii C_2 otočíme, tedy za koncový bod budeme považovat A, počáteční B a v každém místě trajektorie otočíme směr rychlosti tělesa, získáme tutéž práci, jen s opačným znaménkem. To pochopíme, když nahlédneme na definici práce (1.1). Jediná změna nastane u vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$, ten přejde na vektor opačný, tedy $-\boldsymbol{v}$. [5] Pokud spojíme trajektorii C_1 s trajektorií opačnou k C_2, vznikne smyčka! A protože je pole konzervativní, musí být práce po této symčce nulová. Jelikož se práce skládají lineárně, můžeme finálně psát $W_1 + (-W_2) = 0$, neboli $W_1 = W_2$. Slovy řečeno, práce v konzervativním silovém poli po křivce C_1 je stejná jako práce vykonaná po křivce C_2.

[5] S problematikou křivkového integrálu, který v tomto textu využíváme pro výpočet práce, se můžete blíže seznámit v příslušejícím studijním textu.



Z tohoto pozorování můžeme vyvodit, že práce v konzervativním silovém poli je plně zadána informací mezi polohou počátečního a koncového bodu křivky. Přirozeně by nás tedy mohlo napadnout každému bodu prostoru přiřknout číslo, které by odpovídalo práci vykonané přemístěním tělesa z jistého referenčního bodu do tohoto bodu. Právě tato myšlenka stojí za vznikem pojmu potenciální energie. Přesněji jde o to, zavést funkci, jejíž rozdíl funkčních hodnot v libovolných dvou bodech jejího definičního oboru dává práci vykonanou přemístěním tělesa mezi těmito dvěma body. Definičním oborem funkce je samozřejmě jistá oblast prostoru, v níž máme definované silové pole. Této funkci řekneme funkce potenciální energie, budeme ji značit E_p. *Potenciální energie tělesa* je potom funkční hodnota potenciální energie v bodě, kde se těleso nachází. Jak takovou funkci matematicky popsat? Náš požadavek zní, aby **rozdíl funkční hodnoty potenciální energie v počátečním bodě a funkční hodnoty potenciální energie v koncovém bodě trajektorie dával velikost práce vykonané po této trajektorii**. Proto si tedy pevně zvolme nějaký bod prostoru (třeba A) a počítejme práce vykonané po všech křivkách s tímto počátečním bodem. Tyto křivky si označme $C(A, x)$. Tím dostaneme funkci polohy v prostoru (určenou souřadnicí x)

$$W(A, x) = \int_{C(A,x)} \boldsymbol{F}(t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}(t)$$

Potom můžeme psát

$$E_p(A) - E_p(x) = W(A, x)$$

neboli také

$$E_p(x) = E_p(A) - W(A, x) \tag{1.6}$$

Jak vidíme, stále máme volnost v určení potenciální energie v bodě $E_p(A)$. Tato hodnota se fixuje vhodně podle konkrétní potřeby. V mnoha případech si zvolíme bod A tak, aby se v něm nacházela nejnižší hodnota potenciální energie a požadujeme $E_p(A) = 0$. Tento požadavek ale není fyzikálně nutný, v principu může být potenciální energie tělesa i záporná. Můžeme si rozmyslet, že právě díky konzervativnosti pole nezáleží podoba funkce potenciální energie E_p na volbě referenčního bodu A.

Zákon zachování celkové mechanické energie tělesa E_M je potom dán rovnicí

$$E_M = E_k(v(t)) + E_p(x(t)) = c \tag{1.7}$$

kde c je nějaká konstanta, přestože rychlost tělesa $v(t)$ i jeho poloha $x(t)$ jsou funkcemi času. Proč je tohle pravda? Zkusme si to v krátkosti rozmyslet. Abychom splnili neměnnost celkové mechanické energie, musí speciálně platit pro libovolně zvolené dva časy T_1 a T_2 (kde bez újmy na obecnosti předpokládejme $T_1 < T_2$) tato rovnost

$$E_k(v(T_1)) + E_p(x(T_1)) = E_k(v(T_2)) + E_p(x(T_2))$$

Když ale přeskupíme členy, získáme vztah

$$E_p(x(T_1)) - E_p(x(T_2)) = E_k(v(T_2)) - E_k(v(T_1)) \tag{1.8}$$

Nejdříve si rozepišme pravou stranu. Podle vzorečku (1.6) můžeme psát

$$E_p(x(T_1)) - E_p(x(T_2)) = (E_p(A) - W(A, x(T_1))) - (E_p(A) - W(A, x(T_2))) = W(A, x(T_2)) - W(A, x(T_1))$$

Díky konzervativnosti pole ale navíc máme

$$W(A, x(T_2)) - W(A, x(T_1)) = W(x(T_1), x(T_2))$$

To odpovídá práci vykonané přemístěním tělesa z bodu $x(T_1)$ do bodu $x(T_2)$. Nyní se podívejme, co stojí na pravé straně rovnosti (1.8). Pokud se vrátíme zpět ke vztahu (1.4), spatříme, že se taktéž jedná o práci vykonanou silovým polem při přemístění tělesa z bodu $x(T_1)$ do bodu $x(T_2)$! Rovnost (1.7) je tímto dokázána. Zárěm tedy je, že pokud se těleso nachází v konzervativním silovém poli, jeho celková mechanická energie se nemění.

Lze ze zadaného silového pole vypočíst, jestli je konzervativní? Ano, ale technika, kterou přitom využíváme, spadá do pokročilejších oblastí matematiky, konkrétně do vektorové anylýzy. V tomto studijním textu proto jen pro zajímavost zmiňme, že to lze s pomocí operátoru zvaného *rotace*.