Zadání 6. série

Termín odeslání: 27. května 1996

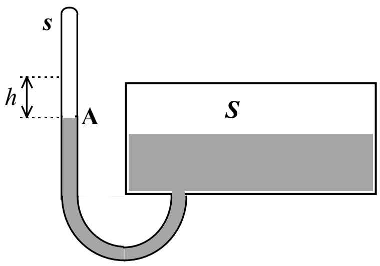
Úloha VI . 1 ... ***gejzír na betoně***

Jednoho krásného dne se studentíci na jednom nejmenovaném gymnáziu nudili, a tak si vymysleli zábavu. Do igelitového pytlíku nabrali vodu a vyhodili jej z okna. Na betonovém chodníku to udělalo krásný gejzír. Ale co čert nechtěl – zrovna přišel do třídy profesor fyziky a zeptal se jich: „Z jaké výšky byste museli vyhodit ten pytlík z okna, aby vám ta voda přešla do varu?“ No, a my se vás ptáme na totéž. Můžete zanedbat odpor vzduchu, popřípadě zauvažovat, co by se stalo, kdyby tam odpor vzduchu byl.

Úloha VI . 2 ... ***rtuťová koupel***

Máme soustavu kapiláry o průřezu $\boldsymbol{s}$ a nádoby o vodorovném průřezu $\boldsymbol{S}$, která je naplněná rtutí jako na obr. 1. Z kapiláry je vyčerpán vzduch. Když uvolníme kolíček **A** v kapiláře, stoupne hladina rtuti v kapiláře o $\boldsymbol{h}$ a v nádobě klesne o $\boldsymbol{\Delta h}$. Jaká se při tom uvolní energie? Předpokládejte, že S C s a h C Δh.

Obr. A



Úloha VI . 3 ... ***kap, kap***

Jistě se vám už někdy stalo, že jste při vaření ukápli na mírně horkou plotýnku či pánev kapku vody. Potom jste si mohli kromě nepříjemného sykotu všimnout, že chvilku kapka poskakuje po plotýnce, a pak velice rychle zmizí. Jak to, že se menší kapka vypařuje rychleji než kapka větší?

Úloha VI . 4 ... ***žabák Břéťa***

Na rybníce plave čtvercová deska o hmotnosti $\boldsymbol{M}$ a straně $\boldsymbol{l}$ a na jejím okraji sedí žabák Břéťa s tělesnou hmotností $\boldsymbol{m}$. Jakou rychlostí a jakým směrem musí vyskočit, jestliže se chce trefit přesně na druhý konec desky? Předpokládejte, že se deska při odrazu minimálně ponoří, odpor prostředí můžete zanedbat.

Úloha VI . 5 ... ***Studentova žárovka***

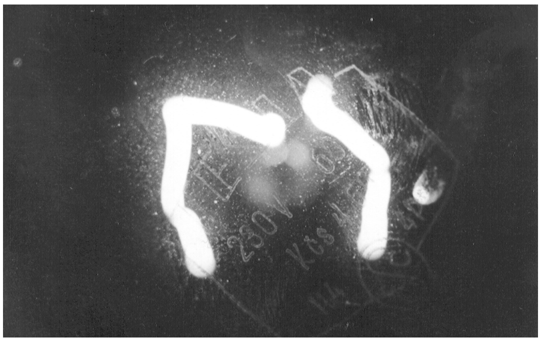
Píše se rok 1963. V nejmenovaném pokoji na Strahovských kolejích se připravuje nejmenovaný Student ČVUT na zkoušku z elektřiny a magnetismu. Blíží se vánoce, brzy se stmívá, a tak studenti po celé koleji pomáhají svým unaveným očím svitem žárovek (60W za 4,60 Kč, jak se můžete dočíst na obr. 2). Když tu náš Student v zamyšlení pozvedne zrak k jedinému zdroji světla v pokoji, jeho oči sají proud fotonů, myšlenky však bloudí kdesi kolem Maxwellova tenzoru elmag. pole. A jak to tak bývá, ač duchem nepřítomen, podvědomí spustí poplašný signál: „Tady není něco v pořádku.“

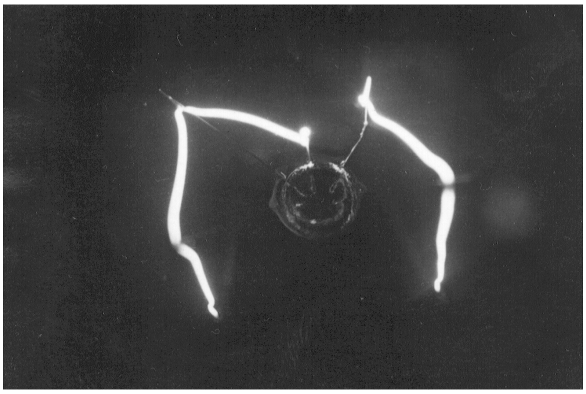
Student vyskočí z postele, jsa fotoamatér rychle doběhne pro svůj fotoaparát a nafotografuje dva snímky své svítící žárovky (viz obr. 2). Poté jako správný fyzik počne experimentovat. Nejprve si všimne, že žárovka, i když má přerušenou spirálku, svítí pro lidské oko nezměněným jasem. Vypne-li a okamžitě zapne spínač lampy, žárovka svítí vesele dál. Pečlivě si také prohlédne drátky, jež drží wolframovou spirálku v prostoru baňky. Nakonec uzná, že viděl dost, a aby si ověřil, že rozřešil „parafyzikální“ jev v souladu s učebnicí pohozenou na posteli, vypne lampu asi na dvě sekundy a opět zapne. Ocitne se však v nefalšované tmě strahovské noci.

Nakonec poznamenejme, že tento příběh se za hluboké totality skutečně odehrál, fotografie, které jsme se pokusili otisknout v co nejkvalitnější podobě, nejsou podvrhem a vše, co vidíte a co jste se dozvěděli, vás dovede k správné odpovědi na otázku:

„Jak může žárovka s přerušenou spirálkou svítit nezměněným jasem!?“

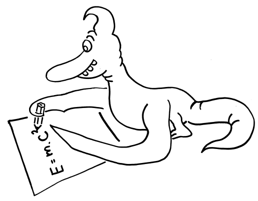
Obr. B





Úloha VI . 6 ... ***hledání jednoho malého bodu***

V této sérii bychom po vás chtěli, abyste se pokusili změřit ohniskovou vzdálenost lupy. Pokud nemáte lupu, poproste třeba svého dědečka, jestli by vám na chvilku nepůjčil brýle na čtení. Nezapomeňte, že brýle mají obvykle každé sklo jinak opticky mohutné.



Řešení 4. série

Úloha IV . 1 ... ***Pozor, přímý přenos*** *(maximum 5 bodů, řešilo 145 studentů)*

Tato úloha byla vymyšlena k tomu, abyste se naučili sami si zvolit, co při řešení vzít v úvahu, kde si co zjednodušit a co zanedbat. Příroda s sebou přináší problémy, které nejsou dostatečně zadané, fyzik je nucen dělat řádové odhady, lineární zjednodušování, zanedbávání nejrůznějších efektů, aby vůbec k něčemu dospěl.

K Honzíčkovi se šíří signál rychlostí zvuku v přímo od orchestru a to na vzdálednost h. Pepíček své tóny dostane tak, že z mikrofónů umístěných nad orchestrem musí rádiový signál překonat vzdálenost p rychlostí c až do Pepíčkova přijímače. Podle zadání příkladu potom snadno určíme h:

$$h = \frac{pv}{c}\,. \qquad (1)$$

Rozumná řešení, jak určit vzdálenost p, byla dvě a lišila se od sebe zhruba o jeden řád. Signál se do Prahy může dostat buďto přes telekomunikační družici, anebo zprvu podmořským kabelem přes Atlantik a poté třeba z Londýna na dlouhých vlnách.

Některé výchozí údaje:

$v = 345\ \mathrm{m.s^{-1}}$ (za teplot asi 20°C a normálního tlaku)
$c = 3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$
New York: 41° s.š. 74° z.d.
Praha: 50° s.š. 14,5° v.d.

a) telekomunikační družice

Družice určené pro přenos informací z jednoho konce světa na druhý musí mít jednu základní vlastnost – být snadno zaměřitelné z místa přenosu. Z tohoto důvodu se používají tzv. geostacionární družice, které mají periodu oběhu stejnou jako je doba rotace Země. Obíhá-li taková družice po orbitě nad rovníkem, nachází se pořád nad stejným místem povrchu Země, a je tudíž snadno zaměřitelná. Dosadíme-li do pohybového zákona družice (dostředivou silou mv^2/r je síla gravitační $\kappa mM/r$) za dobu oběhu T = 24 hod., zjistíme, že se nachází na kruhové orbitě ve výšce

$$h = \sqrt[3]{\frac{\kappa M}{4\pi^2} T^2}\ \text{, číselně } h = 35\,700\ \text{km.} \qquad (2)$$

Započítáme-li, případně odhadneme-li to, že New York a Praha neleží přímo na rovníku a jsou od sebe nějak vzdáleni, dojdeme k celkové hodnotě p = 73 000 km. Mnozí jste vzdálenost určili tak, že jste si zavedli kartézský systém souřadnic s počátkem ve středu Země, našli souřadnice New Yorku, Prahy a družice a z nich potom snadno Pythagorovou větou hodnotu p. Je to pěkný matematický přístup, já se však spokojím s pouhým odhadem. Podle (1) dostaneme h = 84 m.

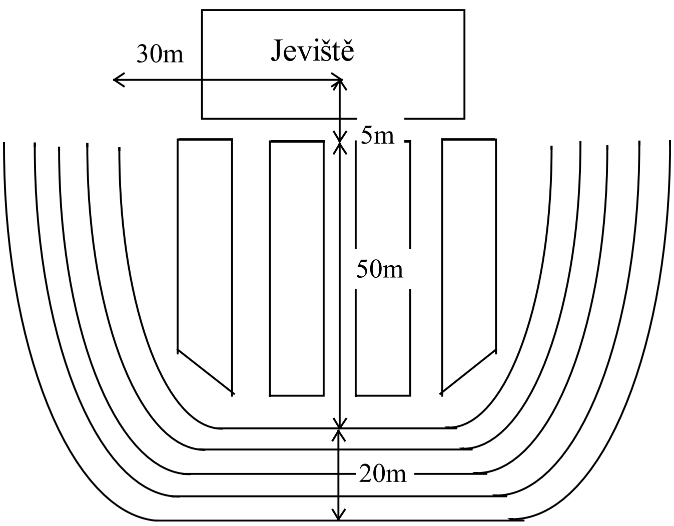
b) podmořský kabel

Zjistíme nejmenší možnou vzdálenost New York – Praha jako délku oblouku na kouli, jíž Zemi nahradíme. Tady jste se mnozí dopouštěli té chyby, že jste za poloměr oblouku vzali poloměr Země R_z a ne $R_z.\cos\phi$, kde ϕ střední zeměpisná šířka pro New York a Prahu (ϕ = 45,5° s.š.). Délka oblouku pak vyjde 6900 km, můžeme proto směle položit p = 7000 km. Podle (1) máme h = 8 m, skutečně o řád méně než v *a)*.

c) Carnegie Hall

A jak je to vlastně s parametry naší koncertní síně? Na obr. 3 jsem se pokusil naznačit, jak vlastně Carnegie Hall, postavená na konci minulého století, vypadá. Dočetl jsem se, že pojme asi 2760 posluchačů, můj plánek je inspirován dobovou fotografií. Vzdálenost řad jsem odhadl na 1 m. Přiznám se, že jsem se snažil rozměry spíše nadhodnocovat než naopak (např. velikost balkónů). I tak podle výsledků *a)* musí Honzíček sedět na tom nejnepříznivějším místě galerie – posledního balkónu. Naopak podle výsledků *b)* má jedno z těch nejlepších míst v prvních řadách přímo před dirigentem. Rozmyslete si už sami, na co asi malý český človíček má. Zajímavé je, že nikoho nenapadlo, že může Honzíček sedět „uhlopříčně", i když to dá jenom pár metrů.

Obr. C – Carnegie Hall



Úlohy jste se zhostili vcelku slušně, při standartním bodování jsem za řešení *a)* dával 3 body a za řešení *b)* 2 body. Udělil jsem i několik bonusů za dobrý nápad či celkově dobré zpracování úlohy. U pár lidí se vyskytla idea šíření signálu odrazy od ionosféry, na tak velkou vzdálenost by to asi skutečně nefungovalo. Chtěl bych také zdůraznit, že odhadovat neznamená vymýšlet si, jak jste někteří předváděli sypání si čísel z rukávu. Nakonec ještě poznamenejme, že úloha může mít trochu nestandartní řešení, neboť při poslechu především ve větších vzdálenostech hraje roli odrážení zvuku od stěn a stropu sálu.

Citlivost lidského ucha je tak asi 0,1 s, tudíž uvážíme-li Honzíčka jako měřící přístroj s takovou citlivostí, námi spočítaný efekt bude překryt chybami. Honzíček pak nebude schopen Pepíčkovi přesně říci, kdy co slyšel, aby si ověřili, že skutečně každou notu slyšeli ve stejný okamžik.

Halef

Úloha IV . 2 ... *opilci v New Yorku* *(maximum 6 bodů, řešilo 115 studentů)*

Nejdříve si napíšeme parametrické rovnice pohybu obou kamarádů v závislosti na čase *t* (začátek pohybu v nulovém čase).

Vodorovný směr: $x_1 = -l + vt,$ $y_1 = A.\sin(2\pi vt)/T,$

svislý směr: $x_2 = -A.\sin(2\pi vt)/T,$ $y_2 = -l + vt.$

Nyní si vyjádříme jejich vzdálenost *s* v závislosti na čase *t* pomocí Pythagorovy věty:

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2(vt - l)^2 + 2A^2 \sin^2(\frac{2\pi vt}{T})} .$$

Až sem vedla většina vašich řešení. Dále potřebujeme zjistit, kdy je tato vzdálenost nejmenší, tzn. je třeba nalézt minimum funkce *s(t)* v závislosti na čase. Mnozí z vás se pustili do numerického hledání minima tak, že nechali na počítači (nebo řidčeji v ruce) probíhat čas od nuly do nějakého velkého čísla s tím, že přičítali nějaké malé Δt, a hlídali si, zda vzdálenost v příslušném čase není menší, než dosavadní minimum. Tento postup má jednu drobnou nevýhodu (která se ale naštěstí v tomto případě neprojeví), že pokud se ve funkci vyskytne nějaký velký „skok dolů“ na intervalu kratším než Δt, tak ho algoritmus přejde naprosto bez povšimnutí. Bez znalosti derivací je to však řešení nejsnažší. Já raději předvedu řešení, jaké by mi připadlo korektnější, ke kterému se však bohužel přiznali (viz níže) jen asi tři řešitelé.

Využijeme matematickou větu, která tvrdí asi toto: *pokud má funkce v bodě* x_0 *minimum, tak její derivace je v bodě* x_0 *nulová (pokud tato derivace existuje, např. pokud je funkce v tomto bodě spojitá!)* – tato věta **neplatí naopak**, jak ji takřka všichni používají! Funkce *s(t)* vskutku je spojitá a také je všude derivovatelná, a tak nám nic nebrání ji zderivovat. Příjemnější však bude pracovat s funkcí $w(t) = s^2(t)/2$, která má zřejmě minima právě v těch bodech, kde je má i funkce *s(t)*, neboť druhá mocnina je na intervalu $(0,\infty)$ rostoucí funkcí. Proto položíme

$$\frac{dw}{dt} = 2v^2 t - 2vl + 2A^2 \frac{\pi v}{T} \sin(\frac{4\pi vt}{T}) = 0 .$$

Tato rovnice nejde nijak rozumně řešit analyticky (jednomu řešiteli se to povedlo moc pěkně nahrazením sinu lineární funkcí, ale není to zas tak triviální a už vůbec ne obecné), snadno to však jde numericky, třeba nejjednodušší metodou půlení intervalu – byl tomu věnován seriál na pokračování v minulém ročníku. Zde je krátký výpis pascalovského programu:

```
var d,t,a,b:real;
function dd(t:real):real;    {derivace funkce w v bodě t}
   begin dd:=2*t-54+50*pi/12.6*sin(4*pi*t/12.6);end;
begin
```

```
   a:=20;b:=27;          {krajní body intervalu, kde hledám minimum}
   repeat
     if dd((a+b)/2)>0 then b:=(a+b)/2 else a:=(a+b)/2;
       {rozpůlení intervalu}
   until b-a<1e-4;          {1e-4 ... požadovaná přesnost}
   t:=(a+b)/2;          {výsledný čas leží někde na intervalu <a,b>}
   d:=sqrt(2*(t-27)*(-27+t)+50*sin(2*pi*t/12.6)*sin(2*pi*t/12.6));
   writeln(t:10:3,d:10:3);
end.
```

Výsledek zní, že v čase asi 25,5 s budou vzdáleni asi 2,4 metru. Taková by měla být přesnost výsledku vzhledem k zadaným hodnotám, i když vzhledem k interpretaci zadání by se víc hodila odpověď, že „někde skoro uprostřed křižovatky do sebe skoro vrazej“. Pro všechny, kteří se snažili o strašně moc desetinných míst – jen málokdo to měl dobře od nějaké páté cifry dál správně – oficiální verze je čas 25.4516919030 s a vzdálenost 2.3617848417 m (shodl se mnou ve všech místech pouze Matouš Jirák, mimochodem použil tutéž metodu). Ale znovu upozorňuji, uvádějte výsledek pouze s takovou přesností, s jakou byla úloha zadána.

Co se týče algoritmů, celkem mě mrzelo (i když na hodnocení to nemělo vliv), že naprostá většina řešitelů přešla výpočet poznámkou „a podle počítače výsledek zní“. Jednak u této úlohy to byla docela důležitá součást řešení, ale také pokud vám počítač hodil špatné číslo, znamenalo to maximální bodovou ztrátu a ani jsem vám nemohl říct, v čem je chyba.

Zmínil bych se ještě o jedné chybě. Leckdo zaokrouhlil výraz $2\pi t/T$ jako 0,5. Sice jsem to tak při vymýšlení úlohy zamýšlel, ale ukázalo se, že to ovlivňuje vzdálenost již na prvním desetinném místě, což je docela nepříjemné. Pro ty, kteří toto zjednodušení přešli mlčením, to znamenalo bodovou ztrátu, jinak jsem to ale vzhledem k přibližnosti celého zadání uznával. Zásadní chyba tedy byla, když někdo užil tuto fintu a pak vesele vypsal (špatný) výsledek na 6 desetinných míst!

Poslední poznámka se týká bodového hodnocení. Na úlohu jsem dostal 6 bodů, což mi připadlo dost, a tak za standardní řešení jsem dal 5 bodů, a pokud mě řešení něčím zaujalo (grafické zpracování, precizní matematické odůvodnění, a podobně), dal jsem mu bod (výjimečně dva) navíc. Pod pojmem grafické řešení jsme mysleli nikoliv přibližný obrázek, nýbrž nějakou přesnou geometrickou konstrukci, takže za tento postup jsem příliš bodů nedal.

David Stanovský

P.S.: Děkuji všem, co chválili mé obrázky na obálkách.

Úloha IV . 3 ... *stvoření hvězd* *(maximum 6 bodů, řešilo 57 studentů)*

Nejprve si převeďme problém z oblaku plynu a spousty částic na problém dvou částic, který zajisté vyřešíme snadněji.

Jak jistě víte a jak dokázal i Newton, máme-li kulovou slupku, která má všude stejnou objemovou hustotu, můžeme ji nahradit hmotným bodem ve středu této slupky – to však platí pouze pro síly úměrné – tedy pro gravitační nebo coulombovské.

Odtud je krůček k tomu, abychom kouli, u které je hustota závislá pouze na vzdálenosti od středu (a nebo jak říkají lidé, kteří chtějí udělat dojem: „hustota je rozmístěna radiálně symetricky“), nahradili v případě výpočtu gravitačních sil hmotným bodem ve středu koule. Samozřejmě, jednu částečku si necháme, aby mělo co padat do středu.

Tento čistě gravitační problém – za jak dlouho dopadne malá částečka na velkou částici – můžeme řešit několika způsoby.

1) přímou integrací (pouze pro šílence, nadšence a jiné matematicko-fyzikální talenty),

2) „podvodem“ a pokud možno co nejjednodušeji – pomocí Keplerových zákonů,

3) ještě větším „podvodem“ – tedy numericky.

Přičemž všechny způsoby jsou správné a vycházejí stejně.

Ad 1) řešení přímou integrací.

Vyjděme ze zákona zachovaní energie pro volně padající částici, na počátku je potenciální energie největší a kinetická nejmenší (nulová), během času se potenciální energie zmenšuje, kinetická zvětšuje,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \kappa Mm\frac{1}{r} = E_{celková} = -\kappa Mm\frac{1}{R}.$$

Rychlost je derivace dle času, $v = dr/dt$, dostáváme diferenciální rovnici prvního řádu

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \kappa M\frac{1}{r} - \kappa M\frac{1}{R}.$$

Nyní máme diferenciální rovnici 1. stupně, kterou můžeme řešit separací proměnných, to znamená, že všechny r (a jedno dr) převedeme na jednu stranu rovnice a všechny t (a jedno dt) na stranu druhou. Tento postup je většinou nejjednodušší metoda řešení diferenciálních rovnic, jde však použít pouze pro diferenciální rovnice 1. stupně. Odseparováním r nalevo a t napravo dostáváme (současně jsme jaksi mimochodem odmocnili, připsali integrály, doplnili a přepsali dr na druhou stranu):

$$\int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\kappa M}{r} - \frac{2\kappa M}{R}}} = \int_0^T dt \text{, neboli } \frac{1}{\sqrt{2\kappa M}}\int_R^0 \sqrt{\frac{rR}{R-r}}dr = [t]_0^T = T.$$

Zatímco pravá strana je lehko řešitelná, s levou stranou budou jistě problémy. Toto je onen slibovaný šílený integrál, jehož řešení jsem zbaběle opsal. Máte-li volný víkend, zkuste si přepočítat řešení. Pro začátek zkuste substituci $r = R\sin^2\alpha$, která by měla po dosazení vésti na

$$T = \frac{2R\sqrt{R}}{\sqrt{2\kappa M}}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2\alpha\, d\alpha' = \sqrt{\frac{2R^3}{\kappa M}}\left[\frac{\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \pi\sqrt{\frac{2R^3}{\kappa M}}.$$

Nyní se již pouze dosadí za hmotnost hvězdy její poloměr, hustota a nějaké ty konstanty, tedy $M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$, což po dosazení do doby pádu T dává konečný výsledek

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{32\kappa\rho}}.$$

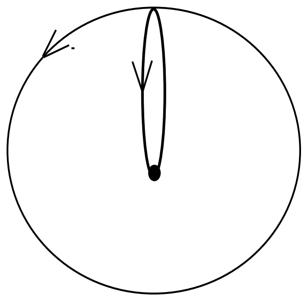
Číselně pro zadané hodnoty dostáváme nějakých 470 tisíc let.

Je mi jasné, že tyto výpočty jsou více než příšerné, pokud se je rozhodnete přeskočit, zaručeně téměř o nic nepřijdete. Proto mám v záloze další možnost řešení.

Ad 2) řešení fíglem pomocí Keplerových zákonů

Použijeme následující trik: pohybuje-li se malá částečka v gravitačním poli větší částice, lítá spokojeně po elipse, jež má větší částici v ohnisku a splňuje 3. Keplerův zákon

Obr. D



$$\frac{a^3}{T_{ob}^2} = konst$$, kde a je velká poloosa elipsy a T_{ob} perioda oběhu částice.

Budeme-li elipsu zužovat a zužovat, což odborně znamená snižovat její excentricitu, časem se z ní stane úsečka, velmi protáhlá elipsa, která ale také splňuje Keplerovy zákony (viz obr. 4). Tato trajektorie vpodstatě odpovídá volnému pádu částečky do centra, což je přesně to, co potřebujeme.

Určeme dobu oběhu částečky T_{ob} letící po kruhové dráze z rovnosti přitažlivých a gravitačních sil:

$$m\omega^2 R = \frac{\kappa Mm}{R^2}.$$

Odtud pomocí $\omega = \frac{2\pi}{T_{ob}}$ dostáváme $T_{ob} = 2\pi \sqrt[3]{\frac{R^3}{\kappa M}}$.

My však můžeme ze znalosti poloměru a hustoty určit hmotnost $M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$, z čehož máme samozřejmě radost, poněvadž se nám vykrátí poloměr R. Tím obdržíme konečný vztah pro dobu oběhu částečky po kruhové dráze:

$$T_{ob} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho\kappa}}.$$

Dále použijeme znalost Keplerových zákonů, tj. $\frac{R^3}{T_{ob}^2} = \frac{a^3}{(2T)^2} = \frac{(R/2)^3}{(2T)^2}$, neboť doba pádu tělesa do středu je poloviční době oběhu velmi protáhlé elipsy (to vysvětluje ono $2T$) a délka hlavní poloosy velmi protáhlé elipsy je polovina vzdálenosti R.

Po sesumírování několika předchozích vztahů se vyloupne pro dobu pádu oné poslední částečky, a tím také doba smrsknutí mlhoviny do bodu (podle Newtona, termodynamika a Einstein zde mají dovolenou), vztah

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{32\kappa\rho}}.$$

Ad 3) numerické řešení

Numerických řešeních je samozřejmě děsně moc, na to je celá věda zvaná numerická matematika. V podstatě máte dvě cesty:

a) numericky vyřešíte onen šílený integrál z první cesty řešení (přímou integrací),

b) numericky řešíte přímo diferenciální rovnici

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\kappa M}{r^2}.$$

(Newtonův pohybový zákon), s těmito počátečními podmínkami:

počáteční poloha: $r = R$,

počáteční rychlost: $v_0 = 0$.

Na závěr už jenom princip jednoho poměrně jednoduchého algoritmu se slušnou přesností: znám polohu částečky $\rightarrow$ určím zrychlení pomocí gravitačního zákona $\rightarrow$ spočtu novou rychlost $\rightarrow$ spočtu novou polohu částice a toto opakuji až do omrzení, tedy

$$a_{i-1} = -\frac{\kappa M}{r_{i-1}^2} \quad \rightarrow \quad v_i = v_{i-1} + a_{i-1}\,dt \quad \rightarrow \quad r_i = r_{i-1} + v_{i-1}\,dt + {}^1/_2\, a_{i-1}\,dt^2,$$

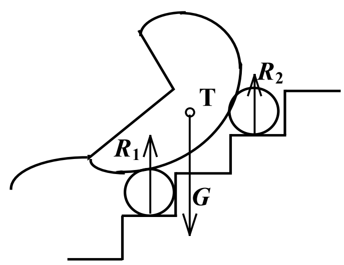
kde dt je časový krok simulace. Až vám klesne r_i pod nulu, tak už jste se zhroutili.

Jaroslav Hamrle

Úloha IV . 4 ... ***drama na schodech*** *(maximum 3 body, řešilo 133 studentů)*

Ačkoliv to tak nevypadá, kočárek zůstane stát (aspoň teoreticky) na místě, protože se nachází v rovnovážné poloze a tudíž nemá důvod se někam pohybovat, předpokládáme-li, že ho maminka zanechala v klidu. To, že těleso je v rovnovážné poloze, znamená nulovou výslednici vnějších sil (tedy těleso nemá tendenci začít se pohybovat translačně) a nulový výsledný vnější moment (těleso nezačne rotovat).

Obr. E

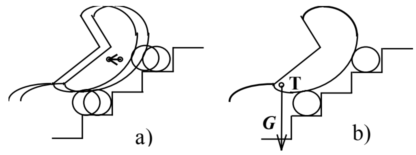


Nejdříve se podívejme na to, které síly působí na kočárek. Je to tíhová síla v těžišti a pak dvě resp. čtyři reakční síly, kterými tlačí schody do kol kočárku. Reakční síly jsou vždy kolmé k povrchu (a to nejen tady). Proč tomu tak je? Obecně platí, že vazbové síly jsou kolmé k vazbě, tj. například k desce stolu. Kdyby tomu tak nebylo, znamenalo by to, že by tečná složka síly urychlovala těleso rovnoběžně s povrchem a tudíž mu dodávala energii. Schody jsou sice šikmé, ale lokálně (tzn. pod koly) je povrch vodorovný. Můžeme tedy shrnout, že síly působící na kočárek jsou pouze svislého směru, gravitace působí dolů, reakce schodů nahoru. Jsou tedy navzájem rovnoběžné, jak se můžete přesvědčit na obr. 5.

Podívejme se nyní na naši translační rovnováhu. Všechny síly působící na kočárek jsou svislé, jejich výslednice má tedy svislý směr nebo je nulová. Kdyby nebyla nulová, tak by se kočárek nadzvedl a přestaly by působit reakční síly zespoda a kočárek by opět klesl. Dolů se kočárek pohybovat nemůže, protože pak síly $\boldsymbol{R}_1$ a $\boldsymbol{R}_2$ rostou až do chvíle, kdy vyrovnají gravitaci. Výslednice sil je tedy nulová a těleso (kočárek) se nebude translačně pohybovat.

Ke stejnému výsledku můžeme dojít pomocí energetických úvah. Na počátku je vše v klidu, tzn. $E_k = 0$ a zvolme nulovou hladinu potenciální energie tak, aby i $E_p = 0$. Tedy celková energie $E_k + E_p = 0$. Pokud kočárek popojede o kousek, musí získat rychlost, což odpovídá nárůstu kinetické energie. Ale co se děje s potenciální energií? Ta zůstává konstantní, neboť výška těžiště zůstává konstantní, opět jen lokálně, pokud jsme na stejném schodě. Pak ale $E_k + E_P = 0 +$ něco > 0, což by znamenalo neplatnost zákona zachování energie. Možná se ptáte, proč lokálně. To znamená že vše musí platit pro jakékoliv malé změny polohy. U kočárku to znamená, že stojí stále na stejném schodě (obr. 6a).

Obr. F



Podobně se podíváme na problém rotace. Těleso může rotovat vpodstatě kolem dvou os, těmi jsou osy předních a zadních kol kočárku. Tak jak je obrázek nakreslen (především umístění těžiště vůči kolům), musí se těžiště kočárku při rotaci kolem zadních kol zvedat, tedy E_p roste a zároveň kočárek získává nějakou úhlovou rychlost, tedy i E_k roste. Celková energie opět roste, což znamená spor se zákonem zachování energie. Kočárek nemůže začít rotovat. Jinak by to ale dopadlo, pokud by těžiště bylo mnohem více vlevo, při rotaci by těžiště klesalo a $E_p < 0$, $E_k > 0$ a celková energie by se zachovávala ($E_p + E_k = 0$) – viz obr. 6b. Tak tomu ale naštěstí podle zadání není.

Abych tedy shrnul, kočárek se nezačne točit ani posouvat, zůstane přesně tam, kde jej matka zanechala. Doufám, že jsem vás neodradil úvahami z teoretické mechaniky, které jsem se snažil propašovat do řešení tak snadného příkladu a že nám zachováte přízeň.

Jan Hradil

Úloha IV . 5 ... ***hrátky se rtutí*** *(maximum 4 body, řešilo 125 studentů)*

Předem bych chtěl upozornit, že se jednalo o rtuť a z obrázku šlo vykoukat, že v tomto případě rtuť nesmáčela stěny nádoby ani kapilár. Dochází tak ke kapilární depresi a hladina poklesne, což většina z vás správně pochopila. Úlohu lze řešit, pokud přijmeme jisté zjednodušující předpoklady: nádoba se rtutí má mnohem větší rozměr než kapiláry, rtuti je dostatek na ponoření kapilár a především tloušťka stěny vnitřní kapiláry je zanedbatelná vůči průměru, jinak bychom potřebovali tuto tloušťku znát.

Při samotném řešení vyjdeme ze známého vztahu pro tlak $p = F/S$, kde $F = \sigma\, l \cos\vartheta$ je kolmý průmět síly vyvolané povrchovým napětím po obvodu kapiláry do svislého směru, ϑ je úhel, který svírá síla se svislým směrem (tedy úhel mezi zakřiveným povrchem rtuti a stěnou kapiláry) a S je obsah průřezu kapiláry. Tlaková bilance pak je

$$p_a + h\rho g = p_a + p_k = p_a + \frac{\sigma\, l \cos\vartheta}{S},$$

kde p_a je atmosférický tlak působící na kapalinu jak v nádobě, tak v kapiláře a $h\rho g$ je tlak v kapalině v hloubce h měřeno od nejvýše položené hladiny kapaliny (někteří z vás úlohu řešili chybně tak, že nejdříve ponořili vnější kapiláru, spočetli výšku hladiny a poté ponořili do ní vnitřní kapiláru a určili výšku hladiny ve vnitřní, jako by byla ponořena pouze v té vnější nezávisle na okolí. To samozřejmě nelze, neboť tlak v kapalině je vyvolán celkovou výškou kapaliny.)

Pro jednotlivé kapiláry můžeme psát (za předpokladu, že rtuť dokonale nesmáčí stěny kapilár, $\vartheta \cong 0°$):

a) vnitřní kapilára

$$l_1 = \pi d,\ S_1 = \frac{\pi d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{\sigma\, l_1 \cos\vartheta}{\rho g S_1} = \frac{4\sigma \cos\vartheta}{\rho g d} \cong \frac{4\sigma}{\rho g d},$$

b) vnější kapilára (mezikruží, dva obvody!)

$$l_2 = 3\pi d + \pi d = 4\pi d,\ S_2 = \frac{\pi\left(3d^2\right)}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = 2\pi d^2 \Rightarrow h_2 = \frac{\sigma 4\pi\, d \cos\vartheta}{\rho\, g 2\pi\, d^2} \cong \frac{2\sigma}{\rho g d}$$

Vidíme tedy, že nejníže bude hladina ve vnitřní kapiláře a ve vnější kapiláře bude hladina v dvakrát menší hloubce.

Poznámka: Úlohu bylo možné řešit i jinak, ovšem se znalostí vztahu pro tlak pod zakřiveným povrchem kapaliny $p_k = \sigma(1/r_1 + 1/r_2)$, kde r_1 a r_2 jsou poloměry křivosti povrchu v daném místě. Tento vzorec lze odvodit z působení sil povrchového napětí na elementární plošku v daném místě. Pro vnitřní kapiláru bereme $r_1 = r_2 = d/2$ (jedná se o kulový povrch) a pro mezeru mezi kapilárami $r_1 = d/2$ a $r_2 = \infty$, neboť zde jde o anuloid („pneumatiku“) a v řezu kolmém na průměr je poloměr křivosti nekonečný. Dosazením těchto křivostí do rovnice pro p_k, a pak do výchozí rovnice s tlaky obdržíme stejný výsledek jako předchozí metodou.

Karel Houfek

Úloha IV . 6 ... *Ať žije sníh!* *(maximum 8 bodů, řešilo 66 studentů)*

Tak jsem dostal opravovat praktickou úlohu o tření lyžaře na sněhu, zrovna když bylo (alespoň u nás v Polabí) den po oblevě. Ale abyste neřekli, provedl jsem měření náhradní: valivé tření kola bicyklu.

Nejprve trocha teorie:

Smyková třecí síla F_t se počítá ze vzorce

$$F_t = f.F_g, \qquad (1)$$

kde f je hledaný koeficient, pro danou dvojici materiálů téměř neměnný a F_g tlaková síla působící kolmo na podložku (zde tíhová síla, proto index g).

Naproti tomu valivé tření závisí ještě na poloměru kola r:

$$F_t = \xi F_g / r. \qquad (2)$$

Proto má koeficient ξ rozměr délky.

Vlastní měření probíhalo tak, že jsem tahal člověka na kole, a to rychlostí pokud možno rovnoměrnou, přičemž jsem měřil sílu, kterou musím vyvinout. Měření jsem prováděl na rovině, ale abych přesto eliminoval možnou chybu, vždy na dráze „tam a zpět“ a výsledek průměroval.

Naměřenou hodnotu jsem považoval přímo za třecí sílu a koeficient ξ jsem pak počítal přímo z úpravy vzorce (2).

Výsledky měření:

$r = 33 \pm 1$ cm, měřeno dílenským metrem.

$F_g / g = (73 \pm 1)$ kg + $(15{,}0 \pm 0{,}5)$ kg = 88 ± 2 kg, první člen je hmotnost jezdce, měřená osobní váhou, druhý je hmotnost kola, zjištěná pomocí mincíře.

F_t pro různé materiály, vždy v N, chyba 2 N. Měřeno školním siloměrem s přesností 1 N, ale rozptyl je velký a odečítání za pohybu nepřesné.

Beton: (13÷21)/2 N= 17 N
Dlážky malé: (8÷15)/2 N= 12 N
Kostky střední: (21÷26)/2 N= 24 N (pardubický Příhrádek)
Kostky velké: (18÷5)/2 N= 12 N (tamtéž)
Tráva: (62÷52)/2 N = 57 N (značné oscilace)

Krom toho jsem měřil klidovou třecí sílu.

Kostky střední: 46 N
Kostky velké: 48 N
Beton: 30 N

Tyto hodnoty jsem dál neuvažoval, neboť na ně nedá pohlížet jako na valivé tření.

Výsledky:

Matroš	ξ [mm]	Chyba Abs[mm]	Chyba Rel [%]
Beton	60	7	12
Dlážky	42	7	17
Kostky střední	84	7	8,6
Kostky velké	42	7	16,8
Tráva	200	8	4,2

Je vidět, že tam, kde byly hodnoty třecí síly velké, byla menší relativní chyba. Faktem ovšem zůstává, že chyba u např. posledního měření mohla být mnohem větší (stačilo vzít rozptyl hodnot třeba 5 N).

Relativní chybu jsem počítal jako odmocninu ze součtu kvadrátů relativních chyb jednotlivých veličin.

Přímé měření, tedy určení třecí síly a hmotnosti objektu (ve vašem případě lyžaře, nebo samotné lyže) je pochopitelně jednou z mnoha možností jak se dobrat výsledku.

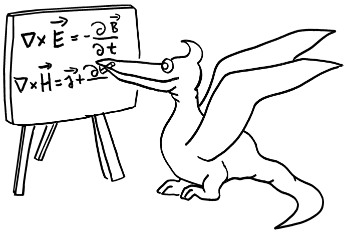
Většina lidí to řešila kinematicky, lze měřit např. čas projetí známé dráhy na svahu, při rozjezdu z klidu. Při stálém tření lze předpokládat stálé zrychlení (zpomalení), než jaké by odpovídalo samotnému zrychlování ze svahu. Problém byl v tom, že když se určil sklon svahu (olovnicí, úhloměrem), ve výsledném vzorci se od sebe odečítaly dvě blízké hodnoty, čímž chyba narostla (u některých až nad 100%).

Potížím s měřením úhlu v terénu se vyhnul ten, kdo měřil například dojezd na rovině (ačkoli teď mě napadá, že vlastně prohlásil, že má svah o nulovém sklonu). Na rovině byla třecí síla jedinou silou brzdící, takže problémy s odečítáním blízkých hodnot nevznikaly. Stačilo určit dva parametry zpomaleného pohybu. Nejlepší kombinací je dráha a čas, lze taky dráha a počáteční rychlost, nebo čas a počáteční rychlost. Rychlost se nejlépe získá změřením krátkého úseku (např. 1 m), mnozí si pomohli rozjezdem ze svahu, kde zase měřili příslušný čas a dráhu, přičemž sklon je pálit nemusel.

No a hrstka těch, kteří měli svah s proměnným sklonem hledali mezní úhel, kdy se rozjedou rovnoměrně.

A jak to vlastně dopadlo? Dobře. Vámi naměřené hodnoty zahrnují všemožné druhy sněhu od nadýchaného prašanu až po firn a led, koeficient tření kolísá od 0,005 až po 0,300, přičemž nejčastěji se vyskytovaly hodnoty mezi 0,050 a 0,100.

Honza Mocek



Seriál na pokračování

Řešení úlohy S . 5 *(maximum 3 body, řešilo 41 studentů)*

Jednoduchý model tepelné vodivosti si představíme jako na obr. 7.

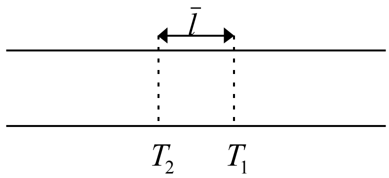
Molekuly v místě s teplotou T_2 mají energii

$$u_2 = m_0 c_V T_2 ,$$

podobně v místě s teplotou T_1 je

$$u_1 = m_0 c_V T_1 .$$

Obr. G



Pokud je $T_1 > T_2$, bude tok tepla probíhat tak, že molekuly s energií u_1 putují do oblasti s energií u_2 a naopak, takže pohybem molekul dojde k předávání energie

$$Q = -N\left(u_2 - u_1\right),$$

záporné znaménko je zde proto, že energie je předávána proti směru spádu teploty.

Lze psát N jako

$$N = N_V S \overline{v_x}\, \mathrm{d}t ,$$

kde $\overline{v_x} = \frac{2}{\pi}\bar{v}$. Jde o částice v objemu, který právě odpovídá výměně tepla za čas dt (částice uletí dráhu $\overline{v_x}\,\mathrm{d}t$).

Celkově po dosazení

$$Q = -N_V S \frac{2}{\pi} \bar{v} m_0 c_v \left(T_2 - T_1\right) \mathrm{d}t ,$$

kde $T_2 - T_1$ je vlastně dT, což lze napsat ($\mathrm{d}x = \bar{l}$):

$$T_2 - T_1 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \bar{l} .$$

Dosadíme-li vztah pro Q do vzorce uvedeného v zadání úlohy, tj.

$$\frac{Q}{S\,\mathrm{d}t} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} ,$$

dostaneme porovnáním

$$\lambda = \frac{2}{\pi} N_V m_0 c_V \bar{v} \bar{l} ,$$

přičemž počet částic v objemu krát hmotnost jedné z nich je právě hustota.

Tedy $\lambda \approx \rho c_V \bar{v} \bar{l}$.

Viskozita plynů

Pro jednoduchou analýzu viskozity plynů budeme uvažovat podobný model jako u odvození toku částic v plynech. Tření v pohybujícím se plynu nebo kapalině (obecně tedy tekutině) vzniká tehdy, pohybují-li se jednotlivé vrstvičky tekutiny různými rychlostmi. Tření potom můžeme pomocí kinetické teorie modelovat přechody molekul mezi jednotlivými vrstvičkami, a tedy předáváním hybnosti.

Představíme si dvě vrstvy vzdáleny od sebe o vzdálenost d (ze stejného důvodu jako v příkladu 3. dílu seriálu) podle obr. 8.

Jedna se pohybuje rychlostí v, druhá rychlostí $v + \mathrm{d}v$, což lze také psát: $v + \bar{l}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

Podobně jako u modelu poslední úlohy je každá molekula nositelem hybnosti $m_0 v$, resp. $m_0(v + \mathrm{d}v)$. Přeletí-li tedy jedna z částic jedné vrstvy do vrstvy druhé, bude změna hybnosti rovna

$$m_0\,\mathrm{d}v = m_0\bar{l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Počet částic, které se podílí na tomto ději lze napsat pomocí n_+ a n_- v minulé části seriálu jako

$$n_+ + n_-.$$

Předaná hybnost je potom

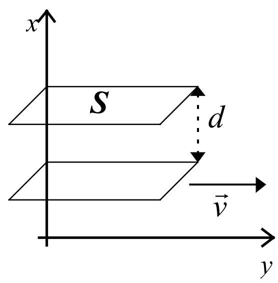
$$\mathrm{d}p = -(n_+ + n_-)m_0\bar{l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

(záporné znaménko je zde z důvodu předávání hybnosti ve směru osy x, opačném, než je směr stoupající rychlosti).

Počty částic n_+ a n_- bereme jako počet částic v objemu mezi plochami, tj. $N_V S\overline{v_x}\,\mathrm{d}t$, kde N_V je hustota částic. Tedy

$$(n_+ + n_-) = 2N_V S\overline{v_x}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}N_V S\bar{v}\,\mathrm{d}t.$$

Obr. H



Budeme-li uvažovat třecí sílu mezi plochami závislou přímo úměrně na změně rychlosti a ploše vrstviček, dostaneme

$$F = -\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}S.$$

A nakonec z definice síly jako změny hybnosti v čase ($F = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$) zjistíme dosazením za dp a porovnáním posledních dvou rovnic

$$\eta = \frac{4}{\pi}\rho\bar{v}\bar{l},$$

uvědomíme-li si, že $\rho = N_V m_0$.

Úloha S . 6

Využijte vztahu pro velikost třecí síly k určení funkce závislosti rychlosti proudění kapaliny v trubici kruhového průřezu na vzdálenosti r od středu trubice.

Třecí síla působící na pomyslný válec okolo středu trubice o poloměru dr musí být opačná k síle způsobující pohyb (rozdíl tlaků), jinak by došlo ke změně rychlosti v čase.

Pomoc pro neintegrující: je-li

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = kr\text{, kde } k \text{ je konstanta, potom } v = k\frac{r^2}{2} + c,$$

kde c je nějaká konstanta, kterou určíme z tzv. okrajových podmínek úlohy (rychlost někde musí být nějaká, což dosadíme do rovnice, kterou jsme dostali).

<u>Naše adresa:</u> FKS, KTF MFF UK
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha