1 Pohyby v tíhovém poli

V této kapitole se zaměříme především na pohyby hmotného bodu v homogenním tíhovém poli a také zmíníme problémy, pro které je předpoklad homogenního pole nepostačující. Nejprve si ale musíme vysvětlit, co je vlastně tíha.

1.1 Gravitace a tíha

Pokud si představíme ve volném prostoru hmotný bod o hmotnosti m, nebudeme mít k dispozici žádný preferovaný směr a souřadnou soustavu zvolíme náhodně. Jestliže do vzdálenosti r od původního bodu umístíme další hmotný bod o hmotnosti M, budou se tyto dva body gravitačně ovlivňovat, tj. na každý z nich bude působit gravitační síla o velikosti

$$F_{\mathrm{g}} = G\frac{Mm}{r^2}$$

rovnoběžná se spojnicí bodů. Nadále budeme uvažovat, že $M \gg m$, a místo hmotného bodu s hmotností M nahradíme tělesem tvaru koule (planetou). Nyní dává dobrý smysl volit jednu z os našeho systému totožnou se spojnicí bodu m a středem tělesa M, tedy rovnoběžně se silou F_{g}. Směr do středu koule budeme nazývat svislým.

Nacházíme-li se daleko od planety, je tíhová síla totožná s gravitační.[1] Pro malé vzdálenosti r je již potřeba vzít v potaz skutečnost, že všechny planety rotují. Spolu s planetou rotuje i její plynný obal – atmosféra, který na tzv. testovací[2] těleso m bude působit určitou silou, závislou na konkrétní atmosféře. Nás bude zajímat především případ, kdy je testovací těleso pevně spojeno s povrchem planety – prozatím předpokládejme, že se nachází přímo na rovníku. V takovém případě bude menší těleso rotovat spolu s planetou úhlovou rychlostí ω a bude pociťovat odstředivou sílu

$$F_{\mathrm{o}} = m\omega^2 r$$

působící ve směru kolmém na osu rotace planety. Složením síly gravitační a síly odstředivé dostaneme sílu tíhovou. Směr této síly opět budeme označovat jako svislý. Pokud se budeme od povrchu radiálně vzdalovat, bude gravitační síla postupně klesat a také naše translační rychlosti získaná během kontaktu s povrchem planety již nebude ve větší vzdálenosti odpovídat úhlové rychlosti ω. Těmto problémům se budeme věnovat v kapitolách 1.2 a 1.4.

Zde se zaměříme na případ, kdy se posuneme po poledníku blíže k pólu. Zatímco na rovníku jsou síly gravitační a tíhová antiparalelní a výslednice stále míří do středu (pouze má menší velikost), v jiných částech planety je velikost odstředivé síly[3] daná vztahem

$$F_{\mathrm{o}} = m\omega^2 r\cos\varphi\,,$$

kde φ označuje úhlový odklon od rotační osy, jehož počátek je na rovníku (rádi bychom zde mluvili o zeměpisné šířce, to bychom se ovšem museli nacházet na Zemi). Proto již svislý směr nebude ukazovat do středu planety, ale bude se vychylovat k rovníku. Také pozorujeme, že tíhová síla roste směrem k

[1] V české literatuře v takovýchto případech o tíhové síle vůbec nemluvíme a vzájemné působení těles M a m označujeme jako gravitační sílu. V anglické literatuře existuje pouze jeden společný pojem *gravitational force* a je potřeba rozlišovat, v jaké blízkosti planety se nacházíme.

[2] Těleso s hmotností $m \ll M$ nazýváme testovací, neboť ho myšleně může vkládat do různých bodů v okolí planety a testovat tak vlastnosti jejího gravitačního pole, aniž bychom planetu ovlivnili (nízká hmotnost m způsobuje, že se planeta nepohybuje vůči klidovému systému).

[3] Připomínáme, že velikost tíhové síly se též nazývá tíha. Pokud někde uvidíte tíhu (anglicky *weight*) uvedenou v kilogramech či jiné jednotce hmotnosti, jedná se o chybu.

pólům, přičemž přímo na nich je maximální a směřuje opět do středu planety. Velikost tíhové síly je podle kosinové věty dána vztahem

$$F_{\mathrm{G}} = \sqrt{F_{\mathrm{g}}^2 + F_{\mathrm{o}}^2 - 2F_{\mathrm{g}}F_{\mathrm{o}}\cos\varphi}\,.$$

Nyní bychom mohli říci, že tíhová síla obecně nepůsobí kolmo k povrchu planety. Ovšem, představíme-li si planetu jako dokonalou rotující kouli a na její povrchu umístíme malou dokonale hladkou kuličku, odvalí se tato směrem k rovníku. Pokud však budeme předpokládat, že je planeta tvárná, zploští se planeta tak, že je její povrch kolmý k tíhové síle. Je zde pozitivní vazba, neboť rovníkový průměr je vlivem zploštění větší a tak vzroste i odstředivá síla (zachování momentu hybnosti však na druhou stranu rotaci planety zpomalí). Nezapomeňme však, že reálné planety nejsou dokonale tvárné a navíc mají nerovný povrch – vždy je proto lepší mluvit o směru svislém, nikoli kolmém k povrchu planety; pokud není povrch nějak dobře definován.

Na konec kapitoly uvedeme už jen definici tíhového zrychlení. Tíhovou sílu můžeme zapsat ve formě hmotnost m krát zrychlení $g(r)$, kde $g(r)$ se nazývá tíhové zrychlení. Pokud je odstředivá složka tíhové síly zanedbatelná, lze tíhové zrychlení vypočíst podle vzorce

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2}\,, \tag{1}$$

obecněji

$$g(r) = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,,$$

kde Φ je potenciál gravitačního pole, tj. ve slabém[4] gravitačním poli hmotného bodu

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}\,.$$

Znaménko mínus ve výsledku značí svislý směr.

Příklad 1. Máte zadán rovníkový poloměr Země $R_{\mathrm{E}} = 6\,378\,\mathrm{km}$ a hmotnost $M_{\mathrm{E}} = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. V tabulkách najdete gravitační konstantu $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}m^3s^{-2}}$ a oběžnou dobu Země $T = 86\,160\,\mathrm{s}$. Vypočtěte tíhové zrychlení pro zeměpisné šířky $\varphi = (0{,}30{,}60{,}90)\,^\circ$. Získané výsledky srovnejte s měřeními pro místa na planetě, která těmto šířkám s dobrou přesností odpovídají: $9{,}781\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ v Singapuru, $9{,}796\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ v Cape Town, $9{,}819\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ v Helsinkách, $9{,}834\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ na severním pólu.

1.2 Homogenní tíhové pole

Zkoumáme-li působení tíhy na tělesa okolo nás, držíme se obvykle ve vzdálenosti několika desítek metrů, nejvýše pár kilometrů od povrchu Země. Potenciál gravitačního pole vyjádříme v závislosti na výšce h nad zemí jako

$$\Phi(h) = -\frac{GM}{R_{\mathrm{E}} + h}\,,$$

kde R_{E} je poloměr Země. Nyní nás zajímá, jak se tato funkce chová pro $h/R_{\mathrm{E}} \ll 1$. Pomocí Taylorova rozvoje[5] do prvního řádu je možné každou funkci spojitou v první derivaci na zkoumaném okolí

[4] Slabém z pohledu obecné relativity.

[5] Pokud se trochu orientujete v základech matematické analýzy, tak je vám zřejmé, že takováto lineární aproximace je možná pro potenciálové pole s libovolnou závislostí na r, ne pouze r^{-2}.

nahradit lineární funkcí. (Pokud nejste obeznámeni s Taylorovým polynomem, vězte, že prostě místo s funkcí $\Phi(h)$ budeme na okolí R_E pracovat s její tečnou v bodě R_E.) Rozvoj má tvar[6]

$$\Phi(h) \approx \Phi(R_\mathrm{E}) + h\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}h}(0) = -\frac{GM}{R_\mathrm{E}} + h\frac{GM}{R_\mathrm{E}^2}\,.$$

K potenciálu můžeme přičíst libovolnou konstantu a stále dostat správné fyzikální zákony, neboť silové působení pole dostaneme derivováním tohoto vztahu, konstanty tedy vymizí. Volme proto

$$\Phi'(h) = \Phi(h) + \frac{GM}{R_\mathrm{E}} = h\frac{GM}{R_\mathrm{E}^2} \tag{2}$$

čímž jsme vlastně posunuli nulovou hladinu potenciálu na povrch Země. Dále si, v souladu s definicí (1), zavedeme

$$g \equiv -g(R_\mathrm{E}) = \frac{GM}{R_\mathrm{E}^2}\,.$$

Veličina g představuje tíhové zrychlení homogenního pole. Obvykle s ním pracujeme jako s konstantou o hodnotě $9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, což je tzv. standardní tíhové zrychlení. Jak však víme, Země není zcela homogenní, a proto se hodnota g pro každý bod na povrchu Země liší. Vždy však můžeme zanedbat závislost na h, je-li h dostatečně malé vzhledem k námi požadované přesnosti. Jak rychle odchylky narůstají si vyzkoušíte v příkladu níže.

Potenciální energie hmotného bodu m ve výšce h nad povrchem Země je tedy

$$E_\mathrm{p}(h) = m\Phi'(h) = mgh$$

a tíhová síla (vektorově)

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = m\boldsymbol{g}\,,$$

kde $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$ v kartézské soustavě xyz, kde osa z míří svisle vzhůru. Počátek soustavy je spojen pozorovatelem pevně stojícím na povrchu Země. Tato soustava je inerciální, nebo lépe řečeno lokálně inerciální. Zdánlivé síly začnou v této soustavě hrát roli až tehdy, budou-li dráhy zkoumaných těles nezanedbatelné vůči rozměru Země nebo doba jejich pohybu nezanedbatelné vůči periodě rotace zemské osy.

Kdybychom se nezabývali gravitací, ale elektrickým polem, byly by vzorce velice obdobné. Místo pole $\boldsymbol{g}$ bychom měli pole $\boldsymbol{E}$ a sílu, kterou působí homogenní elektrické pole na částici s nábojem q, bychom vyjádřili jako

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{e} = q\boldsymbol{E}\,.$$

Změna potenciální energie při posunu částice o d proti směru pole $\boldsymbol{E}$ bude analogicky

$$\Delta E_\mathrm{p} = qEd\,,$$

kde $E = |\boldsymbol{E}|$.

Příklad 2. Vezměte nárůst potenciální energie v homogenním tíhovém poli při přesunu tělesa z výšky $h = 0$ do $h = H$ a porovnejte výsledek s výpočtem provedeným v radiálním poli. Určete obecnou závislost odchylky na H a vyčíslete relativní chybu pro $H = 1\,\mathrm{km}$, $H = 100\,\mathrm{km}$.

[6] Předpokládáme, že h je kladné. Pod zemským povrchem má potenciál jiný průběh a ačkoli zde lineární aproximace bude také fungovat, chyba aproximace poroste pro záporná h rychleji.

1.3 Vrhy v homogenním tíhovém poli

Šikmý vrh je obecný případ volného pohybu v tíhovém poli. Nebudeme se zabývat dynamikou vrhu, ale pouze kinematikou, tj. přeskočíme časový úsek, kdy je těleso urychleno silou na počáteční rychlost. Počáteční parametry vrhu si označíme následovně: výška h_0, rychlost v_0, úhel α_0. Úhel α_0 je svírán osou x a směrem počáteční rychlosti. Osa y míří svisle vzhůru; třetí osu nepotřebujeme, neboť v lokálním inerciálním systému bude pohyb vždy dvojrozměrný. Časově závislé parametry v průběhu pohybu budeme značit bez indexu (případně explicitně napíšeme do závorky čas t), koncové parametry s indexem 1. Nejvyšší dosažená výška bude značena h_m, vodorovná vzdálenost uražená ve chvíli dosažení horní úvrati bude značena d_m. Jelikož se nezabýváme dynamikou, není pro nás podstatná hmotnost tělesa.

Počáteční rychlost můžeme rozložit na složku v ose x a složku v ose y, tedy

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 \,,$$
$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0 \,.$$

Ve směru x nepůsobí žádné zrychlení a proto se vodorovná složka hybnosti, a za předpokladu neměnné hmotnosti[7] i vodorovná složka rychlosti, zachovává v celém průběhu pohybu. Ve směru y působí tíhové zrychlení $-g$, časové závislosti složek rychlosti tedy budou

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha_0 \,,$$
$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha_0 - gt \,.$$

Jelikož nyní známe okamžitou rychlost, snadno vyjádříme i úhel k ose x

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{v_y(t)}{v_x(t)} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha_0 - \frac{g}{v_0} t}{\cos \alpha_0} \,.$$

Pokud je v_{0y} kladná, bude těleso v horní úvrati právě tehdy, když se stoupání tělesa zastaví, tj. pro $v_y(t) = 0$, což je totožné s požadavkem $\alpha(t) = 0$. Z rovnice

$$0 = v_0 \sin \alpha_0 - g t_\mathrm{m}$$

vyjádříme

$$t_\mathrm{m} = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{v_{0y}}{g} \,.$$

Poměrně nepřekvapivě zde nevystupuje x-ová složka rychlosti. Také je nasnadě, že do původní výšky h_0 se těleso znovu dostane v čase

$$t_1 = 2 t_\mathrm{m} = \frac{2 v_0 \sin \alpha_0}{g} \,.$$

Toto nahlédneme na základě zákona zachování mechanické energie. Porovnáváme body ve výškách h_0, potenciální energie se tedy nezměnila. Navíc se nemění ani vodorovná složka rychlosti, proto i svislá složka rychlosti musí být v koncovém bodě až na znaménko shodná s počáteční (znaménko se změnit musí, neboť $v_y(t)$ je v čase monotónní funkcí). A samozřejmě, aby se v_y změnila z 0 na $-v_{0y}$, bude k tomu při působení konstantního zrychlení potřebovat stejný čas jako ke zpomalení z v_{0y} na 0.

Když se tělesu při návratu do počátečního bodu nezmění celková energie (pro libovolnou trajektorii), říkáme, že se pohybuje v konzervativním poli. V takovém poli jsou veškeré pohyby vratné: pokud obrátíme vektor hybnosti, bude se těleso pohybovat jako kdybychom hybnosti ponechali, ale vraceli

[7] Úlohy s proměnnou hmotností viz kapitola 1.5.

se v čase. V případě homogenního tíhového pole je z hlediska konání práce (změny energie) významná pouze souřadnice y; libovolné dva body ve stejné výšce můžeme spojit vodorovnou trajektorií, podél níž nedochází ke změnám energie. Lze ukázat, že pole je konzervativní, pokud lze popsat pomocí potenciálu – a právě z potenciálu jsme při odvozování vycházeli, viz rovnice (2).

Nyní se zaměřme na polohu objektu. Souřadnice vrženého hmotného bodu v čase t dostaneme integrací rychlostí v čase. Doplníme označení počáteční polohy ve vodorovném směru d_0, potom hledané souřadnice jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= d_0 + v_0 t \cos\alpha_0\,, \\ y(t) &= h_0 + v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2\,. \end{aligned}$$

Zde bychom opět neměli býti překvapeni tvarem těchto parametrických rovnic. Ve vodorovném směru nepůsobí zrychlení a ve svislém směru je zrychlení konstantní, jedná se tedy o složení navzájem kolmého pohybu rovnoměrného a rovnoměrně urychleného. Bez újmy na obecnosti můžeme přesunout počátek souřadné soustavy (a i nulovou hladinu potenciální energie) do bodu $[d_0, h_0]$ a psát zjednodušeně

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos\alpha_0\,, \\ y(t) &= v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Nyní si trochu doplníme názvosloví: pokud $\alpha_0 = 0$ nebo $\alpha = \pi$, hovoříme o vrhu vodorovném, a pokud $\alpha_0 = \pm\pi/2$, mluvíme o vrhu svislém (speciálně pokud $v_{0y} = 0$, jedná se o volný pád).

Všimněme si, že $y(t)$ je parabolická funkce a $x(t)$ je času přímo úměrné, takže i trajektorie $y(x)$ bude parabolou. Z první z rovnic (3) vyjádříme

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}$$

a dosazením do druhé rovnice dostaneme

$$y(x) = (\operatorname{tg}\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2\,. \tag{4}$$

Jedná se o konkávní parabolu, která má právě jeden extrém-maximum (pokud nepovolíme záporná x, jež odpovídají zápornému t, nemusí být extrém žádný). Derivováním podle x zjistíme, že maximum se nachází v bodě

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha_0}d_\mathrm{m}\,, \\ d_\mathrm{m} &= \frac{v_0^2\sin 2\alpha_0}{2g}\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že d_m je kladné pro $\alpha_0 \in (0, \pi)$, tedy když házíme nahoru – což jsme očekávali. Dosazením $x = d_\mathrm{m}$ do (4) dostaneme

$$h_\mathrm{m} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha_0}{2g}\,.$$

Také by nás mohlo zajímat, pod jakým úhlem musíme házet, abychom dohodili co nejdále. Vykreslíme-li křivky $y(x)$ pro všechna α_0, vytyčí nám paraboly množinu bodů, kam jsme schopni dohodit. Tato oblast se nazývá ochranná křivka. Hranici této oblasti nalezneme následovně: v rovnici (4) provedeme úpravu

$$\frac{1}{\cos^2\alpha_0} = \frac{\sin^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0}{\cos^2\alpha_0} = \operatorname{tg}^2\alpha_0 + 1\,,$$

čímž dostaneme rovnici

$$y(x) = (\operatorname{tg}\alpha_0)x - \frac{g(\operatorname{tg}^2\alpha_0 + 1)}{2v_0^2}x^2\,,$$

na níž můžeme pohlížet taktéž jako na kvadratickou funkci $y(\operatorname{tg}\alpha_0)$. Hranice ochranné křivky je tvořena body, do kterých jsme schopni dohodit pouze pod jedním úhlem. Z toho plyne, že řešení kvadratické rovnice pro $\operatorname{tg}\alpha_0$ musí mít nulový diskriminant, tedy

$$0 = x^2 - 4\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right)\,.$$

Tuto rovnici dokážeme upravit do tvaru

$$y(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2\,. \tag{5}$$

a vidíme, že se jedná opět o konkávní parabolu.

Pokud budeme mít zadáno h_1 (BÚNO $h_0 = 0$) a budeme chtít vědět, pod jakým úhlem máme hodit, aby při protnutí $y = h_1$ byla vzdálenost maximální, stačí do rovnice ochranné paraboly dosadit za y a vyjádřit α_0. Dokonce se nemusíme omezit na $y = \text{konst.}$, ale můžeme volit i jinou křivku – viz příklad níže. Speciálně pro $y = 0$ dostaneme, že na rovině nejdále dohodíme, když předmětem vypustíme pod úhlem $\alpha_0 = 45\,^\circ$.

Doteď jsme se zabývali pouze případem, kdy není tělesu během pohybu kladen žádný odpor. Pokud ovšem házíme na větší vzdálenosti a hozený/vržený/vystřelený předmět není dost malý a těžký, začne hrát nezanedbatelnou roli odpor vzduchu. Pro rychlé pohyby[8] se uplatňuje Newtonův vzorce pro odpor

$$F_\mathrm{v} = \frac{1}{2}C\varrho_\mathrm{v}Sv^2\,,$$

kde C je odporový koeficient daný geometrií tělesa, ϱ_v je hustota vzduchu, S je plocha průmětu tělesa na rovinu kolmou ke směru pohybu a v je okamžitá rychlost tělesa. Zde již nebude možné postupovat intuitivně jako v případě pohybu bez odporu, proto se uchýlíme ke standardnímu postupu a sestavíme si pohybovou rovnici; přitom přejdeme k tečkové notaci derivací polohy $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$. Důležité je, abychom rovnici správně vektorově zapsali. K tomu si zavedeme označení

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,.$$

Vektorový tvar je potom

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \frac{1}{2}C\varrho_\mathrm{v}S|\dot{\boldsymbol{r}}|\dot{\boldsymbol{r}}\,,$$

kde kvadrát rychlosti v odporové síle zapíšeme jako

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|\dot{\boldsymbol{r}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}\,.$$

Zkušenější již tuší, že závislost jedné rychlosti na druhé nám může způsobit problémy. Při sestavení pohybových rovnic pro obě složky musíme mít na paměti, že zatímco ve směru x bude působit pouze složka odporového zrychlení, ve směru y je navíc tíhové zrychlení. Rovnice tedy mají tvar

$$\ddot{x} = -\left(k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right)\dot{x}\,,$$
$$\ddot{y} = -\left(k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right)\dot{y} - g\,.$$

[8] Pro svislé a téměř svislé vrhy bude rychlost v horní úvrati malá, ale tento krátký časový úsek zanedbáme.

kde jsme použili substituci

$$k = \frac{C \varrho_\mathrm{v} S}{2m} \,.$$

Je smutné, že tyto pohybové rovnice nemají analytické řešení.[9] Povíme si pouze tolik, že trajektorie nemá tvar paraboly (dopadový úhel je při hodu na rovném povrchu více kolmý než úhel výhozu) a ideální úhel pro maximální dolet je menší než $45\,^\circ$ a závisí na k.

Můžeme ale řešit speciální případ $\dot{x} = 0$, $v_y(0) < 0$, tedy volný pád či vrh svisle dolů. Nejprve snížíme řád derivace, tj. budeme řešit skalární rovnici pro rychlost

$$\dot{v_y} = -g + k v_y^2 \,,$$

kde jsme vzali v potaz, že odporové síly působí po celou dobu proti tíhovému zrychlení. Nyní opustíme tečkovou notaci a rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{g - k v_y^2} = -\mathrm{d}t \,.$$

Levou stranu dokážeme pomocí substituce $v_y = \sqrt{g/k}\varphi$ upravit do tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{gk}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1 + \varphi^2} \,.$$

Nyní nezbývá než integrovat. Na levé straně bychom ještě mohli použít substituci hyperbolickými funkcemi, ale zde si vystačíme s tím, když se podíváme do tabulek a nalezneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{argtgh} x + C \,.$$

Integrací získáme rovnici

$$\sqrt{\frac{1}{gk}} \operatorname{argtgh}\left(v_y \sqrt{\frac{k}{g}}\right) + C = -t \,.$$

Dosadíme $t = 0$ a nalezneme

$$C = -\frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{argtgh}\left(v_{0y} \sqrt{\frac{k}{g}}\right) \,.$$

Pár úpravami získáme závislost rychlosti na čase

$$v_y(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tgh}\left(\operatorname{argtgh}\left(v_{0y}\sqrt{\frac{k}{g}}\right) - \sqrt{gk}t\right) \,. \tag{6}$$

Závislost rychlosti na čase získáme další integrací podle času, bez dlouhého rozepisování (opět tabulkový integrál) pouze uvedeme

$$y(t) = -\frac{1}{k} \ln\left(\cosh\left(\operatorname{argtgh}\left(v_{0y}\sqrt{\frac{k}{g}}\right) - \sqrt{gk}t\right)\right) \,,$$

přičemž jsme předpokládali $y(0) = 0$. Limitou $t \to \infty$ v rovnici (6) nalezneme terminální rychlost

$$v_\infty = \sqrt{\frac{g}{k}} \,.$$

[9] Pokud bychom ovšem prováděli experiment ve velmi řídkém prostředí, mohli bychom využít Stokesův odpor, jež je lineárně závislý na rychlosti. Pro něj jsou pohybové rovnice analyticky řešitelé, přičemž x a y mají tvar složení z lineární funkcí, logaritmů a exponenciál.

což bychom ale snadno dokázali také porovnáním tíhové a odporové síly.

Nakonec ještě zmíníme dva problémy, které mohou při řešení pohybu těles v tíhovém poli Země nastat. Pokud budeme házet skutečné těleso a ne hmotný bod, tj. hodíme-li například míč, může se na trajektorii projevit rotace tělesa. Pustíme-li míč volným pádem, ale před vypuštěním ho roztočíme, bude se míč při rotaci v kladném směru pohybovat doprava a při rotaci v záporném směru doleva. Tento efekt je způsoben vlivem rotace míče na okolní vzduch a nazývá se Magnusův jev.[10] Rozebírat ho zde nebudeme, neboť souvisí spíše s hydrodynamikou.

I se hmotným bodem se můžeme dostat do problémů, hodíme-li ho na příliš velkou vzdálenost směrem k zemským pólům. V takovém případě je potřeba začít řešit problém v neinerciální soustavě Země a připočíst tzv. Coriolisův jev,[11] který způsobí mírné stočení letu na západ nebo na východ, podle toho, na které polokouli jsme a kterým směrem házíme.

Příklad 3. Nacházíme se na svahu s elevačním úhlem φ. Směrem se svahu dokážeme hodit nejvýše do vzdálenosti (měřeno po svahu) $D_1 = 63\,\mathrm{m}$, směrem do svahu $D_2 = 52\,\mathrm{m}$. Počáteční rychlost je v obou případech stejná. Jaký sklon má svah? [Odpověď: $\varphi \doteq 4{,}5\,°$]

Příklad 4. Pro volný pád v prostředí s newtonovským odporem vyjádřete závislost rychlosti na poloze $v_y(y)$. Můžete využít rovnice odvozené v textu výše. Dále odvoďte vztah pro $v_y(t)$ pro vrh svisle vzhůru.

1.4 Kosmické rychlosti

Zde se krátce vrátíme k situaci, kdy je vzdálenost pohybujícího se předmětu od země nezanedbatelná vůči poloměru planety. Zavádíme zde dva důležité rychlostní limity: kruhovou rychlosti (1. kosmická rychlost) a únikovou rychlost (2. kosmická rychlost).

Kruhová rychlost udává rychlost potřebnou k tomu, aby se těleso mohlo pohybovat po kruhové dráze v blízkosti povrchu Země (či jiné planety). Požadujeme tedy, aby přitažlivá síla udržovala těleso na kruhové dráze o poloměru R_E. Gravitační síla (nemluvíme o tíhové, neboť řešíme úlohu v inerciální soustavě spojené se středem Země) potom představuje dostředivou sílu kruhového pohybu a z rovnosti

$$m\frac{v_1^2}{R_\mathrm{E}} = \frac{GMm}{R_\mathrm{E}^2}$$

vyjádříme první kosmickou rychlost

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_\mathrm{E}}} \doteq 7{,}1\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Obecně můžeme zavést kruhovou rychlost i pro vzdálenější objekty, které se pohybují po kruhové dráze kolem planety, např. družice umělé i přirozené.

Druhá kosmická rychlost udává rychlost potřebnou k úniku z gravitačního vlivu Země. Kinetická energie, kterou tělesu při startu ze zemského povrchu dodáme, se tedy musí rovnat změně potenciální energie z povrchu Země do nekonečna (prakticky do $r \gg R_\mathrm{E}$). Z rovnice

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{GMm}{R_\mathrm{E}}$$

dostaneme

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R_\mathrm{E}}} = \sqrt{2}v_1 \doteq 11{,}2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

[10] Velmi pěkný příklad tohoto efektu je zachycen ve videu `https://www.youtube.com/watch?v=QtP_bh2lMXc`.

[11] Především na to nesmíte zapomenout tehdy, když chcete ostřelovat Paříž: `https://en.wikipedia.org/wiki/Paris_Gun#Use_in_World_War_I`.

Nezapočítáváme zde pohyb Země a gravitační ovlivnění dalšími tělesy.

Můžeme také definovat třetí kosmickou rychlost, jež je potřebná pro únik z gravitačního vlivu Slunce, přičemž začínáme na oběžné dráze Země. Její velikost záleží na tom, jak využijeme rotace Země okolo Slunce.

Pokud házíme rychlostí menší než únikovou a nejedná se o vodorovný vrh kruhovou rychlostí, začne se těleso pohybovat po elipse, jejíž tvar podléhá Keplerovým zákonům. Pro nižší rychlosti tato elipsa protne Zemi a těleso dopadne. Pokud budou rychlosti opravdu velmi malé, opíše těleso pouze malý úsek elipsy, který lze dobře aproximovat parabolou, čímž se dostaneme zpět k výše rozebraným vrhům v homogenním tíhovém poli.

Příklad 5. Vypočtěte minimální hodnotu třetí kosmické rychlosti za předpokladu, že se v naší sluneční soustavě nachází pouze Slunce a Země.

1.5 Raketové lety

Posledním speciálním případem pohybu v tíhovém poli, který zde rozebereme, je pohyb tělesa, kterému se s časem lineárně mění hmotnost. Speciálně se budeme zabývat startem rakety, kdy se pohybujeme svisle vzhůru a ztrátu hmotnosti představují spaliny vyvrhované reaktivním motorem proto směru letu.

Nechť raketa spolu s palivem váží $m(t)$ v čase t a pohybuje se ve směru y. Počáteční podmínky úlohy jsou $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $m(0) = m_\mathrm{r} + m_\mathrm{p}$, kde m_r je hmotnost rakety a m_p celková hmotnost paliva. Úniková rychlost spalin (v soustavě spojené s raketou) je v_e. Pro nalezení pohybové rovnice potřebujeme znát změnu hybnosti rakety v čase

$$\frac{\mathrm{d}(m\dot{y})}{\mathrm{d}t} = \dot{m}\dot{y} + m\ddot{y}\,.$$

Další změnu hybnosti v systému představují spaliny (dříve palivo, hmota se neztrácí) unikající z rakety. Tato změna hybnosti je

$$-\dot{m}v_\mathrm{o}\,,$$

kde jsme zavedli rychlost v_o spalin vůči nehybnému pozorovateli, neboť rychlost rakety se také snažíme vyjádřit vůči zemi. Tuto rychlost přepíšeme pomocí galileovské transformace jako

$$v_\mathrm{o} = \dot{y} - v_\mathrm{e}\,.$$

Jelikož celková hybnost systému se nemění, dostáváme rovnici

$$0 = -\dot{m}\dot{y} + \dot{m}v_\mathrm{e} + \dot{m}\dot{y} + m\ddot{y}\,,$$

po úpravě do tvaru typického pro pohybovou rovnici

$$m\ddot{y} = -\dot{m}v_\mathrm{e}$$

Přepisem $\ddot{y} = \dot{v}_y$, převedením m a integrací obou stran do času t dostaneme

$$v_y(t) = v_\mathrm{e} \ln\frac{m(0)}{m(t)}\,.$$

Tato rovnice samozřejmě platí jen do té doby, než se palivo vyčerpá. Speciálně pro chvíli, kdy dojde k jeho vyčerpání, máme

$$v_\mathrm{max} = v_\mathrm{e} \ln\frac{m_\mathrm{r} + m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{r}}\,.$$

Pokud chceme připočíst efekt tíhového zrychlení, stačí udělat jednoduchý dodatek

$$v_y(t) = v_\mathrm{e} \ln \frac{m(0)}{m(t)} - gt\,.$$

Při skutečném startu rakety ze Země je samozřejmě potřeba připočíst odpor vzduchu a další vlivy.

Příklad 6. Nalezněte dráhu, kterou urazí dětská raketa v homogenním gravitačním poli bez odporu vzduchu. Předpokládejme, že nějakým zázrakem letí svisle vzhůru a vůbec se nám nestáčí. Znáte hmotnost rakety bez paliva $m_\mathrm{r} = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, hmotnost paliva na počátku $m_\mathrm{p}(0) = 0{,}2\,\mathrm{kg}$, únikovou rychlost spalin $v_\mathrm{e} = 50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a časovou závislost hmotnosti paliva v raketě $m_\mathrm{p}(t) = m_\mathrm{p}(0) - \mu t$, kde $\mu = 0{,}025\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$.