

JAN HRADIL A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

X. ročník – 1996/97



Předmluva

Milý čtenáři,

v této ročence se již tradičně snažíme ukázat činnost FYKOSu (FYzikálního KOrespondenčního Semináře) ve školním roce 1996/97, kdy proběhl jeho jubilejní X. ročník.

Struktura této ročenky se mírně liší od toho, jak vypadá seminář během roku. Ten vypadá tak, že řešitelé dostávají, víceméně pravidelně, zadání šesti sérií úloh. Každá série obsahuje 5 teoretických úloh, 1 experimentální úlohu a kapitolu Seriálu na pokračování, což je letos povídání o astronomii a astrofyzice. Seriál je doplněn další, celkem tedy sedmou úlohou. Řešitelé řeší (jak již vyplývá z jejich názvu) tyto úlohy a poté je pošlou (ne nutně všechny) na adresu semináře. Následně organizátoři úlohy opraví, obodují a zašlou zpět řešitelům, aby si mohli prohlédnout své chyby. Na základě bodování je sestavena výsledková listina a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé po zásluze odměněni. FYKOS je především soutěž!

Toto základní schéma semináře vzniklo někdy na jeho počátku. Nejdříve se k němu doplnila dvě každoroční soustředění, která jsou již neodmyslitelnou součástí semináře. Jsou odměnou nejlepším řešitelům vždy na jaře a na podzim. Další aktivitou je Den s experimentální fyzikou, kdy umožníme (ve spolupráci s jednotlivými pracovišti) našim řešitelům návštěvu několika pracovišť, kde se dělá „opravdová fyzika“.

Tolik život semináře během roku, co však ukrývá tato ročenka? Na začátku najdete kompletní zadání teoretických a experimentálních úloh. Z praktických důvodů jsme oddělili řešení teoretických úloh, od experimentálních. Obojí postupně najdete za zadáním. V další části je celý Seriál na pokračování, přerušovaný jednotlivými úlohami, vážícími se k danému tématu. A pak už je jen soupiska nejlepších řešitelů a toť vše.

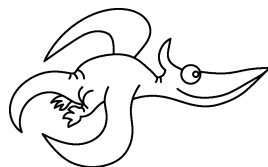
Pokud byste měli po přečtení pocit, že se chcete přihlásit k soutěžení v semináři nebo že se potřebujete na něco zeptat, ať už se to týká fyziky, studia na matfyzu či života matfyzáka, nebojte se a napište. Organizátoři jsou vám k dispozici téměř nepřetržitě na adrese

FYKOS
KTF MFF UK
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

www: <http://www.mff.cuni.cz/iso/news/fks>

tel: (02) 2191 2493 (záznamník KTF)

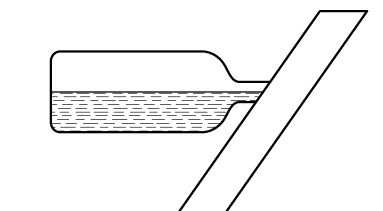


Zadání úloh

Úloha I.1 ... stojánek na víno

Firma Strýček Skrblík s. r. o. zaplavila domácí i zahraniční trhy geniálním výrobkem – dřevěným stojánkem na víno, jehož podobu si můžete prohlédnout na obr. 1. Bude tento stojánek funkční? Závísí stabilita systému stojánek – láhev vína na velikosti a tvaru láhve či na množství moku v láhvi obsazeném? A pokud ano, tak jak?

Řešení str. 10



Obr. 1

Úloha I.2 ... alchymistické zrcadlo

Mějme válcovou nádobu se rtutí. Roztočíme ji úhlovou rychlostí ω kolem rotační osy. Určete ohniskovou vzdálenost zrcadla, které tvoří povrch rtuti.

Řešení str. 11

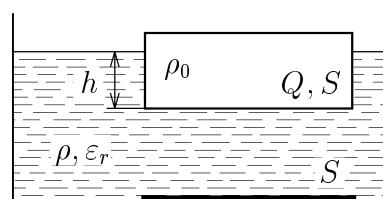
Úloha I.3 ... ponořit se či neponořit?

Velká nádoba je naplněna tekutým dielektrikem hustoty ρ a relativní permitivity ϵ_r . Na dně nádoby je tenká kovová deska o ploše S . Nad ní plave vodivý hranol hustoty $\rho_0 < \rho$, jehož podstava má obsah S . Na hranol přivedeme elektrický náboj Q (viz obr. 2). Jak ovlivní elektrické pole hloubku ponoru hranolu, víte-li, že

- deska na dně je uzemněna,
- deska není uzemněna?

Zaveďte takové zjednodušující předpoklady, abyste byli schopni úlohu řešit, a pokuste se odhadnout chybu, kterou vaše zjednodušení do výsledku vnesou.

Řešení str. 12



Obr. 2

Úloha I.4 ... překvapení po procitnutí?

Představte si, že jdete večer klidně spát a do rána se veškeré vzdálenosti a rozměry všech předmětů zvětší desetkrát, přičemž jejich hmotnost se nezmění. Zanechá tato událost nějaké stopy na vaší existenci? A pokud ano, tak jaké?

Řešení str. 13

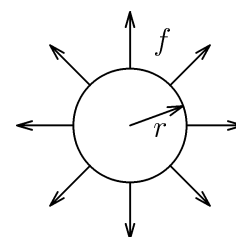
Úloha I.5 ... balónek

Jak moc můžete nafouknout pouťový balónek, dokud nepraskne?

Předpokládejte, že balónek má tvar koule. Nenafoknutý nechť má poloměr r_0 . Je z gumové blány, která má v jistém přiblížení tyto elastické vlastnosti: roztahujeme-li kruh vyříznutý z této blány na okraji tak, že síla na jednotku délky obvodu je f , bude poloměr kruhu r přímo úměrný f , $r = r_0(1 + af)$; a je konstanta úměrnosti (viz obr. 3). Materiál praskne při maximální síle na jednotku délky f_{max} .

Na jedno nadechnutí naberete do plic objem V_{fuk} vzduchu a ten pak fouknete do balónku. Kolikrát můžete do balónku fouknout, než praskne, a jaký bude mít rozměr?

Řešení str. 14



Obr. 3

Úloha I.6 ... výše mého domova hvězd se bude dotýkat...

První experimentální úloha letošního ročníku je svým zadáním poměrně jednoduchá, poskytuje však velký prostor pro vaši nápaditost a vynalézavost: Změřte výšku vašeho bydliště co nejvíce způsoby a výsledky porovnejte. Nebojte se odvážných nápadů. Spočítejte nebo alespoň odhadněte chyby měření nezapomínajíc na to, že ve fyzice platí: *jedno pozorování = žádné pozorování!*

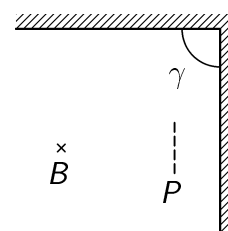
Řešení str. 51

Úloha II.1 ... rohové zrcadlo

Představte si, že stojíte v bodě B na obr. 4 před dvěma zrcadlovými plochami, které jsou na sebe kolmé ($\gamma = 90^\circ$). Kolikrát uvidíte svůj obraz v zrcadlech? Co se stane, dáme-li před jednu stěnu překážku P (např. skříň)?

Jak se situace změní, budou-li zrcadla měnit svůj úhel ($\gamma < 90^\circ$, resp. $\gamma > 90^\circ$)?

Řešení str. 16

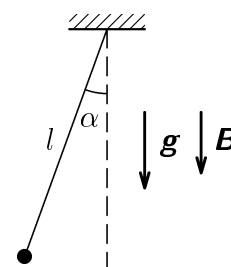


Obr. 4

Úloha II.2 ... magnetické kyvadlo

V homogenním tíhovém poli (tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$) je na závěsu zanedbatelné hmotnosti délky $l = 1,00 \text{ m}$ umístěna malá kovová kulička o hmotnosti $m = 10,0 \text{ g}$. Na kuličku byl přiveden náboj o velikosti $Q = 5,0 \mu\text{C}$. Celá tato aparatura se nachází ve svislém homogenním magnetickém poli, jehož vektor magnetické indukce \mathbf{B} o velikosti $B = 0,5 \text{ T}$ má stejný směr jako tíhové zrychlení \mathbf{g} . Ostatní magnetická pole jsou vůči tomuto magnetickému poli zanedbatelná. Celá soustava se nachází v klidu. Závěs vychýlíme o úhel $\alpha = 7^\circ$ a uvolníme. Popište pohyb kuličky po uvolnění.

Řešení str. 19

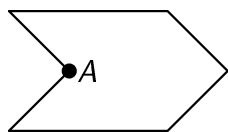


Obr. 5

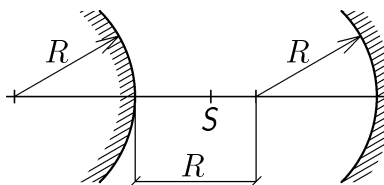
Úloha II.3 ... jarový tryskáč

Matouš si vystříhl z tvrdého papíru lodičku, která je nakreslena na obr. 6 při pohledu shora. Do místa A pak kápl kapičku jaru a „loď“ spustil na vodní hladinu. Nemálo se podivil, když loď „sama od sebe“ vyrazila prudce vpřed. Umíte pohyb lodi vysvětlit? Platí pro něj zákon zachování energie?

Řešení str. 23



Obr. 6



Obr. 7

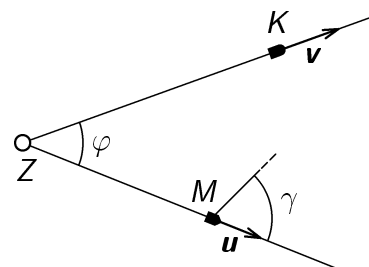
Úloha II.4 ... zrcadla, aneb kdo je nejkrásnější

Vypuklé a duté zrcadlo mají stejný poloměr křivosti R . Vzdálenost mezi vrcholy zrcadel je $2R$. V jakém bodě na optické ose zrcadel musíme umístit zdroj světla S , aby po odraze od vypuklého a dutého zrcadla splýval obraz bodu S se svým vzorem?

Řešení str. 24

Úloha II.5 ... dvojčata ve vesmíru

Michal a Karel jsou dvojčata. V zájmu vyššího vědeckého poznání je posadíme každého do jiné kosmické lodi v též čas $t = 0$ a vystřelíme ze Země Z rychlostmi \mathbf{u} a \mathbf{v} vstříc hvězdným dálavám. Abychom jim život co nejvíce znepříjemnili, jejich rychlosti svírají úhel φ , jak je to vidět na obr. 8. Po čas hvězdného putování se jejich rychlosti nemění. V čase t_0 se Michal, který se zrovna nachází v bodě M , rozhodne vyslat zprávu – rádiový signál svému sourozenci. Pod jakým úhlem γ vůči svému směru pohybu musí zaměřit signál, aby Karel zprávu obdržel?



Obr. 8

Vliv ostatních těles na dráhu lodí a paprsku zanedbejte. Diskutujte též případ, kdy vesmírné lodě nejsou vypuštěny ve stejný čas, ale Michal se vydá do vesmíru o dobu T dříve. Jak se změní výpočet, budou-li velikosti rychlostí \mathbf{u} a \mathbf{v} blízké rychlosti světla c ?

Řešení str. 25

Úloha II.6 ... kostka cukru

Zjistěte, jaký tlak vydrží kostka cukru, tj. jaká je její mez pevnosti v tlaku. V řešení nezapomeňte uvést parametry použitých kostek (rozměry kostky, značku cukru apod.). Vhodnou metodou proveďte tolik měření, aby vaše výsledky byly průkazné (nejméně deset měření na jeden druh kostky). Z výsledků zkuste vyvodit nějaké závěry.

Řešení str. 59

Úloha III.1 ... skokan

Člověk padá z můstku do bazénu, přičemž v bazénu je voda a můstek je ve výšce h nad hladinou. Náš skokan má hmotnost $M = 80$ kg, hustotu $\rho = 0,9$ g.cm⁻³, je vysoký $L = 1,7$ m a na počátku skoku (volného pádu) byl v klidu. Do jaké největší hloubky H se skokan ponoří? Jaký bude jeho další pohyb? Odpor vodního prostředí: a) zanedbejte, b) nezanedbejte.

Řešení str. 27

Úloha III.2 ... dopravní přestupek

Jede si tak jednou pan Doppler po městě a co nevidí. Zastavuje ho vozidlo policie a příslušník povídá: „Pane řidiči, jste si vědom toho, že jste jel na červenou?“

„Nikoliv. Když jsem projížděl kolem semaforu, tak jsem viděl zelenou. Tím jsem si naprosto jist,“ odpovídá pan Doppler.

„Tak v tom případě vám musím dát pokutu za rychlou jízdu!“

Kolik zaplatil pan Doppler a proč, jsou-li sazby 1 Kč za 1 km.h⁻¹ přes povolený limit 60 km.h⁻¹ ve městě?

Řešení str. 29

Úloha III.3 ... koule

Tři koule jsou spojeny stejnými gumičkami tak, že tvoří rovnostranný trojúhelník. Soustava leží na hladkém vodorovném stole. Jaké náboje je třeba na koule přivést, aby se plocha trojúhelníka zdvojnásobila? Tuhost gumiček je k , počáteční délka je l .

Řešení str. 31

Úloha III.4 ... cirkus

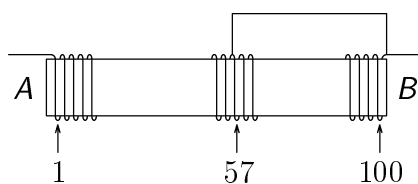
Artista padá na silně napnutou plachtu z výšky $h = 1$ m. Jaký bude maximální průhyb plachty, je-li průhyb s artistou v klidu $\Delta y = 2$ cm? Považujte všechny výchylky za malé.

Řešení str. 31

Úloha III.5 ... kutil

Představte si obyčejnou cívku o 100 závitů, jejíž konce označme A , B (viz obr. 9). Nyní spojíme konec závitu číslo 57 s koncem cívky B pomocí dokonalého vodiče. Jak se bude lišit tato cívka od cívky s 57 závitů, budeme-li ji měřit mezi body A – B ?

Řešení str. 32



Obr. 9

Úloha III.6 ... optické vlastnosti vody

Tentokrát je zadání velmi stručné: změřte index lomu obyčejné pitné vody. Současně si přečtete autorské řešení úlohy I.6 a pokuste se realizovat jen jednu metodu, ale zato co nejprecizněji.

Řešení str. 62

Úloha IV.1 ... sever

Je to už dávno, co jsme my, organizátoři, chodili na své základní školy. Nicméně si všichni dobře pamatujeme, že jsme se učili, jak pomocí ručičkových hodiněk a polohy Slunce na obloze přibližně stanovit sever. Po vás bychom chtěli, abyste nám vysvětlili, jak to funguje, proč to funguje a s jakou přesností (přibližně).

Řešení str. 33

Úloha IV.2 ... Pepeť námořník

Spočtete práci, kterou musí vykonat námořník na to, aby svinul plachtu o hmotnosti M , která má šířku a a výšku b . Plachta visí celá svisle dolů z ráhna a námořník ji navíjí na ráhno konstantní rychlostí.

Řešení str. 36

Úloha IV.3 ... měření tlaku vzduchu v zimě

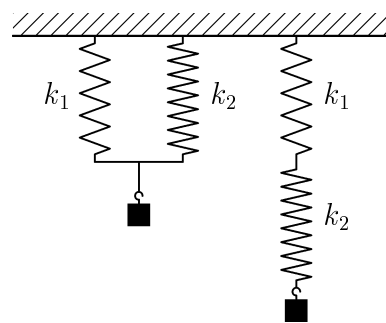
Fyzikální expedice potřebuje změřit tlak vzduchu ve svém táboře, aby si mohla být jistá, že jí nehrozí vysokohorská nemoc (už i tak jim hrozí umrznutí, protože je přesně -30°C). Shodou okolností mají s sebou rtuťový barometr s hliníkovou stupnicí a naměřili tlak vzduchu 750 torr. Jaký byl ve skutečnosti tlak vzduchu, jestliže jsou barometr i měřidlo cejchovány pro teplotu 0°C ?

Řešení str. 37

Úloha IV.4 ... napjatá situace

Mějme dvě pružiny o tuhosti k_1 a k_2 . Jaký bude poměr period kmitů, jestliže na ně pověsíme závaží, pokud jsou v prvním případě pružiny spojeny „sériově“ a ve druhém „paralelně“ (viz obr. 10)? V „paralelním“ případě je závaží umístěno tak, že hrazdička je stále vodorovná.

Řešení str. 38



Obr. 10

Úloha IV.5 ... fotbalistický problém

Fotbalista vykopne míč a udělí mu kromě posuvné rychlosti i rotaci okolo svislé osy. Na kterou stranu od původního směru se míč začne odchylovat v závislosti na smyslu rotace a proč? Míč považujte za ideální kouli, odpor vzduchu nezanedbávejte.

Řešení str. 39

Úloha IV.6 ... hustota vody

Tentokrát je vaším experimentálním úkolem změřit další fyzikální vlastnost vody, totiž její hustotu. Aby nevznikaly velké zmatky, vymysleli jsme pro vás tento postup měření: Do vody ponoříme nádobu dnem vzhůru, původně celou naplněnou vzduchem o atmosférickém tlaku. Jak se nádoba ponořuje, tak se do nádoby postupně dostává voda. Vymyslete, jak tímto postupem zjistíte hustotu vody a pokuste se navrhnout takové experimentální uspořádání, abyste dosáhli maximální přesnosti. Znáte atmosférický tlak a tíhové zrychlení.

Řešení str. 67

Úloha V.1 ... rozmazaný šroub

Po nakloněné rovině se sklonem β se z klidové pozice valí válec, na kterém je předkreslen závit. Válec se stále zrychluje a postupně se nám jednotlivé závity „rozmažou“, až není poznat, že tam jednotlivé závity byly. Měříme čas od puštění válce do chvíle, kdy nerozeznáme jednotlivé závity. Jak tento čas závisí na úhlu β ? Předpokládejte, že oko má snímkovací frekvenci f , válec má průměr R , stoupání závitů je s .

Řešení str. 39

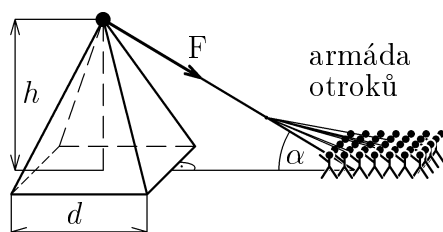
Úloha V.2 ... Vykradená pyramida

Jistý duševně chorý faraón si před mnoha tisíci lety nechal vytesat mnoha tisíci otroků z jednoho kusu mohutné skály pyramidu. Starověcí zloději o dvě dynastie později chtěli pyramidu vyloupit, leč nenašli vchod, a tak se rozhodli, že se pokusí pyramidu převrhnout.

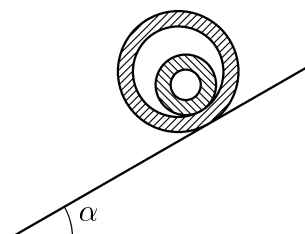
Do její špičky zaklesli pevný kruh, jímž provlékli ještě pevnější lano. Za lano pak zapřáhli organizovanou skupinu otroků táhnoucích směrem od pyramidy kolmo ke dvěma hranám podstavy (obr. 11). Podaří se otrokům pyramidu převrhnout, když jich bude dostatečně mnoho, nebo ji po písku jen kus popotáhnou?

Okolní písek je dokonale udusán minulými generacemi vykradačů hrobek, kteří už celá staletí obhlíželi, kudy pyramidu vykrást, takže se pyramida do písku nebude bořit. Hmotnost pyramidy je M , koeficient statického smykového tření je μ . Pyramidu považujte za jehlan (pohřební dutina je velmi malá, protože vládce je celý seschlý).

Řešení str. 40



Obr. 11



Obr. 12

Úloha V.3 ... velké válení

Mějme dva duté válce vnějších poloměrů R_1, R_2 a vnitřních poloměrů r_1, r_2 ($r_2 < R_2 < r_1 < R_1$). Válce jsou vloženy do sebe (obr. 12) a navzájem se po sobě valí, ale nekloužou. Vnější válec se začne valit po nakloněné rovině s úhlem α . Jakého zrychlení celá soustava dosáhne?

Nad rámec zadání se můžete pokusit popsat pohyb jednotlivých válců. Hmotnosti válců jsou M_1, M_2 a materiál válce můžeme považovat za homogenní. Změní se řešení výrazně pro tři válce?

Řešení str. 42

Úloha V.4 ... vodotrysk v lodi, aneb Rychlé šípy nikdo nedoběhne

Rychlé šípy si postavily šlapohyb neboli obojživelný vůz, s nímž podnikly závod přes řeku s Bratrstvem kočičí pracky. Bratrstvo prohrálo a málem se utopilo. „Vy budete mokré taky, koukněte se na ty mraky!“ procedil Dlouhé Bidlo po nedobrovolné koupeli, načež následující den vyvrtal do dna šlapohybu Rychlých šípů nebozecem díru průřezu S . Jak vysokým vodotryskem se na příštích závodech mohly kochat davy příznivců sportu, když Rychlé šípy včetně Rychlonožky usedly do lodi?

Řešení str. 43

Úloha V.5 ... šlechtic

Veliký šéf semináře radostně přeskakuje fluktuace hmoty ve svém pokoji. Právě dopadl plnou vahou z výše $H = 1$ m nad zemí volným pádem na hrábě. Násada je dlouhá $l = 2,0$ m a váží $m_2 = 1$ kg, část ocelového hrabla kolmá k násadě je dlouhá $z = 7$ cm a váží $m_1 = 2,5$ kg (považujte je za homogenní).

Jakou rychlost má konec násady hrabí v okamžiku, kdy se opovážlivě dotkne nosu našeho nejvyššího? Srážku považujte za nepružnou. Šéfův nos se nachází 180 cm nad podlahou, šéfova hmotnost činí 92 kg včetně klíčů v pravé kapse.

Řešení str. 44

Úloha V.6 ... experimentování v dešti

Teď už nebude sněžit, a proto můžete pozorovat déšť. Pokuste se změřit objem jedné dešťové kapky. Nezapomeňte si zapsat, kdy to vlastně přšelo a jestli déšť přišel ze západu nebo z východu (porovnávejte kvalitu východních a západních dešťů). Např. při pádu padákem lze měřit šuplerou všechny rozměry kapky, ocejchujeme-li si dalekohled, můžeme v něm odhadovat velikost kapek...

Řešení str. 72

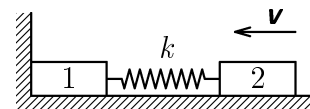
Úloha VI.1 ... kapalina mezi rovnoběžnými deskami

Odvoďte vztah pro výšku h hladiny kapaliny mezi dvěma svislými nekonečně dlouhými rovinami, vzdálenými od sebe d , které jsou ponořeny do kapaliny. Povrchové napětí kapaliny je σ a hustota je ρ .

Řešení str. 44

Úloha VI.2 ... pružina, kvádr a tření

Na obr. 13 máme dva stejné kvádry o hmotnosti m spojené pružinou o tuhosti k . Koeficient tření (statického i dynamického) je f . Jakou minimální rychlostí v musíme poslat kvádr č. 2 směrem ke stěně, aby se v průběhu nastalého děje pohnul i kvádr č. 1?



Obr. 13

Řešení str. 45

Úloha VI.3 ... kulečník

Máme N identických kulečnickových koulí, které leží na nekonečně velkém, ideálně rovném a vodorovném kulečnickovém stole. Jednu kouli uvedeme do pohybu. Po jistém počtu nárazů se koule vrátí zpět a zůstane stát. Jaký je minimální počet koulí, aby to bylo možné. Všechny rázy jsou dokonale elastické.

Řešení str. 47

Úloha VI.4 ... lanovka

Na Šumavě se v současnosti buduje zajímavé zařízení na přepravu dřeva. Protože se do močálu normální traktor nedostane, pokoušejí se lesníci použít pro přepravu dřeva vzducholodě. Vzducholodě bude mít nosnost 5000 kg a bude upevněna ke dvěma stanovištím vzdálených od sebe 3 km. Vzducholodě nemá žádný pohon a je tahána mezi kotvícími stanovišti. Jednu cestu absolvuje s nákladem dřeva a druhou jede prázdná, občas nese vaky s vodou.

Jakou maximální silou bude vzducholodě působit na upevňovací lana, bude-li prázdná a nesmí-li její výška nad terénem přesáhnout 300 m (aby nenarušila vzdušný prostor) na celé tříkilometrové trase?

Řešení str. 48

Úloha VI.5 ... vodovod

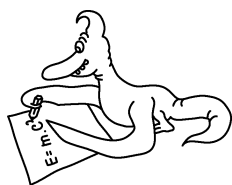
Ke koncům vodorovné trubice délky l , hmotnosti M a konstantního průřezu S jsou připevněna kolena, která přivádí vodu shora a odvádí ji směrem dolů (voda běží svisle, zatočí doleva, běží vodorovně, pak zahne vpravo a běží zase svisle dolů). Druhé koleno je upevněno na otočném kloubu. Jaký průtok musí být v trubici, aby zůstala vodorovně?

Řešení str. 49

Úloha VI.6 ... jak tlustý je papír?

Pokuste se změřit, jak tlustý je list papíru. Aby byly vaše výsledky srovnatelné, měřte papír pocházející ze školního sešitu nelinkovaného.

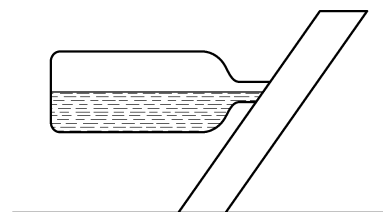
Řešení str. 73



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... stojánek na víno

Firma Strýček Skrblík s. r. o. zaplavila domácí i zahraniční trhy geniálním výrobkem – dřevěným stojánkem na víno, jehož podobu si můžete prohlédnout na obr. 14. Bude tento stojánek funkční? Závísí stabilita systému stojánek – láhev vína na velikosti a tvaru láhve či na množství moku v láhvi obsaženém? A pokud ano, tak jak?



Obr. 14

Řešení:

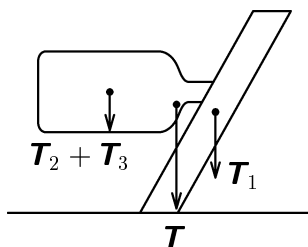
Z obrázku v zadání není patrné, zda podložka je či není součástí stojánku, proto vyšetříme obě možnosti. V obou případech jde o to, zda se těžiště celé soustavy stojánek – láhev bude nacházet nad podstavou stojánku (podmínka stability).

a) Podložka je součástí stojánku

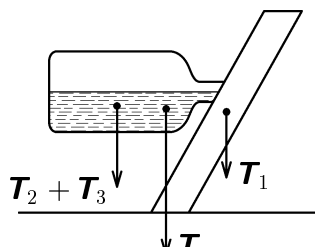
V tomto případě musí těžiště ležet nad podložkou, což, jak je z obrázku v zadání patrné, vždy platí, protože běžně používané lahve ani nepřesáhnou podložku.

b) Podložka není součástí stojánku

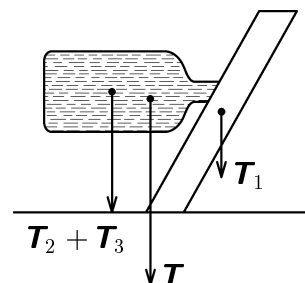
V tomto případě podstavou stojánku rozumíme pouze podstavu dřevěného hranolu, tudíž těžiště soustavy musí ležet nad touto podstavou. Poloha těžiště soustavy je dána polohou těžiště a tíhou jednotlivých částí soustavy: stojánku (tíha T_1), prázdné láhve (tíha T_2) a kapaliny (tíha T_3).



Obr: 15a



Obr: 15b



Obr: 15c

Doléváme-li postupně kapalinu do láhve, mění se jak poloha těžiště, tak tíha kapaliny (viz obr. 15a až 15c). Tím se mění poloha výsledného těžiště soustavy, která je stabilní, pokud se těžiště soustavy nachází stále nad podstavou stojánku. Proto stačí vyšetřit podmínku stability pro prázdnou a plnou láhev.

Z uvedeného vyplývá, že stabilita stojánku je ovlivněna spoustou faktorů... (laskavý čtenář si snadno doplní). Vždy ale lze setrojit stojánek tak, aby splňoval podmínky zadání; fyzikálně řečeno, aby těžiště se vždy nacházelo nad podstavou hranolu.

Úloha I.2 ... alchymistické zrcadlo

Mějme válcovou nádobu se rtuťí. Roztočíme ji úhlovou rychlostí ω kolem rotační osy. Určete ohniskovou vzdálenost zrcadla, které tvoří povrch rtuťi.

Řešení:

Hladina rotující kapaliny vytvoří paraboloid. Pro jednoduchost stačí pracovat v rovině svislého řezu procházejícího osou rotace. Položme počátek soustavy souřadnic do vrcholu paraboloidu. Pak má křivka rovnici

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2,$$

což lze ukázat takto. Aby byla částice na hladině v klidu, musí být výslednice sil, které na ni působí, normálou k povrchu. Sklon hladiny je tedy dán poměrem velikostí sil gravitační a odstředivé

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg}. \quad (1)$$

Křivka je tedy dána diferenciální rovnicí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}, \quad (2)$$

z které integrací plyne

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c,$$

kde konstantu c položíme rovnou nule, vzhledem k volbě souřadné soustavy. Všimněte si, že ohnisková vzdálenost nezáleží na hmotnosti, tudíž ani na hustotě kapaliny.

Ted, když máme jasno ve tvaru křivky, je možné použít více postupů. Jednoduché je říci, že parabola daná rovnicí $x^2 = 2py$, má ohniskovou vzdálenost $p/2$, a odtud už vyjde

$$f = \frac{g}{2\omega^2}.$$

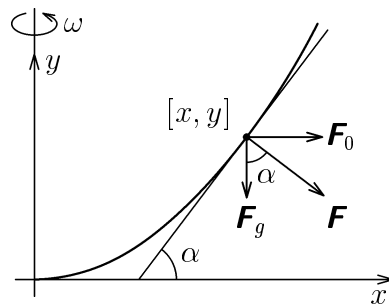
Delší, ale celkem spolehlivé řešení získáme tím, že vezmeme paprsek přicházející z nekonečna rovnoběžně s rotační osou ve vzdálenosti r , v místě dopadu se odrazí o dvojnásobný úhel než je úhel $\alpha(r)$ a hledáme, kde tento odražený paprsek protne osu. Při dobré orientaci ve vzorečkách analytické geometrie vyjde výsledek nezávislý na r . Na závěr bych se rád zmínil o elegantním způsobu řešení: Uvažujme paprsek z nekonečna, rovnoběžný s osou, dopadající na hladinu v místě, kde je skloněna o úhel $\alpha = 45^\circ$ k vodorovné rovině. Tento paprsek se odrazí do vodorovné roviny a tudíž místo jeho odrazu je ve výšce rovné ohniskové vzdálenosti. Užitím rovnic (1) a (2) tak dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 = \frac{\omega^2}{g}x_0, \quad \text{z čehož} \quad x_0 = \frac{g}{\omega^2}. \quad (3)$$

Index 0 se vztahuje k onomu význačnému bodu. Po dosazení do rovnice paraboly obdržíme téměř okamžitě výsledek:

$$f = y_0 = \frac{\omega^2}{2g}x_0^2 = \frac{\omega^2}{2g} \frac{g^2}{\omega^4} = \frac{g}{2\omega^2}. \quad (4)$$

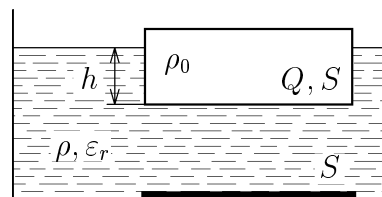
Kdyby měl někdo z Vás pocit, že se jedná o teorii odtrženou od reálného světa, vezte, že na stejném principu pracoval originální astronomický přístroj. Jednalo se o tzv. Nušlův cirkumzenitál, kterým se určovaly časy průchodů hvězd kružnicí určité výšky nad horizontem. Přístroj existoval ve třech exemplářích.



Obr. 16

Úloha I.3 ... ponořit se či neponořit?

Velká nádoba je naplněna tekutým dielektrikem hustoty ρ a relativní permitivity ε_r . Na dně nádoby je tenká kovová deska o ploše S . Nad ní plave vodivý hranol hustoty $\rho_0 < \rho$, jehož podstava má obsah S . Na hranol přivedeme elektrický náboj Q (viz obr. 17). Jak ovlivní elektrické pole hloubku ponoru hranolu, víte-li, že



Obr. 17

- deska na dně je uzemněna,
- deska není uzemněna?

Zaveďte takové zjednodušující předpoklady, abyste byli schopni úlohu řešit, a pokuste se odhadnout chybu, kterou vaše zjednodušení do výsledku vnesou.

Řešení:

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že je deska stejně velká jako podstava plovoucího kvádrů a vrstva nevodivého dielektrika mezi nimi je dostatečně tenká na to, aby v ní bylo elektrické pole homogenní.

Pokud je deska na dně uzemněná, nabije se opačným nábojem stejné velikosti jako kvádr. Systém pak bude podobný deskovému kondenzátoru a velikost elektrické intenzity v něm můžeme vyjádřit jako:

$$E' = \frac{U}{d} = \frac{Q}{Cd} = \frac{Q}{\varepsilon S}.$$

Jedna deska samozřejmě vytváří pouze poloviční intenzitu:

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon S}$$

a na kvádr působí síla

$$F = QE = \frac{Q^2}{2\varepsilon S},$$

která se musí vykompenzovat přírůstkem síly vztlakové. Všimněte si, že síla nezávisí na vzdálenosti hranolu a dna. Změna hloubky ponoru tedy bude

$$\Delta h = \frac{F}{\rho g S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon S^2 g \rho}.$$

Jestliže však tento výraz vyjde větší než byla výška původně neponořené části hranolu, k vyrovnání sil nedojde, hranol klesne až na dno, kde se vybije, a pak se vrátí zpět do počáteční polohy.

Pokud deska na dně uzemněná není, budou se na ní pouze indukovat povrchové náboje, jejichž silové působení se však vykompenzuje, používáme-li výše popsané přiblížení.

Kdybychom měli úlohu řešit beze všech aproximací, museli bychom numericky propočítat pole v dielektriku s uvážením povrchových nábojů, které zde budou hrát určitou roli i v případě, že je deska nekonečně tenká. V jejím středu se totiž v důsledku větší intenzity pole kvádrů budou indukovat náboje opačného znaménka, než má kvádr, a tyto náboje pak budou chybět na okraji. Přitažlivá síla se tedy vytvoří v každém případě.

Úloha I.4 ... překvapení po procitnutí?

Představte si, že jdete večer klidně spát a do rána se veškeré vzdálenosti a rozměry všech předmětů zvětší desetkrát, přičemž jejich hmotnost se nezmění. Zanechá tato událost nějaké stopy na vaší existenci? A pokud ano, tak jaké?

Řešení:

Tato úloha je z řady kvalitativních, úvahových problémů. Je velmi těžké obsáhnout širí důsledků a všech souvislostí při změně rozměrů. Pokusíme se některé z nich popsat užitím transformace fyzikálních veličin.

Nejdříve si ujasníme, co to znamená, že můžeme pozorovat nějakou změnu. Vzhledem k tomu, že jsme zvyklí všechny velikosti posuzovat relativně vůči jiným velikostem, neviděli bychom přímo zvětšení světa. Změnu bychom viděli porovnáním procesů, které by probíhaly jinak před a po zvětšení. Skoro nic by totiž nefungovalo tak, jako před transformací (změnou rozměrů).

K tomu, abychom mohli mluvit o pozorovatelných změnách, musíme specifikovat, jak se změni fyzikální zákony. Vezmeme například Newtonův gravitační zákon $F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$. Tato formule dává předpis pro gravitační sílu v případě, že vzdálenost mezi dvěma tělesy je r a mají hmotnosti m_1, m_2 . Vzdálenost a hmotnost měříme pomocí nějakého měřítka (například metr je definován přes rychlost světla, kilogram je uložený v ústavu pro míry a váhy v Paříži). Základní otázkou je, jestli po transformaci (změně rozměrů) se zákony změni tak, že do nich dosadíme vzdálenost změřenou stejným způsobem jako před transformací, vezmeme prostě nějaký metr, který se ale také zvětšil, anebo měříme pomocí původních nezměněných měřítka. Matematicky řečeno, označíme-li $v(A, B)$ vzdálenost dvou bodů měřenou původními měřítka, $v'(A, B)$ vzdálenost měřenou zvětšenými měřítka a A', B' jsou obrazy bodů A, B po transformaci (čárkovaně značím veličiny a jednotky po transformaci), tak platí:

$$v(A', B') = 10 v(A, B), \quad v'(A', B') = v(A, B).$$

Teď už jenom zbývá rozhodnout, jestli po transformaci bude platit místo $F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{v(A, B)^2}$

a) $F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{v'(A', B')^2}$ (vzdálenost měříme stejným způsobem jako před transformací – pomocí měřítka, které se změnilo) nebo

b) $F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{v(A', B')^2}$ (vzdálenost měříme pomocí původních, nezměněných měřítka).

Rozeberme nejprve případ a). Fyzikální zákony platí ve stejné formě jako před transformací, přičemž fyzikální veličiny v nich obsažené se měří změněnými měřítka. To znamená, že jste sice všechny rozměry desetkrát zvětšili, ale rovněž jste předefinovali jednotku metru (tj. změnil fyzikální konstanty, např. rychlost světla) tak, že se vlastně nic nestalo. Všechny pohybové rovnice vypadají úplně stejně, veličiny nabývají ve změněných měřítka stejné hodnot, ale nikdo si ničeho nevšimne. Délka libovolného předmětu po transformaci je $[l'] m' = l' = 10l = 10[l] m = [l] 10 m = [l] m'$ (hranatou závorkou rozumím číselnou hodnotu veličiny), neboť právě $m' = 10 m$. V tomto smyslu jsou fyzikální zákony neměnné vůči libovolné transformaci. (Což je zároveň jeden z výchozích principů obecné teorie relativity.) Jenom předefinujeme jednotku, ale jestli jsme to udělali tak, že všechny předměty jsme $10 \times$ vzdálili a přitom desetkrát zvětšili rychlost světla, to nikdo nepozná.

Případ b). Nebudu tu lícit, jak se $100 \times$ zmenší gravitační zrychlení, $1000 \times$ zmenší hustota látek apod., jen se soustředím na základní problémy.

Především, naše změna totálně nespĺňuje platné zákony. Nemůžete zároveň splnit zákon zachování hybnosti (rychlost zůstává konstantní) a zachovat také moment hybnosti (to by musela rychlost $10 \times$ klesnout). *Někdo* prostě přišel (jestli to byl ufónek nebo Bůh, považují za nepodstatné) a vynaložil své úsilí na to, aby všechny částice od sebe $10 \times$ vzdálil. Musel tím zvýšit desetkrát i jejich rychlosti, neboť $v = \Delta s / \Delta t$, jinak by porušil výše zmíněné transformační pravidlo. Musíme ale také říci, na jaké úrovni v nitru hmoty se zastavil. Pokud

jenom vzdálil molekuly, změnil tak většinu látek v plyn ($1000\times$ menší hustota), pokud odděloval i atomy, rozbil tak skoro všechny chemické sloučeniny ($100\times$ klesla elektrostatická síla, která je zodpovědná za všechny chemické vazby), mohl i rozbít atomy a nakonec i rozštěpit jádra atomů – oddělení nukleonů od sebe (a na to už je třeba vynaložit sakra velikou energii). A tím jeho moc končí, i kdyby byl všemocný. Kvarky uvnitř nukleonů už oddělit nemůže, neboť energie k tomu potřebná je tak velká, že bohatě stačí na tvorbu nových částic. Tady je vidět, že takto klasicky pojatá úloha musí mít své hranice, z klasického hlediska můžeme jít maximálně po úroveň atomů.

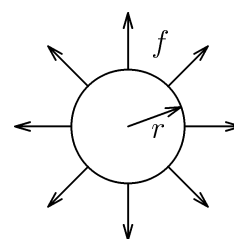
Rozeberme také přírodní zákony. Síly, které ubývají s kvadrátem vzdálenosti (jsou to takzvaně síly dlouhodobosahové) logicky klesnou $100\times$. Zároveň ale platí, že podle definice síly z druhého Newtonova zákona $F = ma$, abychom urychlili nějaké těleso na stejnou číselnou hodnotu zrychlení, musíme vynaložit desetkrát větší sílu ($a' = 10a$), efektivně tedy klesne např. gravitace $1000\times$. Snáze tento jev pochopíme tak, že naši transformaci dotáhneme matematicky do konce. Nebudeme měnit číselné hodnoty rozměrů, ale formálně předefinujeme fyzikální konstanty tak, aby se nám vše jevilo $10\times$ větší, jako by se metr desetkrát zmenšil. Poté všechny základní konstanty předefinujeme tak, aby zákony zůstaly ve stejné podobě, a máme tady nový svět. Konkrétně $10\times$ zmenšíme rychlost světla, $1000\times$ zmenšíme gravitační konstantu κ , neboť v jejím rozměru je m^{-3} apod. Nutno však poznamenat, že v naší úloze jsme objektivně žádné konstanty neměnili, studujeme ten samý vesmír jako před změnou, tímto způsobem ale snadno nahlédneme, jak se který proces změní.

Nakonec shrnu vaše závěry, jak by to s námi vypadalo. Jedním slovem – špatně. $1000\times$ menší hustota způsobí, že z běžných látek budou plyny, maximálně kapaliny. Tíhové zrychlení na „povrchu“ Země bude $100\times$ menší, odstředivá síla kolem rovníku způsobí (stoupne $10\times$), že se většina hmoty Země rozlítne do vesmíru (za předpokladu, který jsem již diskutoval, že se totiž zvětší rychlost, aby oběžná doba zůstala stejná). Termojaderná syntéza ve Slunci je silně závislá na hustotě hmoty, Slunce vyhasne a díky rotaci dříve, než se opět gravitačně dá do kupy, ztratí tolik hmoty, že už na další svícení mít nebude. O rozpadu molekul a atomů díky stokrát slabší elektrostatické interakci jsem už psal. Ze Sluneční soustavy i galaxie se stane vysoce energetická mlhovina a snad za pár miliard let dojde k tomu, že se na nějaké nově vzniknuvší planetě z nově vytvořených atomů a molekul zrodí inteligentní život, který pochopí, jakou strašnou katastrofu naše úloha ve vesmíru vyvolala.

Úloha I.5 ... balónek

Jak moc můžete nafouknout pouťový balónek, dokud nepraskne?

Předpokládejte, že balónek má tvar koule. Nenafoknutý nechť má poloměr r_0 . Je z gumové blány, která má v jistém přiblížení tyto elastické vlastnosti: roztahujeme-li kruh vyříznutý z této blány na okraji tak, že síla na jednotku délky obvodu je f , bude poloměr kruhu r přímo úměrný f , $r = r_0(1+af)$; a je konstanta úměrnosti (viz obr. 18). Materiál praskne při maximální síle na jednotku délky f_{max} .



Obr. 18

Na jedno nadechnutí naberete do plic objem V_{fuk} vzduchu a ten pak fouknete do balónku. Kolikrát můžete do balónku fouknout, než praskne, a jaký bude mít rozměr?

Řešení:

Před samotným řešením příkladu je třeba si důkladně přečíst zadání a povšimnout si, že v zadání úlohy je popsáno chování kruhu z uvažované gumové blány, zatímco úloha požaduje vyšetřit chování kulového povrchu, které by mohlo být zcela odlišné. Pro správné pochopení celé situace je dobré si také povšimnout, že pro $r = r_0$ je $f = 0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ - „pnutí je v počátečním stavu nulové“.

Prvním krokem k úspěšnému vyřešení příkladu je najít závislost poloměru balónku R na f . Necht' je balónek, jehož počáteční poloměr byl R_0 , nafouknut na poloměr R . Uvážíme kulový vrchlík o poloměru ρ . Jelikož povrch koule má v každém bodě stejné vlastnosti, platí $\rho/\rho_0 = R/R_0$. Je-li vrchlík dostatečně malý, platí v označení dle obr. 19 $\varphi = \frac{\rho}{R}$ a pro jeho výšku platí

$$h = R(1 - \cos \varphi) = R \left[1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] = R \frac{\varphi^2}{2}.$$

Odtud získáme $\frac{h}{\rho} = \frac{\varphi}{2}$, což znamená, že pro malé φ je vrchlík mnohem „plošší než širší“ a lze tudíž pro něj použít vztahy platné pro kruh. Odtud již přímo plyne

$$(1 + af) = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{R}{R_0}.$$

Tento vztah lze také získat porovnáním poměru obsahů dvou kruhů z uvažovaného materiálu s poměrem povrchů dvou koulí:

$$(1 + af)^2 = \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R_0^2}.$$

Platí tedy $R = R_0(1 + af)$. Odtud již snadno odvodíme, že maximální objem balónku je

$$V_{max} = \frac{4}{3}\pi R_{max}^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3(1 + af_{max})^3.$$

V případě, že zanedbáme přetlak v balónku vzniklý pnutím v gumové bláně, lze do balónku fouknout celkem

$$n = \left[\frac{V_{max} - V_0}{V_{fuk}} \right] \text{ krát } ([x] \text{ znamená dolní celou část čísla } x),$$

kde $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$.

K dosažení přesnějšího výsledku je třeba uvážit přetlak v balónku. Uvážíme opět kulový vrchlík o poloměru ρ . Pro dostatečně malý kulový vrchlík platí $\varphi = \frac{\rho}{R}$. Součet velikostí elastických sil působících po jeho obvodu je $F = 2\pi\rho f$, velikost jejich výslednice, která směřuje do středu balónku, je

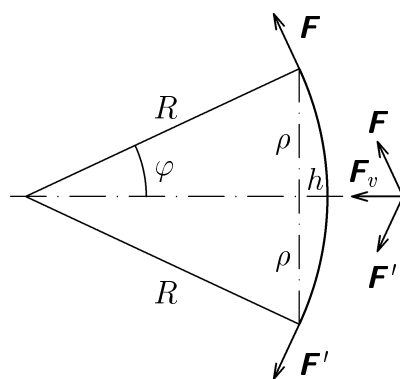
$$F_v = F\varphi = 2\pi\rho f \frac{\rho}{R} = \frac{2\pi\rho^2 f}{R}.$$

Tato výslednice způsobuje přetlak

$$\Delta p = \frac{F_v}{\pi\rho^2} = \frac{2f}{R}.$$

Tento vztah lze také odvodit následovně: Představíme si kouli jako dvě polokoule, délka jejich spoje je $2\pi R$ a působí tedy na něm síla $2\pi R f$. Tato síla odpovídá síle způsobené tlakem, která se snaží obě polokoule odtrhnout. Získáváme tedy:

$$\Delta p \pi R^2 = 2\pi R f \quad \text{a tedy} \quad \Delta p = \frac{2f}{R}.$$



Obr. 19

Protože teplota v balónku je stejná jako teplota v okolí balónku platí:

$$(p_a + \Delta p)V_{max} = p_a(V_0 + nV_{fuk})$$

$$n = \left[\frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3}{V_{fuk}p_a} \left(p_a + \frac{2f_{max}}{R_0 + R_0af_{max}} \right) (1 + af_{max})^3 - \frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3}{V_{fuk}} \right]$$

Za předpokladu, že teplota v balónku nedosáhne teploty v okolí balónku, lze pro přepočítání objemu použít vztahů platných pro adiabatický děj.

K řešení lze přidat ještě jeden zajímavý postřeh k úloze. Vypočteme práci potřebnou k roztažení gumového kruhu o počátečním poloměru r_0 na poloměr r . Platí:

$$W = \int_{r_0}^r 2\pi\rho \frac{\rho - r_0}{r_0 a} d\rho = \pi \frac{2r^3 + r_0^3 - 3r^2r_0}{3r_0 a}$$

V některých řešeních se pracovalo s pojmem energie blány, který lze definovat pouze na základě tohoto vztahu. V žádném případě neplatí pro energii vztah obdobný vztahu pro energii povrchu kapaliny ($E = \sigma S$). Dále ukážeme, že vztah pro vykonanou práci neodporuje zákonu zachování energie. Vypočítáme plošnou hustotu energie

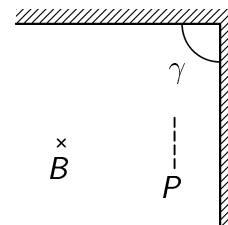
$$\varepsilon = \frac{E}{S} = \frac{2r}{3ar_0} + \frac{r_0^2}{3ar^2} - \frac{1}{a}$$

Plošná hustota energie je tedy funkcí závislou pouze na poměru r a r_0 a tedy pro energii jakékoliv části blány, jejíž obsah je S , platí $E = \varepsilon S$. Rozdělili bychom původní blánu na n částí, každou bychom roztáhli samostatně ve stejném poměru a znovu je spojili. Vykonali bychom stejnou práci, jako kdybychom roztahovali přímo původní blánu. Platí tedy zákon zachování energie.

Úloha II.1 ... rohové zrcadlo

Představte si, že stojíte v bodě B na obr. 20 před dvěma zrcadlovými plochami, které jsou na sebe kolmé ($\gamma = 90^\circ$). Kolikrát uvidíte svůj obraz v zrcadlech? Co se stane, dáme-li před jednu stěnu překážku P (např. skříň)?

Jak se situace změní, budou-li zrcadla měnit svůj úhel ($\gamma < 90^\circ$, resp. $\gamma > 90^\circ$)?



Obr. 20

Řešení:

Nejprve několik vět úvodem. Úloha zněla: „... kolikrát uvidíte svůj obraz v zrcadlech...“ Měli bychom tedy uvažovat reálný případ (lidské tělo, dvě oči). Samozřejmě, že to přináší problémy. Pokud totiž máte oči dvě, uvidíte se obecně (tj. v některých polohách) vícekrát, nežli jednooký. Vzhledem k tomu, že by se úloha v případě dvou očí stala komplikovanou (vzdálenost očí, dominance jednoho z nich...), uvažujme proto následující formulaci úlohy: „Kolikrát uvidí zornička sama sebe?“

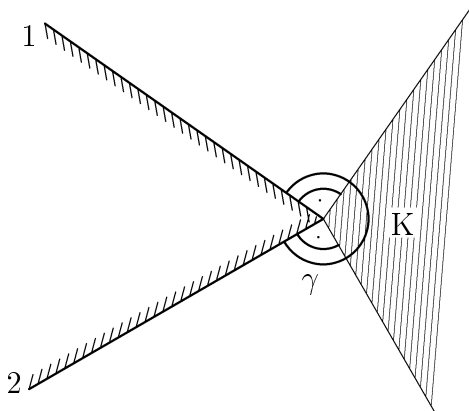
Nejprve si uvědomme, co vlastně znamená, že se zornička uvidí v zrcadle. Znamená to, že paprsek, který „z ní“ vyšel, na ni zpět dopadne.

Úlohu budeme řešit bez překážky (v případě překážky se postupuje obdobně, ale je to zdlouhavé) pro obecný úhel γ a budeme diskutovat tři případy:

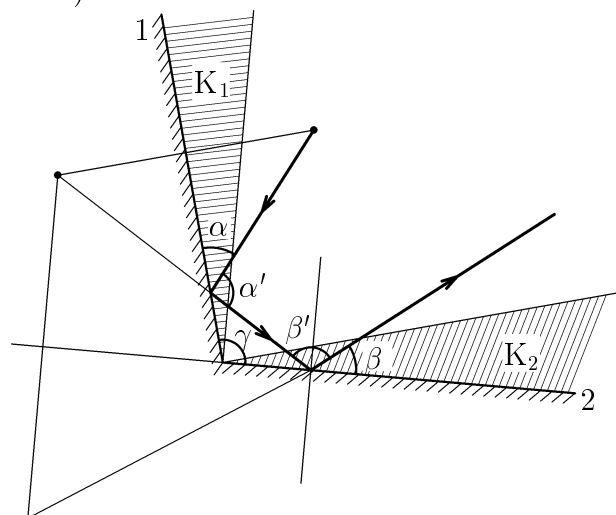
i) ($180^\circ \leq \gamma < 360^\circ$)

Je zřejmé, že pokud se paprsek odrazí od jednoho ze zrcadel, nikdy se neodrazí od toho druhého. To znamená, že maximální počet odrazů paprsku, vycházejícího ze zorničky tak, aby na ni dopadl zpět, je roven jedné. Zornička se tedy uvidí 1-krát.

Nemusí se ale vidět ani jednou a to v tom případě, že je v oblasti K , ze které neexistuje ani jedna kolmice na jedno ze zrcadel (viz obr. 21).



Obr. 21



Obr. 22

ii) ($90^\circ < \gamma < 180^\circ$)

Uvažujme případ, že se paprsek vycházející ze zorničky odrazil nejprve od jednoho zrcadla, pak od druhého a dopadl zpět na zorničku (viz obr. 22). Je dobré si také uvědomit, že pokud se paprsek pohybuje směrem do vrcholu úhlu svíraného zrcadly, pak se každý následující úhel odrazu liší od předchozího o úhel γ , a pokud se paprsek vrací, liší se o úhel $-\gamma$.

Pokud paprsek dopadá pod úhlem α na zrcadlo 1, dopadne na zrcadlo 2 pod úhlem $180^\circ - (\alpha + \gamma)$. Aby se paprsek mohl vrátit do zorničky, musel by být úhel $\alpha' + \beta'$ menší než 180° , tj. $\gamma \leq 90^\circ$. To však není v tomto případě splněno. Zároveň je zřejmé, že žádný z paprsků, které se jednou odrazily od každého ze zrcadel, se nikdy neodrazí potřetí.

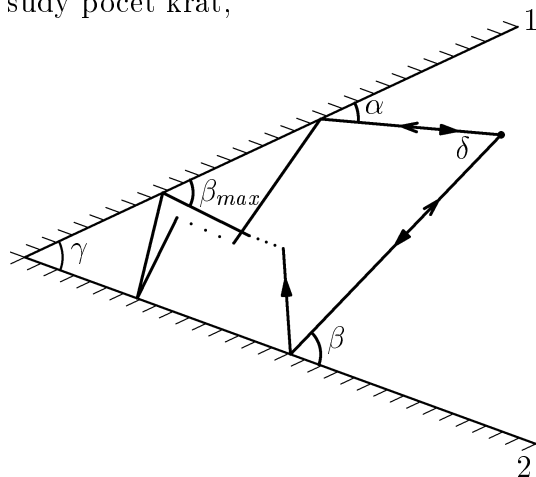
Zbývá možnost, že se paprsek odrazí právě jednou od jednoho ze zrcadel. Paprsek vycházející ze zorničky se může odrazit jednak od zrcadla 1 a vrátit se zpět, jednak od zrcadla 2 a vrátit se zpět. To znamená, že paprsek pokaždé dopadá kolmo na dané zrcadlo. Vždy nastane alespoň jedna z těchto možností. Může se ale stát, že opět neexistuje kolmice vedená ze zorničky na jedno ze zrcadel, a pak se uvidí jen jednou (viz obr. 22, oblasti K_1 a K_2).

Tedy maximálně se zornička v případě ii) uvidí 2-krát, minimálně jednou.

iii) ($0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$)

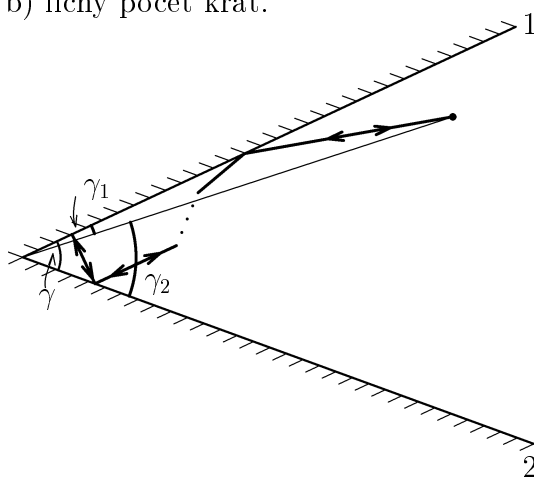
Budeme uvažovat dvě varianty. Paprsek jdoucí ze zorničky se odrazí, nežli na ni dopadne zpět (viz obr. 23)

a) sudý počet krát,



Obr: 23a

b) lichý počet krát.



Obr: 23b

Rozebereme nejprve „sudou“ variantu. Jak již bylo řečeno, pokud paprsek dopadne na zrcadlo 1, potom 2, potom 1, . . . , po každém odrazu se velikost následujícího úhlu dopadu zvětší o γ . To platí samozřejmě pouze tehdy, pokud paprsek postupuje směrem do vrcholu úhlu, který zrcadla svírají. Označme jako β_{max} úhel, pod kterým paprsek začíná z úhlu „vystupovat“ (viz schematicky obr. 23a).

Platí, že

$$\beta_{max} = 180^\circ - \alpha - (k - 1)\gamma,$$

kde k je polovina celkového počtu odrazů. Nežli paprsek dopadne zpět na zorničku, odrazí se $(k - 1)$ -krát. Označme úhel, který při dopadu do zorničky paprsek svírá se zrcadlem 2, jako β a úhel, který svírá tento paprsek s paprskem vycházejícím ze zorničky, jako δ . Vzhledem k tomu, že

$$\beta = \beta_{max} - (k - 1)\gamma$$

a také

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + \gamma + \delta = 360^\circ,$$

dostáváme pro úhel δ rovnici

$$\delta = 180^\circ - (2k - 1)\gamma.$$

Očividně $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$. Odtud plyne pro k_{max} nerovnost

$$k_{max} \leq (90^\circ/\gamma) + 1/2. \quad (5)$$

Zornička se v „sudé“ variantě iii) uvidí

$$n_S = 2 \text{INT}[(90^\circ/\gamma) + 1/2]\text{-krát}$$

(INT znamená celou část, dvojka je tam proto, že pokud se uvidím v jednom zrcadle, uvidím se i ve druhém; viz v obr. 23a dva druhy šipek, tj. směru cesty pro paprsek).

Přejděme k „liché“ variantě. Při ní, po určitém počtu odrazů, dojde k situaci, že paprsek dopadne na jedno ze zrcadel pod pravým úhlem a vrací se po stejné dráze zpět. To znamená, že platí $\alpha + k\gamma = 90^\circ$.

Nicméně zde je nutno si uvědomit, že existuje omezení pro úhel α . (To je rozdíl od „sudé“ varianty, kde úhel α v rovnici pro k_{max} nevystupoval!). Pokud se paprsek ze zorničky odrazí nejprve od zrcadla 1 (viz obr. 23b), je zřejmé, že $\alpha_{1min} = \gamma_1$. Tedy

$$k_{1max} = \text{INT}[(90^\circ - \gamma_1)/\gamma].$$

V případě, že se paprsek nejprve odrazí od zrcadla 2, je

$$k_{2max} = \text{INT}[(90^\circ - \gamma_2)/\gamma].$$

(Snadno se dá např. ukázat, že rozdíl $|k_{1max} - k_{2max}| \leq 1$). Celkový počet obrazů v liché variantě je tedy

$$n_L = k_{1max} + k_{2max} + 2$$

(dvojka znamená přímý odraz v zrcadlech).

Celkový počet svých obrazů, které tak zornička uvidí, bude roven

$$n = n_S + n_L.$$

Speciálně pro $\gamma = 90^\circ$ bude $n_S = 2$. Nicméně se zornička „sudou“ variantou uvidí jen jednou. To proto, že paprsek z ní vycházející bude rovnoběžný s paprskem vcházejícím, tj. přicházejí ze stejného (pro zorničku!) místa, a ona je nemůže rozlišit. (Pokud bychom

zorničku nahradili bodem, vracející se paprsek by jej minul. Zde hraje roli konečná velikost zorničky.)

Tento případ nastane pro všechny úhly γ , pro něž nastává v nerovnici (5) rovnost. V daných případech je tedy nutno odečíst jedničku od celkového počtu obrazů. (Je užitečné si to nakreslit, aby bylo vidět, že vlastně uvidíte všechny blízké body zobrazovaného bodu, jen tento bod ne.)

A tak se zornička pro $\gamma = 90^\circ$ uvidí 3-krát.

Pokud je v místnosti překážka ($\gamma = 90^\circ$), uvidí se zornička pouze dvakrát, protože překážka ze zadání stojí v cestě jednomu paprsku. Pokud by tato překážka byla posunutá nevhodněji, viděla by se zornička pouze jednou, případně ani jednou.

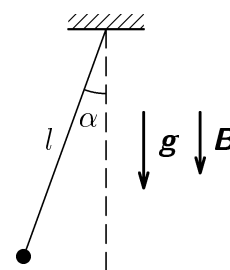
Nakonec bych ještě rád zdůraznil, že vztah pro n se liší od vzorce

$$n = \text{INT}[360^\circ/\gamma] - 1,$$

který bychom „vydedukovali“ bez hlubšího rozboru. Jako příklad bych uvedl $\gamma = 72^\circ$. V tomto úhlu existují dvě oblasti, ve kterých se zornička uvidí 5-krát, a jedna oblast, ze které se uvidí jen 4-krát.

Úloha II.2 ... magnetické kyvadlo

V homogenním tíhovém poli (tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$) je na závěsu zanedbatelné hmotnosti délky $l = 1,00 \text{ m}$ umístěna malá kovová kulička o hmotnosti $m = 10,0 \text{ g}$. Na kuličku byl přiveden náboj o velikosti $Q = 5,0 \mu\text{C}$. Celá tato aparatura se nachází ve svislém homogenním magnetickém poli, jehož vektor magnetické indukce \mathbf{B} o velikosti $B = 0,5 \text{ T}$ má stejný směr jako tíhové zrychlení \mathbf{g} . Ostatní magnetická pole jsou vůči tomuto magnetickému poli zanedbatelná. Celá soustava se nachází v klidu. Závěs vychýlíme o úhel $\alpha = 7^\circ$ a uvolníme. Popište pohyb kuličky po uvolnění.



Obr. 24

Řešení:

Nejprve uvedme kvalitativní řešení. Na kuličku působí magnetická síla, která je dána vektorovým součinem

$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6)$$

Magnetické pole způsobuje zakřivení dráhy kuličky. Síla, kterou působí na kuličku, ji dle Flemingova pravidla levé ruky odchyluje doleva (při pohledu shora a při kladném náboji kuličky) od směru jejího pohybu (v zadání úlohy míří magnetické pole ve směry osy $-z$). Její dráha musí být odpovídajícím způsobem prohnuta. Uvážíme-li, že dominujícím pohybem kuličky je pohyb matematického kyvadla, vypadá její kmitání při pohledu shora dle obr. 28. Na kružnici leží ty body, v nichž je rychlost kuličky nulová. Magnetické pole tedy způsobuje stáčení roviny kyvu kyvadla.

Cílem kvantitativního řešení, kterým se fyzika ve skutečnosti zabývá, je dostat řešením pohybových rovnic závislost polohového vektoru částice na čase $\mathbf{r}(t)$. Vycházíme při tom z pohybových rovnic

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_m + \mathbf{R},$$

kde \mathbf{R} je síla vlákna. V kartézském systému (x, y, z) mají tvar

$$\begin{aligned} ma_x &= -BQv_y + R_x, \\ ma_y &= BQv_x + R_y, \\ ma_z &= -mg + R_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Toto je komplikovaná soustava rovnic, jejíž přímé řešení je obtížné. My se však bez něho omejdeme.

Předně si uvědomíme, že i obyčejné matematické kyvadlo analyticky vyřešíme jen pro malé výchylky α , kdy můžeme psát $\sin \alpha \doteq \alpha$. Potom se pohyb odehrává přibližně v rovině konstantní souřadnice z . Podle obrázku 25 rozložíme tíhovou sílu na složku kolmou na závěs a složku ve směru závěsu, která se vyrovná s vazebnou silou závěsu. Potom síla $mg \sin \alpha$ působí přibližně proti výchylce y , pro niž platí $\sin \alpha = y/l$. Tím se nám redukuje rovnice (7) na dvojrozměrný problém

$$\begin{aligned} ma_x = F_x &= -BQv_y - \frac{mg}{l}x, \\ ma_y = F_y &= BQv_x - \frac{mg}{l}y. \end{aligned} \quad (8)$$

Na první pohled jsme si moc nepomohli, neboť před sebou máme soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{BQ}{m} \frac{dy}{dt} - \frac{g}{l}x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{BQ}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{g}{l}y. \end{aligned} \quad (9)$$

I když lze tuto soustavu rovnic oproti původní soustavě řešit přesně matematickým postupem, nebudeme ho provádět a raději zkusíme nalézt řešení fyzikální analogií.

Ta spočívá v tom, že „náhodou“ víme ještě o jedné síle, která je jako magnetická síla (6) dána vektorovým součinem rychlosti částice a nějakého vektoru. Je to síla Coriolisova. Nejprve vysvětlíme, jak vypadá Coriolisova síla a s čím úzce souvisí, a potom vám objasníme ideu našeho řešení magnetického kyvadla.

Pohybový zákon v rotující vztažné soustavě

Mějme inerciální vztažnou soustavu (IVS) \mathcal{S}' a soustavu \mathcal{S} , která vůči ní rotuje kolem společného počátku konstantní úhlovou rychlostí ω (viz obr. 26), jedná se tedy o soustavu neinerciální (NIVS). Druhý Newtonův zákon platí jen pro IVS a to v podobě, kterou všichni dobře známe (čárkovaně značíme veličiny náležející do \mathcal{S}'):

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}', \quad (10)$$

V soustavě \mathcal{S} však vznikají tzv. zdánlivé síly, které nikterak nesouvisí s fundamentálními interakcemi (s gravitační či elektromagnetickou silou). Tyto síly jsou přímým důsledkem toho, že se soustava \mathcal{S} pohybuje vůči všem IVS zrychleně. Pohybový zákon v soustavě \mathcal{S} pak můžeme zapsat v podobě

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S, \quad (11)$$

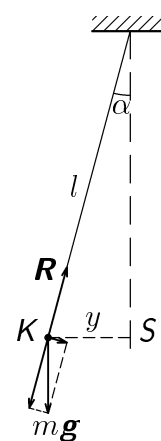
kde \mathbf{F} je výslednice všech skutečných sil (např. elektrická, magnetická či gravitační síla) a \mathbf{F}_S je výslednice všech zdánlivých (setrvačných) sil.

V soustavě \mathcal{S} působí obecně dvě takové zdánlivé síly. Jednou z nich je **síla odstředivá**, tu všichni dobře znáte z kolotoče,

$$\mathbf{F}_O = m\omega^2[x', y'] \equiv m\omega^2\boldsymbol{\rho},$$

kde jsme $\boldsymbol{\rho}$ označili polohový vektor v rovině (x, y) . Druhou silou je **síla Coriolisova**, která je zodpovědná např. za stáčení pasátních větrů v subtropích. A toto je námi hledaná síla, která nám pomůže úlohu elegantně vyřešit, neboť je podobně jako magnetická síla dána vektorovým součinem (působí kolmo na směr rychlosti)

$$\mathbf{F}_C = 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$



Obr. 25

Platí pro ni stejné zákonitosti, které jsme popsali u síly magnetické. Druhý Newtonův zákon v soustavě \mathfrak{S} pak má tvar

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\omega^2\boldsymbol{\rho} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

což v rovině (x, y) dává soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x - 2m\omega v_y + m\omega^2 x, \\ ma_y &= F_y + 2m\omega v_x + m\omega^2 y. \end{aligned} \quad (12)$$

Řešení rovnic analogií

Rovnice (12) vypadají velice podobně jako rovnice (8). Představme si, že rovnice (8) nepopisují působení magnetického a tíhového pole na kyvadlo při jeho malých výchylkách v naší IVS, nýbrž že se jedná o kyvadlo v NIVS \mathfrak{S} rotující úhlovou rychlostí ω a s nulovým magnetickým polem. Jinak řečeno: budeme považovat magnetickou sílu za sílu Coriolisovu, kde

$$\omega = \frac{BQ}{2m}.$$

Proč to všechno děláme? K naší hypotetické NIVS \mathfrak{S} totiž existuje IVS \mathfrak{S}' , která má tu vlastnost, že z pohybového zákona (11) se stane zákon (10), ve kterém už žádný vektorový součin $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ není. Tím se pohybové rovnice velice zjednoduší a nám nebude činit problémy je vyřešit. Nalezneme tak řešení v soustavě \mathfrak{S}' , které jednoduchou transformací přeneseme zpět do soustavy \mathfrak{S} .

Přidáme-li do (8) nulu, tzn. přičteme a odečteme $m\omega^2 x$, resp. $m\omega^2 y$, rovnice budou mít tvar

$$\begin{aligned} a_x &= -\left(\frac{g}{l} + \omega^2\right)x - 2\omega v_y + \omega^2 x, \\ a_y &= -\left(\frac{g}{l} + \omega^2\right)y + 2\omega v_x + \omega^2 y. \end{aligned} \quad (13)$$

Srovnáme-li rovnice (13) s (12), vidíme, že výrazy $-m\Omega^2 x$ a $-m\Omega^2 y$, kde jsme označili

$$\Omega^2 = \frac{g}{l} + \omega^2, \quad (14)$$

hrají roli složek síly \mathbf{F} v rovnici (11).

Nyní stačí jenom vědět, jak se transformují složky síly do soustavy \mathfrak{S}' , vůči níž se \mathfrak{S} otáčí, a tuto transformaci odvodíme z obr. 26. Velice snadno zjistíte, že

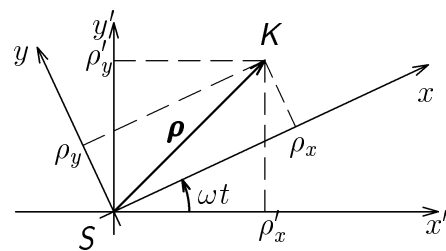
$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t + y' \sin \omega t, \\ y &= -x' \sin \omega t + y' \cos \omega t. \end{aligned} \quad (15)$$

Jedná se jenom o hledání těch správných pravoúhlých trojúhelníků, jejichž odvěsny dohromady poskládají x a y . Inverzní transformace z \mathfrak{S} do \mathfrak{S}' vychází

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\ y' &= x \sin \omega t + y \cos \omega t, \end{aligned}$$

neboť soustava \mathfrak{S}' se vůči \mathfrak{S} otáčí s úhlovou rychlostí $-\omega$. Jelikož síla \mathbf{F} je úměrná vektoru $[x, y]$, ihned odtud vyplývá, že v soustavě \mathfrak{S}' bude mít tvar

$$\mathbf{F}' = [-\Omega^2 x', -\Omega^2 y'],$$



Obr. 26

a tedy musíme v \mathfrak{S}' řešit dvě rovnice, které už nejsou mezi sebou provázány,

$$\begin{aligned} a'_x &= -\Omega^2 x', \\ a'_y &= -\Omega^2 y'. \end{aligned} \quad (16)$$

Rovnice (16) určitě všichni poznáváte, jejich řešením jsou obyčejné kmity, neboť zrychlení je přímo úměrné výchylce, ale opačného směru. Ale pozor, jsou to obecně eliptické kmity, neboť zde velice záleží na počátečních podmínkách.

Obecné řešení rovnic (16) napíšeme jako superpozici harmonických funkcí sin a cos:

$$\begin{aligned} x' &= K \sin \Omega t + L \cos \Omega t, \\ y' &= M \sin \Omega t + N \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (17)$$

konstanty K, L, M, N musíme dopočítat z počátečních podmínek (např. konkrétně pro hodnoty $K = N \neq 0, L = M = 0$ dostáváme obyčejné kruhové kmity). V čase $t = 0$ platí (počátek soustavy souřadné odpovídá rovnovážné poloze kyvadla – bod S na obr. 25):

$$\begin{aligned} y'(0) &= \xi, & v'_y(0) &= 0, \\ x'(0) &= 0, & v'_x(0) &= -\omega \xi, \end{aligned} \quad (18)$$

kde jsme označili počáteční výchylku ve směru y (a tím i y') $\xi = l \sin \alpha$. Rychlost $v_x(0)$ jsme zvolili nulovou, a proto v soustavě \mathfrak{S}' je $v'_x(0) = -\omega \xi$, neboť se celá \mathfrak{S}' otáčí vůči \mathfrak{S} úhlovou rychlostí $-\omega$.

Ze známého vzorečku $v = \omega r$ pro rovnoměrný pohyb po kružnici, a uvážíme-li, že rychlosti jsou maximální tam, kde jsou nulové polohy, a naopak, snadno odvodíme

$$\begin{aligned} v'_x &= K\Omega \cos \Omega t - L\Omega \sin \Omega t, \\ v'_y &= M\Omega \cos \Omega t - N\Omega \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (19)$$

Dosadíme-li počáteční podmínky (18) do rovnic (19) a (17), získáme: $K = -\xi\omega/\Omega, L = 0, M = 0, N = \xi$. V soustavě \mathfrak{S}' má řešení naší úlohy tvar

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{\xi\omega}{\Omega} \sin \Omega t, \\ y' &= \xi \cos \Omega t. \end{aligned}$$

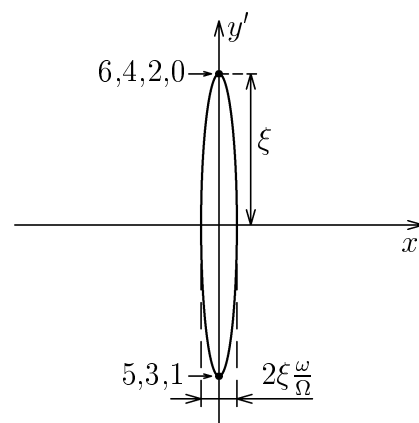
V soustavě \mathfrak{S}' kyvadlo vykonává eliptické kmity, jak je to vidět na obrázku 27.

Teď už stačí provést transformaci zpět do soustavy \mathfrak{S} podle vztahu (15). Řešení naší úlohy pak vypadá takto:

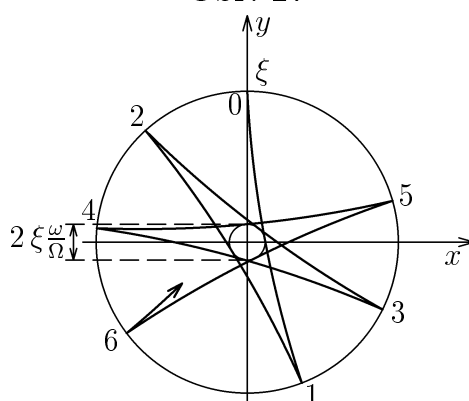
$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \Omega t \sin \omega t - \frac{\xi\omega}{\Omega} \sin \Omega t \cos \omega t, \\ y &= \xi \cos \Omega t \cos \omega t + \frac{\xi\omega}{\Omega} \sin \Omega t \sin \omega t. \end{aligned} \quad (20)$$

Za použití stejných počátečních podmínek bychom dospěli k výsledku (20) řešením rovnic (9). Cílem této úlohy v žádném případě nebyl výklad řešení soustavy diferenciálních rovnic. Uznávám, že námi použitá finta není úplně triviální, pokud jste ji ale pochopili, měli byste mít jasno v tom, co to vlastně ty zdánlivé síly jsou.

Na obr. 28 se skutečně můžeme přesvědčit, že pohyb kyvadla v našem přiblížení (20) kvalitativně souhlasí s tím, co jsme předpověděli v úvodu.



Obr. 27



Obr. 28

Závěr

Kyvadlo bude kmitat s úhlovou frekvencí Ω , přičemž ale nikdy neprojde rovnovážnou polohou. Během kmitání se stáčí vždy doleva, směruje-li magnetické pole ve směru osy $-z$ a naopak doprava, je-li \mathbf{B} ve směru z , a to tak, že polohy maximálních či minimálních výchylek se stáčí úhlovou rychlostí ω . Kyvadlo tak dělá charakteristické „špičky“. Nejmenší vzdálenost od počátku souřadné soustavy je $\xi\omega/\Omega$.

Pro zadané hodnoty získáme: počáteční výchylka $\xi = 12$ cm, frekvence $\omega = 1,3 \cdot 10^{-4}$ Hz, úhlová frekvence $\Omega = 3,1$ Hz. Tyto hodnoty samozřejmě vůbec neodpovídají obrázkům, kde byl použit poměr frekvencí asi $1 : 8,5$. Magnetická síla je mnohem slabší než tíhová, a tak za těchto podmínek můžeme mluvit o „stáčení roviny kyvů kyvadla“, neboť velikost vedlejší poloosy $\xi\omega/\Omega$ z obrázku 27 je zanedbatelná vůči hlavní poloose ξ , je asi desetitisíckrát menší. Stejně tak můžeme zanedbat ω ve vztahu (14). Dostáváme tak obyčejné matematické kyvadlo kmitající s periodou 2 s, jehož rovina kyvů se otočí kolem dokola za 14 hodin.

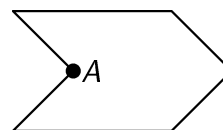
Poznámka

Úplně stejný pohyb vykazuje populární **Foucaultovo kyvadlo**, na které působí námi použitá Coriolisova síla s tím, že úhlová frekvence rotace poloh maximální a minimální vzdálenosti od rovnovážné polohy kyvadla je $\omega = \omega_Z / \sin \phi$, kde ϕ je zeměpisná šířka a ω_Z je velikost úhlové rychlosti Země rotující okolo vlastní osy. To souvisí s tím, že na pohyb kyvadla v našem přiblížení má vliv pouze složka vektoru $\boldsymbol{\omega}_Z$ ve směru tíhového zrychlení. V naší zeměpisné šířce ($\phi = 50^\circ$) se Foucaultovo kyvadlo otočí kolem dokola asi za 31,3 hodin; na severní polokouli se stáčí doprava, kdežto na jižní polokouli doleva. Kdybychom chtěli naše magnetické kyvadlo experimentálně změřit, museli bychom přihlídnout i k rotaci Země, která rovněž způsobuje stáčení roviny kyvů, neboť jsou oba jevy řádově srovnatelné.

Někdy se stáčení Foucaultova kyvadla vysvětluje tak, že se nemění orientace roviny kyvů vůči stálícím, což není obecně pravda, platí to jenom na pólech. Je to například vidět z toho, že za jeden den se ocitneme ve stejné pozici vůči stálícím, avšak kyvadlo rotační pohyb zdaleka ještě nedokončilo. Správným vysvětlením pohybu Foucaultova kyvadla je jen a jen působení Coriolisovy síly, která je důsledkem toho, že soustava spjatá se zemí je neinerciální.

Úloha II. 3 ... jarový tryskáč

Matouš si vystříhl z tvrdého papíru lodičku, která je nakreslena na obr. 29 při pohledu shora. Do místa A pak kápl kapičku jaru a „loď“ spustil na vodní hladinu. Nemálo se podivil, když loď „sama od sebe“ vyrazila prudce vpřed. Umíte pohyb lodi vysvětlit? Platí pro něj zákon zachování energie?

**Obr. 29****Řešení:**

Celou soustavu můžeme považovat za dvourozměrnou (v rovině hladiny, neuvolňuje se tedy žádná potenciální energie skrytá v gravitačním poli). Hladinu vody považujeme za pružnou blanku, která má tendenci smrštít se na co nejmenší plochu, ale gravitace jí to nedovolí. Energie uskladněná v této ploše je dána vzorcem

$$\Delta E = \sigma \Delta S,$$

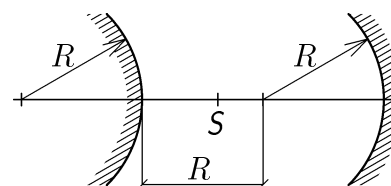
tedy vnitřní energie je úměrná ploše hladiny. Konstantu úměrnosti σ nazýváme povrchové napětí (vody) a jeho hodnota je přibližně $73 \text{ mJ} \cdot \text{m}^{-2}$. Kápnutím čistícího prostředku se ale neuvolní celá tato energie, rozvine se totiž povrch nové kapaliny – jaru. Ten má určitě také nějaké povrchové napětí. To se mi nepodařilo najít v žádných tabulkách, je však menší než povrchové napětí vody. Ono rozlité nutně nějakou energii spotřebuje, ale bude to méně, než voda dodá. Tolik energetické hledisko.

Z hlediska sil je to přibližně takto: Představme si místo lodičky, řekněme sirku, na jejíž jedné straně je čistá hladina a na druhé taky. Na každou stranu sirky působí povrchové napětí vody, které je v rovnováze a má velikost 73 mN na každý metr sirky. Kápnutím jaru, mýdla nebo jiné látky o nižším povrchovém napětí se tato rovnováha poruší a na sirku bude působit nenulová výsledná síla směrem do čisté vody. Pokud nebude ono těleso (sirka, lodička, cokoli plovoucího) připevněno, dá se do zrychleného pohybu, který přejde ve zpomalený, protože se skvrna rozšíří, tím hnací síla zanikne a nakonec odporové síly pohyb loďky zastaví.

Zákon zachování energie jako celek samozřejmě narušen není. Při výše popsaném ději se pouze přeměňuje jedna forma energie ve druhou a to potenciální energie (avšak ne ve smyslu gravitačního potenciálu!) soustavy jar–voda na kinetickou energii lodičky. Pokud bychom chtěli vrátit jar do láhve, na jeho shromáždění a hlavně odtržení z hladiny bychom potřebovali minimálně tolik energie, kolik jí získalo naše plavidlo při rozjezdu.

Úloha II.4 ... zrcadla, aneb kdo je nejkrásnější

Vypuklé a duté zrcadlo mají stejný poloměr křivosti R . Vzdálenost mezi vrcholy zrcadel je $2R$. V jakém bodě na optické ose zrcadel musíme umístit zdroj světla S , aby po odraze od vypuklého a dutého zrcadla splýval obraz bodu S se svým vzorem?



Obr. 30

Řešení:

Ve vzorovém řešení budeme používat znaménkovou konvenci, která se nejčastěji používá na střední škole. Veličiny měřené před zrcadlem jsou kladné, za zrcadlem záporné. (Podrobněji např. *E. Svoboda – Přehled středoškolské fyziky, SPN 1991, str. 468, 471, 472.*) Je dobré si uvědomit, že k tomu, aby někde vznikl obraz předmětu nestačí jeden paprsek, ale musí se tam protnout všechny paraxiální paprsky. K řešení nám nicméně stačí zobrazovací rovnice.

Bod S zobrazíme nejprve např. vypuklým zrcadlem a poté dutým. Opačným postupem bychom samozřejmě obdrželi stejný výsledek. Obraz S_1 vzniklý prvním zobrazováním bude vzorem pro druhé a jeho výsledek S_2 bude shodný s bodem S .

Zobrazovací rovnice pro vypuklé zrcadlo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{2}{R},$$

a – předmětová vzdálenost, a' – obrazová vzdálenost.

Zobrazovací rovnice pro duté zrcadlo:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{2}{R},$$

b – předmětová vzdálenost, b' – obrazová vzdálenost.

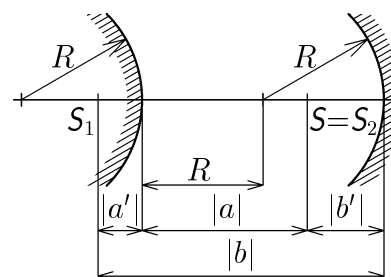
Podle výše uvedených předpokladů platí také rovnice

$$a' + b = 2R, \quad a + b' = 2R.$$

Nyní máme čtyři rovnice o čtyřech neznámých, z nichž snadno dopočítáme například a . Vyjde kvadratická rovnice se dvěma reálnými kořeny

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}R \quad \text{a} \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}R.$$

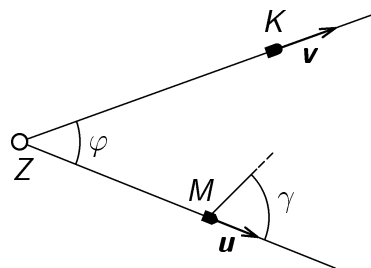
První kořen zjevně vyhovuje zadání úlohy, zatímco druhý nikoliv, neboť leží mimo oblast mezi zrcadly.



Obr. 31

Úloha II.5 ... dvojčata ve vesmíru

Michal a Karel jsou dvojčata. V zájmu vyššího vědeckého poznání je posadíme každého do jiné kosmické lodi v též čas $t = 0$ a vystřelíme ze Země Z rychlostmi \mathbf{u} a \mathbf{v} vstříc hvězdným dálavám. Abychom jim život co nejvíce znepríjemnili, jejich rychlosti svírají úhel φ , jak je to vidět na obr. 32. Po čas hvězdného putování se jejich rychlosti nemění. V čase t_0 se Michal, který se zrovna nachází v bodě M , rozhodne vyslat zprávu – rádiový signál svému sourozenci. Pod jakým úhlem γ vůči svému směru pohybu musí zaměřit signál, aby Karel zprávu obdržel?



Obr. 32

Vliv ostatních těles na dráhu lodí a paprsku zanedbejte. Diskutujte též případ, kdy vesmírné lodě nejsou vypuštěny ve stejný čas, ale Michal se vydá do vesmíru o dobu T dříve. Jak se změní výpočet, budou-li velikosti rychlostí \mathbf{u} a \mathbf{v} blízké rychlosti světla c ?

Řešení:

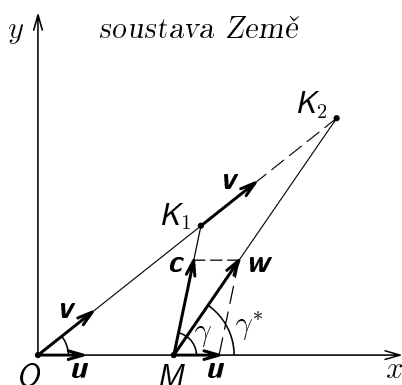
Předně si uvědomme, že když se budeme na celou situaci dívat ze soustavy spojené se Zemí, nebude platit, že úhel, pod kterým signál poletí, je shodný s úhlem, pod kterým signál Michal vyslal (viz obr. 33). Označme si \mathbf{w} rychlost signálu v soustavě spojené se Zemí. Pohybuje-li se Michal rychlostí \mathbf{u} a vyše-li signál rychlostí \mathbf{c} pod úhlem γ , rychlost letu signálu bude $\mathbf{w} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$ (na úlohu se díváme nerelativisticky). Rychlosti se **vektorově sčítají** a s výjimkou případu $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ zřejmě platí $\gamma \neq \gamma^*$, kde γ^* je úhel letu signálu v soustavě spojené se Zemí. Proto musíme úlohu řešit v Michalově soustavě.

Tato soustava se vzhledem k Zemi pohybuje rychlostí \mathbf{u} . Pro rychlost Karla v Michalově soustavě pak platí¹

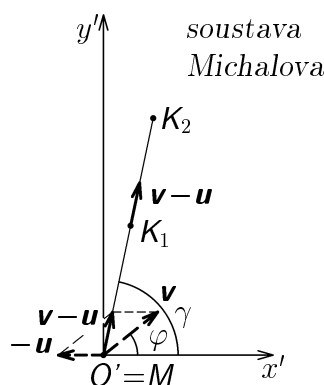
$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u},$$

což rozepsáno ve složkách

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - u, \\ v'_y &= v_y. \end{aligned}$$



Obr. 33



Obr. 34

Ve speciálním případě, kdy $T = 0$, se Karel vzhledem k Michalovi pohybuje po přímce, která prochází počátkem Michalovy soustavy, tj. polohou Michala (viz obr. 34). Michal musí vyslat signál tímto směrem. Z obrázku pak snadno nahlédneme, že platí

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{v_x - u} = \frac{v \sin \varphi}{v \cos \varphi - u}. \quad (21)$$

¹Tyto vztahy se nazývají adiční teorém skládání rychlostí, který plyne z Galileovy transformace souřadnic. Ve speciální teorii relativity musíme použít jiné vztahy vycházející z Lorentzovy transformace souřadnic.

Pokud vystartuje Michal o čas T dříve, bude úhel γ závislý na čase, označme jej $\bar{\gamma}$. Na obr. 35 je nastíněna tato situace v soustavě spojené s Michalem: V čase $t = -T$ vystartuje ze Země Michal, v $t = 0$ se vydává na svou pouť i Karel, aby po uplynutí doby t_0 mohl Michal vyslat signál (bod K_0), který Karel obdrží v čase $t = t_0 + \tau$ (bod K_1). Dráha Karla v Michalově soustavě je přímka se směrnicí $\tan \gamma$ vypočtené podle vzorce (21). Podle obr. 35 pak snadno odvodíme

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} = \frac{\xi}{\eta} = \frac{\sin \gamma (t_0 + \tau) v'}{\cos \gamma (t_0 + \tau) v' - uT},$$

kde τ je doba letu signálu. Uvědomme si však, že v nerelativistickém případě je doba letu signálu τ vůči času t_0 zanedbatelná, neboť dráha, kterou za nějakou dobu urazí Karel je mnohem menší než dráha, kterou za stejnou dobu urazí světlo. Na obrázku to znamená, že splynou úsečky MK_0 a MK_1 . Dobu τ je samozřejmě možno spočítat z kosinové věty $\triangle K_1MK_0$, což vede na řešení poměrně složité kvadratické rovnice. Výsledek vychází úměrný členům v/c a u/c , to znamená, že nemá smysl počítat s časem τ v nerelativistickém případě. Proto

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} \simeq \frac{v' t_0 \sin \gamma}{v' t_0 \cos \gamma - uT}. \quad (22)$$

Ze vztahu (22) rovnou vidíme, že pro čas $t_0 \gg T$ se $\bar{\gamma}$ blíží γ . To je samozřejmé, neboť za této podmínky je v Michalově soustavě rozdíl mezi směrnicí Karlovy dráhy a drahou signálu minimální.

V případě, že jsou rychlosti blízké rychlosti světla, musíme nahradit Galileovu transformaci transformací Lorentzovou. Pohybuje-li se soustava $\hat{\mathcal{S}}$ rychlostí u vůči soustavě \mathcal{S} ve směru osy x , Lorentzova transformace potom zní (stříškované veličiny jsou vztaženy k pohybující se soustavě $\hat{\mathcal{S}}$):

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (x - ut)\zeta, \\ \hat{y} &= y, \\ \hat{t} &= (t - \frac{ux}{c^2})\zeta, \end{aligned} \quad (23)$$

kde ζ je Lorentzův faktor,

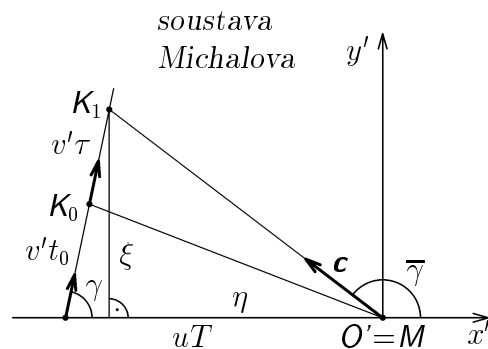
$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Uvažujeme-li však relativistické efekty, musíme také použít relativistické vzorce pro skládání rychlostí

$$\hat{v}_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad \hat{v}_y = \frac{v_y}{\zeta \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}.$$

Na rozdíl od klasického případu se nám v relativitě transformují i složky rychlosti kolmé na směr pohybu soustavy $\hat{\mathcal{S}}$. Je to dáno prostě tím, že při Lorentzově transformaci nezůstává čas stejný pro různé inerciální systémy a transformuje se stejně jako souřadnice; mluvíme pak o časoprostoru. Označme hledaný úhel v relativistickém případě $\hat{\gamma}$. Potom za předpokladu $T = 0$ platí

$$\operatorname{tg} \hat{\gamma} = \frac{\hat{v}_y}{\hat{v}_x} = \frac{v \sin \varphi}{v \cos \varphi - u \zeta} \frac{1}{\zeta} = \operatorname{tg} \gamma \frac{1}{\zeta} = \operatorname{tg} \gamma \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (24)$$



Obr. 35

To znamená, že při započtení relativistických efektů se nám $\text{tg } \hat{\gamma}$ změní právě o Lorentzův faktor ζ . To plyne z toho, že v jakékoliv fyzikální souřadné soustavě zůstává rychlost světla stále stejná.

Poznámka: Pro zajímavost uvedeme i odvození vztahů pro relativistické skládání rychlostí. Stačí nám k tomu pouze Lorentzova transformace (23) a znalost obecně platných vztahů $v_x = \frac{dx}{dt}$ a $v_y = \frac{dy}{dt}$. Aplikujme tyto vztahy v soustavě $\hat{\mathcal{S}}$ za použití (23):

$$\hat{v}_x = \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \frac{\zeta \left(\frac{dx}{dt} - u \right)}{\zeta \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}},$$

$$\hat{v}_y = \frac{d\hat{y}}{d\hat{t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\zeta \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_y}{\zeta \left(1 - \frac{uv_x}{c^2} \right)}.$$

Úloha III.1 ... skokan

Člověk padá z můstku do bazénu, přičemž v bazénu je voda a můstek je ve výšce h nad hladinou. Náš skokan má hmotnost $M = 80$ kg, hustotu $\rho = 0,9$ g.cm⁻³, je vysoký $L = 1,7$ m a na počátku skoku (volného pádu) byl v klidu. Do jaké největší hloubky H se skokan ponoří? Jaký bude jeho další pohyb? Odpor vodního prostředí: a) zanedbejte, b) nezanedbejte.

Řešení:

Na začátku výpočtů si nejprve uvědomme, v jakých časových sledech probíhá celý děj:

- skok z výšky h (volný pád) až po dopad na hladinu,
- postupné ponořování skokana,
- pohyb směrem dolů pro již zcela ponořeného skokana až do hloubky ponoření H ,
- pohyb směrem nahoru, dokud je skokan celý ponořen,
- vynořování; skokan zůstává nakonec částečně vynořen nad hladinou.

Po tomto ujasnění se nyní věnujme rozboru sil, které v bodech b) až e) na skokana působí. Jednak je to hydrostatická vztlaková síla, která působí na každý předmět v kapalině, jednak odporová síla prostředí, která působí proti pohybu skokana díky jeho nenulové rychlosti.

1) Zanedbáváme odporovou sílu kapaliny

Jelikož nám jde o určení hloubky ponoření H , nemusíme znát časové závislosti veličin charakterizující pohyb. Lze potom užít zákona zachování energie pro skokana, který se nachází v poli gravitační síly. To ovšem předpokládá znalost potenciální energie (E_p) a průběh sil, které konají práci, abychom mohli tyto práce (W_b , W_c) spočítat.

Předpokládáme-li, že skokan bude při skoku stále ve svislé poloze, nemusíme (pro jednoduchost) vztahovat potenciální energii vzhledem k těžišti, nýbrž i vzhledem k patám skokana. Nulovou hladinu potenciální energie stanovme v zatím neznámé hloubce H (tj. od hladiny k patám).

Rozebereme jednotlivé kroky:

- Skokan má potenciální energii

$$E_p = Mg(h + H).$$

- Na skokana působí hydrostatická vztlaková síla, která vykoná práci

$$W_b = \int_0^L F_{vz} dx,$$

kde

$$F_{vz} = Sx\rho_k g,$$

přičemž S je plošný průřez skokana (zjednodušíme ho na tvar kvádrů nebo válců), x hloubka, do které je ponořen, ρ_k hustota vody, g tíhové zrychlení. Integrál je součtem přes všechny elementy práce

$$F_{vz} dx$$

na dráze dx , kde je F_{vz} možno pokládat za konstantní.

Integrováním zjistíme, že $W_b = \frac{1}{2}SL^2\rho_k g$. Tento výpočet lze provést i úvahou, neboť W_b je lineárně závislá na x , takže celkový součet je obsahem trojúhelníku.

- c) Zde $F_{vz} = V\rho_k g = SL\rho_k g$ je tedy konstantní. Vykonaná práce na dráze $H - L$ je $W_c = SL\rho_k g(H - L)$. Sepíšeme zákon zachování energie:

$$E_p = W_b + W_c,$$

neboť energie, jakou má skokan, se spotřebuje na brzdění. Z toho po dosazení snadno spočteme:

$$H = \frac{h\rho + \frac{1}{2}\rho_k L}{\rho_k - \rho},$$

uvážíme-li $M = V\rho = SL\rho$.

Dosadíme-li hodnotu $h = 10$ m, zjistíme, že skokan by se ponořil do hloubky $H = 98,5$ m, což je zjevný nesmysl, neboť skokan by se utopil, a on se přitom neutopí. Odporová síla tedy bude mít podstatný vliv.

- d) Potom se skokan začne vynořovat rovnoměrně zrychleně, dokud je zcela ponořen neboť vztlaková síla je konstantní.
e) Při vynořování nad hladinu bude proces e) probíhat shodně jako b). Skokan má v poloze, kdy „stojí“ na hladině takovou rychlost, že ho vynese do výšky h , což je dáno tím, že energie se nikde neztrácí (nedisipuje), tzn. po zabrzdění je skokan zase urychlován.

2) Odporovou sílu kapaliny nezanedbáváme

- a) Spočteme nejprve rychlost v bodě, kde se dotýká skokan hladiny. Jde o rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením g , tedy

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad v_0 = gt.$$

Vyloučením času dostaneme $v_0 = \sqrt{2gh}$.

- b) Sepíšeme 2. Newtonův zákon pro zrychlení a skokana. Urychlující síla je tíhová Mg , zpomalující síla vztlaková $F_{vz} = Sx\rho_k g$, podobně jako v případě 1b) a odporová síla prostředí (kapaliny) $F_o = \frac{1}{2}CS\rho_k v^2$. Celkově tedy

$$Mg - Sx\rho_k g - \frac{1}{2}CS\rho_k v^2 = Ma.$$

Výpočet můžeme provést jednoduchým modelováním třeba i na programovatelné kalkulačce. Jeho myšlenka spočívá v posouvání času, kdy v časovém okamžiku t dopočteme podle naší rovnice a , a pomocí něho spočteme

$$\begin{aligned} v' &= v + a dt, \\ x' &= x + v dt + \frac{a dt^2}{2}, \end{aligned} \tag{25}$$

předpokládáme-li v dostatečně malém intervalu $(t, t + dt)$ rovnoměrně zrychlený pohyb.

Hodnoty x', v' jsou již v čase $t + dt$. Pomocí nich spočteme novou hodnotu a' a postup se opakuje.

V našem případě b) jsou počáteční hodnoty $x = 0$ a $v = v_0 = \sqrt{2gh}$, přičemž výpočet končí v okamžiku, kdy $x \geq 1,7$ m.

c) Dostáváme podobnou rovnici jako u b). Zde výpočet končí pro nulové (nebo přibližně nulové) hodnoty rychlosti a konečná hodnota x bude hledaná hloubka H .

Dále už jen uvedu rovnice pro bod d) a e):

$$SL(\rho_k - \rho)g - \frac{1}{2}CS\rho_k v^2 = Ma,$$

$$-Mg + Sx\rho_k g - \frac{1}{2}CS\rho_k v^2 = Ma,$$

kde druhá z rovnic vede při řešení ke kmitavému pohybu, který se utlumí.

K vlastní technice výpočtu se sluší dodat, že dt můžeme zjistit zkusmo a to tak, že dáváme stále menší a menší hodnoty, pokud se výsledky výpočtu od sebe dost liší. Já jsem použil hodnotu $dt = 0,005$ s a odporovou konstantu $C = 1$.

Při výpočtu s menší obměnou vztahu (25)

$$x' = x + \frac{v + v'}{2} dt$$

jsem se na programovatelné kalkulačce Casio dostal k výsledkům pro

$$h = 10 \text{ m}, \quad H = 6,4 \text{ m},$$

$$h = 2 \text{ m}, \quad H = 4,7 \text{ m},$$

$$h = 1,8 \text{ m}, \quad H = 4,6 \text{ m},$$

což je přece jen realističtější výsledek (byť se hodnoty zdají také poněkud velké) než v případě 1).

Úloha III.2 ... *dopravní přestupek*

Jede si tak jednou pan Doppler po městě a co nevidí. Zastavuje ho vozidlo policie a příslušník povídá: „Pane řidiči, jste si vědom toho, že jste jel na červenou?“

„Nikoliv. Když jsem projížděl kolem semaforu, tak jsem viděl zelenou. Tím jsem si naprosto jist,“ odpovídá pan Doppler.

„Tak v tom případě vám musím dát pokutu za rychlou jízdu!“

Kolik zaplatil pan Doppler a proč, jsou-li sazby 1 Kč za $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ přes povolený limit $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ve městě?

Řešení:

Pokud chceme problému přijít na kloub, musíme předpokládat, že policista viděl červenou v tentýž okamžik, kdy pan Doppler viděl zelenou. A dále vzhledem ke změně frekvence světla musíme uvažovat relativistické vztahy pro Dopplerův jev. Zavedeme si dvě souřadné soustavy. Souřadnou soustavu semaforu S1 (v ní se nachází i policista) a soustavu Dopplerova auta S2. Tyto souřadné soustavy se přibližují rychlostí v .

Co vidí pozorovatel v S1? Semafor vyše 1 vlnu červeného světla rychlostí c za čas $T_c = \frac{1}{f_c}$.

V soustavě S2, z hlediska pana Dopplera, se ale přibližuje semafor rychlostí v . Z toho, že v S1 i v S2 se světlo pohybuje rychlostí c , lze odvodit, že v S2 vyše semafor 1 vlnu za čas

$$T = \frac{T_c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(dilatace času). Jelikož se semafor přibližuje rychlostí v , je vlnová délka přijímaného světla a jeho frekvence

$$\lambda_z = (c - v)T = \frac{c}{f_c} \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}, \quad f_z = f_c \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}.$$

Vyjádříme si rychlost v :

$$v = c \frac{f_z^2 - f_c^2}{f_z^2 + f_c^2} \doteq 0,22c = 237 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1},$$

což odpovídá pokutě 237 mil. Kč.

Tento výsledek je možno považovat za správný, pokud ovšem uvedeme podmínky, za kterých platí.

- i) Především jsme jaksí mimoděk předpokládali, že semafor stojí přímo ve směru jízdy pana Dopplera. Jelikož ke srážce semaforu a pana Dopplera nedošlo, musíme předpokládat, že se pan Doppler podíval na semafor ve vzdálenosti minimálně srovnatelné s jeho výškou (či horizontální vzdáleností), neboť v případě, že pan Doppler projíždí pod semaforem a dívá se přitom na něj, nemůže už docházet k podélnému Dopplerovu jevu. Dojde zato k příčnému Dopplerovu jevu způsobenému dilatací času

$$f' = f_c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

což v našem případě znamená, že pan Doppler uvidí červenou, a to ještě o něco tmavší než je v S1.

- ii) Ve výpočtu jsme použili velikost rychlosti světla ve vakuu. Při správném zaokrouhlení nebude ani zemská atmosféra na obtíž.

Nakonec je třeba učinit poznámku k přesnosti výpočtu.

Policista udělující pokutu může znát frekvenci (vln. délku) semaforu s poměrně velkou přesností. Pokud však pan Doppler řekne, že viděl zelenou, pak lze výši pokuty pouze odhadnout nebo učinit výpočet pro pana Dopplera co nejpříznivější a použít v něm frekvenci nějaké žlutozelené barvy. V každém případě je zbytečné odečíst oněch 60 Kč, obzvláště, když uvážíme, že se incident odehrál na vzduchu, a ne ve vakuu.

Je tedy nanejvýš vhodné zaokrouhlit výsledek s ohledem na přesnost zadaných (či zvolených) veličin.

Na úplný závěr se můžeme zamyslet nad (ne)reálností příkladu.

- a) Na automobil jezdící rychlostí $0,22c$ si asi ještě pár let počkáme. Jízda v něm bude ale velmi nepohodlná. Zkuste si spočítat odstředivou sílu působící na pasažéry v tomto autě jedoucím po povrchu zemském. Prostředky, kterými by policista v historicky krátké době takto rozjeté auto zastavil a pan Doppler by přitom neutrpěl újmu na zdraví, zatím neznáme.
- b) Pan Doppler si mohl všimnout, že zelená se nachází na semaforu na místě červené.
- c) Ať už pan Doppler zelenou viděl nebo ne, bylo by pro něj určitě výhodnější zaplatit pokutu za jízdu na červenou, než riskovat částku o několik řádů vyšší.

Úloha III. 3 ... koule

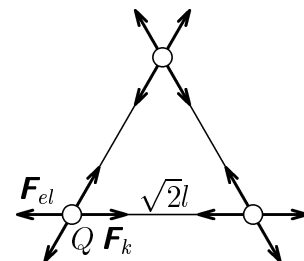
Tři koule jsou spojeny stejnými gumičkami tak, že tvoří rovnostranný trojúhelník. Soustava leží na hladkém vodorovném stole. Jaké náboje je třeba na koule přivést, aby se plocha trojúhelníka zdvojnásobila? Tuhost gumiček je k , počáteční délka je l .

Řešení:

V zadání to nebylo patřičně zdůrazněno, ale předpokládáme, že náboje, které přivedeme na koule mají stejnou velikost. Řešení pro různé náboje by bylo o něco složitější.

Aby se obsah trojúhelníka zvětšil dvakrát, musíme jeho stranu zvětšit $\sqrt{2}$ -krát. To plyne ze vztahů

$$2S = 2 \cdot \frac{1}{2} l^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{2}l)^2 \sin 60^\circ.$$

**Obr. 36**

To samozřejmě platí obecněji. Když nějakému objektu zvětšíme lineární rozměry n -krát, pak se jeho plochy, povrchy atd. zvětší n^2 -krát a jeho objem vzroste n^3 -krát.

Dále je zřejmé, že všechny náboje musí mít stejné znaménko, protože chceme-li, aby se obsah trojúhelníka zvětšil, všechny tři kuličky se musí odpuzovat. Na každou kuličku působí elektrostatické síly \mathbf{F}_{el} od dalších dvou kuliček a síly od gumiček \mathbf{F}_k (viz obr. 36). Působící síly musí být v rovnováze. Síla \mathbf{F}_{el} , kterou působí jedna kulička na druhou, má podle Coulombova zákona velikost $F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{(\sqrt{2}l)^2}$.

Síla \mathbf{F}_k , má velikost $F_k = k\Delta l = k(\sqrt{2} - 1)l$. Musí tedy platit

$$k(\sqrt{2} - 1)l = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{(\sqrt{2}l)^2}.$$

Náboj, který musíme přivést na každou kuličku tedy je

$$Q = \pm 2l \sqrt{2\pi\epsilon k l (\sqrt{2} - 1)}.$$

Úloha III.4 ... cirkus

Artista padá na silně napnutou plachtu z výšky $h = 1$ m. Jaký bude maximální průhyb plachty, je-li průhyb s artistou v klidu $\Delta y = 2$ cm? Považujte všechny výchylky za malé.

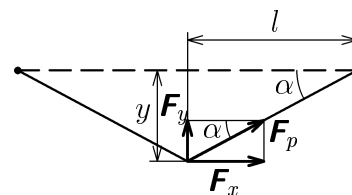
Řešení:

V zadání je napsáno, že plachta, na kterou artista padá, je silně napjatá. Co to znamená? Pnutí uvnitř plachty je natolik velké, že jeho přírůstek příslušející dalšímu malému protažení plachty je oproti původní hodnotě zanedbatelný. Dále uvažme, že zmíněná protažení jsou dostatečně malá právě v tomto smyslu.

Z předchozího odstavce plyne, že síla \mathbf{F}_p (viz obr. 37), působící ve směru plachty, má konstantní velikost. Pro další výpočet je zajímavá pouze její složka \mathbf{F}_y . Složka \mathbf{F}_x musí být nulová, jinak by se nám artista začal pohybovat ve vodorovném směru. To však není možné, protože situace je dostatečně symetrická, jak plyne ze zadání.

Pro velikost síly F_y platí (použijeme $\sin \alpha \doteq \text{tg } \alpha$ platné pro malé úhly α)

$$F_y = F_p \sin \alpha \doteq F_p \frac{y}{l} = ky.$$

**Obr. 37**

Konstantu k určíme ze silové rovnováhy v poloze, v níž je artista v klidu (prohnutí o Δy). Síla plachty musí být kompenzována gravitační silou.

$$mg = k\Delta y \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta y},$$

kde m je hmotnost artisty.

Maximální průhyb plachty vypočteme ze zákona zachování energie. Během pádu se nejprve mění potenciální energie artistry na kinetickou energii a na energii pružnosti plachty. Nejhlouběji bude artista zřejmě v místě, kde se zastaví, tedy kde jeho kinetická energie bude nulová. Jelikož pružné síle $F = ky$ odpovídá energie $W = \frac{1}{2}ky^2$, máme

$$mg(h + y_{max}) = \frac{1}{2}ky_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{\Delta y}y_{max}^2.$$

Toto je kvadratická rovnice, jejímž jediným fyzikálně smysluplným řešením je

$$y_{max} = \Delta y + \sqrt{(\Delta y)^2 + 2h\Delta y} \doteq 22,1 \text{ cm}.$$

Nakonec se zmíníme o výsledku, které vychází ze zcela jiných předpokladů, totiž že plachta bez artistry má právě klidovou „délku“ (zde se asi není možné vyhnout nějaké úvaze o struktuře plachty, aby se vyjasnil význam té „délky“). Pak je z Hookova zákona $F_p = \tilde{k}\Delta l$, kde Δl je změna délky plachty. V tomto případě, pokud zanedbáme y_{max} vůči h v potenciální energii, získáme

$$y_{max} = \sqrt[4]{4h(\Delta y)^3}.$$

Důležitá poznámka: Řešení úlohy, jak bylo popsáno výše, odpovídá spíše dopadu akrobata na provaz, protože plachta byla uvažována více méně jednorozměrně. Pokud řešíme problém pro skutečně dvourozměrnou plachtu, nelze již brát rozměry artistry nekonečně malé. I v dvourozměrném případě však vychází maximální průhyb plachty přímo úměrný působící síle za předpokladu, že se plachta pod artistou příliš neroztáhne.

Číselně tedy dostaneme stejně velký průhyb jako v jednorozměrném případě. Tvar plachty ale bude jiný. Aproximujeme-li místo, v němž se artista dotýká plachty, kruhem o poloměru a a má-li nezatížená plachta tvar kruhu o poloměru b , bude z -ová souřadnice bodů plachty v závislosti na vzdálenosti od osy z :

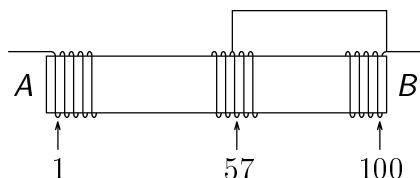
$$z = -h \frac{\ln r/b}{\ln a/b}, \quad r > a,$$

$$z = -h, \quad r \leq a,$$

kde h je maximální průhyb plachty.

Úloha III.5 ... kutil

Představte si obyčejnou cívku o 100 závitů, jejíž konce označme A , B (viz obr. 38). Nyní spojíme konec závitů číslo 57 s koncem cívky B pomocí dokonalého vodiče. Jak se bude lišit tato cívka od cívky s 57 závitů, budeme-li ji měřit mezi body A – B ?



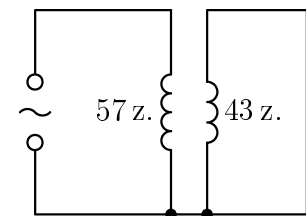
Obr. 38

Řešení:

Cívka je charakterizována v elektrickém obvodu dvěma veličinami – svým odporem R a indukčností L . Budeme předpokládat, že cívka ze zadání úlohy má rovnoměrně rozloženy všechny své závitů po celé délce a je blízka ideální cívce.

V obvodech stejnosměrného proudu se v ustáleném stavu neprojeví odlišné vlastnosti zkratované cívky od cívky s 57 závitů. Její odpor tedy bude $\frac{57}{100}R$, kde R je odpor celé nezkratované cívky.

Zapojení ze zadání úlohy lze ekvivalentně překreslit dle obr. 39. Celá cívka se tedy bude chovat jako transformátor s poměrem závitů $\frac{N_1}{N_2} = \frac{57}{43}$, který má zkratované sekundární vinutí. Provedme následující myšlenkový pokus: Zvýšíme-li nepatrně napětí na primárním vinutí (nezkratované části cívky), nastane zvětšení proudu procházejícího primárním vinutím a zvětší se magnetická indukce uvnitř primárního vinutí. Na primárním vinutím se bude indukovat napětí, směřující **proti zvýšení** napětí. Potud je popis vlastností zkratované cívky shodný s popisem vlastností cívky nezkratované. Avšak magnetická indukce se zároveň zvětšila i v sekundárním vinutím a tedy i na něm se bude indukovat napětí, opačného směru než původní vzrůst napětí, a sekundárním vinutím začne procházet proud opačného směru než v primárním vinutí (tento proud bude poměrně velký, neboť sekundární vinutí je zkratováno; bude pouze omezován odporem sekundárního vinutí). Tento proud ovšemže snižuje magnetickou indukci vznikající v primárním vinutí (lépe řečeno vytváří magnetickou indukci opačného směru). To má za přímý následek indukci napětí na primárním vinutí směřujícího **shodně s původním** zvýšením napětí. Samozřejmě nyní lze celou úvahu několikrát zopakovat. Jaký tedy z těchto kvalitativních úvah plyne závěr? Zkratovaná cívka bude mít menší indukčnost než obdobná cívka s 57 závitů. Bude jí procházet větší proud ($Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$) s menším fázovým posunem ($\Delta\varphi = \arctg \frac{L\omega}{R}$). Cívka odebírá ze zdroje větší energii (větší proud i účinník), která se použije k pokrytí ztrát vzniklých v sekundárním vinutí.



Obr. 39

Úloha IV.1 ... sever

Je to už dávno, co jsme my, organizátoři, chodili na své základní školy. Nicméně si všichni dobře pamatujeme, že jsme se učili, jak pomocí ručičkových hodinek a polohy Slunce na obloze přibližně stanovit sever. Po vás bychom chtěli, abyste nám vysvětlili, jak to funguje, proč to funguje a s jakou přesností (přibližně).

Řešení:

Cílem úlohy bylo, abychom si vyjasnili, jak funguje známá to poučka ze školy o určení severu pomocí ručičkových hodinek:

Jsmo-li na severní polokouli a namíříme-li malou ručičku na Slunce, pak osa úhlu β , určeného malou ručičkou, středem ciferníku (vrchol úhlu) a dvanáctkou, určuje severojižní směr a jih je před námi. Po otočení se o 180° se bude náš pohled upírat na sever.

Toť tedy poučka. Zbývá říci, proč platí a hlavně, jak přesně. Následující řešení čerpá z myšlenek Tomáše Braunera.

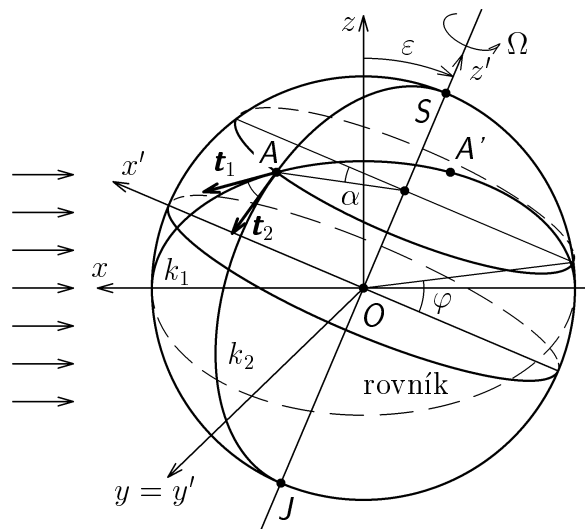
Výše zmíněné pravidlo připouští dvě interpretace: a) hodinová ručička míří ke Slunci, b) hodinová ručička míří k průmětu Slunce do tečné roviny k Zemi v místě pozorovatele, ciferník hodinek také leží v tečné rovině. Jinak řečeno, rovina určená Sluncem a hodinovou ručičkou je vertikální, tj. kolmá na horizont.

První z variant je nejednoznačná, protože umožňuje rotaci kolem osy určené ručičkou. Proto budeme vyšetřovat druhou interpretaci a zvláště pak její přesnost.

Měříme-li čas od poledne (tj. od doby, kdy Slunce vrcholí), pak za dobu t se Země otočí o úhel $\alpha = \Omega t$, kde Ω je úhlová rychlost rotace Země. Hodinky mají ciferník, na kterém 12 hodinám odpovídá otočení ručiček o 360° . Země se za tuto dobu otočí ale jen o 180° , tj. hodinová ručička rotuje dvakrát rychleji nežli Země kolem své osy.

Představme si nyní, že jsme se podívali na hodinky, zjistili úhel β a z něj úhel $\alpha = \beta/2$, o který se potočila Země (viz obr. 40). Určeme, o jaký skutečný úhel γ bychom se měli otočit od Slunce, abychom došli na jih (naši metodou nejdříve určíme jih).

Protože osa rotace Země je skloněna k rovině ekliptiky o $23,5^\circ$, budeme popisovat naši polohu pomocí tří úhlů $-\alpha$, φ a ε , jejichž význam je patrný z obr. 40. Poznamenejme jen, že úhel ε nabývá hodnot z intervalu $\langle -23,5^\circ, +23,5^\circ \rangle$, podle polohy Země na ekliptice. Dále budeme předpokládat, že se Země pohybuje po kružnici.



Obr. 40

Sluneční paprsek jdoucí rovnoběžně s osou x a procházející bodem $A[x, y, z]$ na Zemi, bude povrch Země protínat ještě v bodě $A'[-x, y, z]$. Body A, A' určují na povrchu Země hlavní kružnici k_1 (což je kružnice se středem ve středu koule, ležící na zadané sféře). Touto kružnicí je zadaná rovina, v níž leží průmět slunečního paprsku do tečné roviny (toto tvrzení, které by se mohlo zdát ne zcela zřejmým, lze ověřit přímým výpočtem). Směr k jihu určuje poledník v daném místě, který je částí jiné hlavní kružnice k_2 . Úhel γ je pak roven úhlu, který spolu svírají tečné vektory \mathbf{t}_1 a \mathbf{t}_2 obou kružnic v bodě A .

Bod A má v čárkované souřadné soustavě (jejíž osa je totožná s osou rotace Země) souřadnice

$$A[\cos \varphi \cos \alpha, \cos \varphi \sin \alpha, \sin \varphi].$$

Protože řešení úlohy nezávisí na zvoleném měřítku, zvolili jsme za poloměr Země jedničku.

Jestliže chceme vyjádřit souřadnice bodu A v nečárkované souřadné soustavě, musíme čárkovanou souřadnou soustavu otočit o úhel $-\varepsilon$ (viz obr. 40) kolem osy $y = y'$:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varepsilon + z' \sin \varepsilon = \cos \varphi \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \varphi \sin \varepsilon, \\ y &= y' = \cos \varphi \sin \alpha, \\ z &= -x' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon = -\cos \varphi \cos \alpha \sin \varepsilon + \sin \varphi \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Normálový vektor k rovině, v níž leží kružnice k_1 , je

$$\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA'} = (0, -z, y) = (0, \cos \varphi \cos \alpha \sin \varepsilon - \sin \varphi \cos \varepsilon, \cos \varphi \sin \alpha).$$

Normálový vektor \mathbf{n}_2 k rovině, v níž leží kružnice k_2 , je rovnoběžný s rovinou $x'y'$ a můžeme jej zvolit jako $\mathbf{n}_2(x', y', z') = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$.

Po aplikaci rotace o úhel ε dostáváme

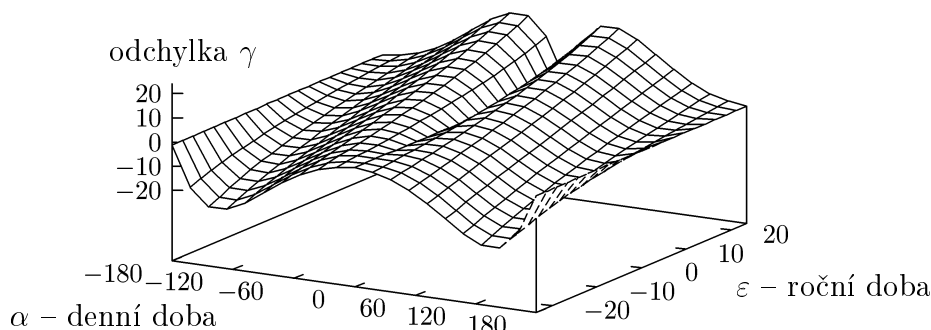
$$\mathbf{n}_2(x, y, z) = (\sin \alpha \cos \varepsilon, -\cos \alpha, -\sin \alpha \sin \varepsilon).$$

Snadno nahlédneme, že úhel, který svírají vektory $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$, je shodný s úhlem, který svírají vektory \mathbf{n}_1 a \mathbf{n}_2 . Proto

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}.$$

Další výpočet je ryze technický, a proto jej ponecháváme na vás a uvedeme jen konečný výsledek pro $\cos \gamma$:

$$\cos \gamma = \frac{\sin \varphi \cos \alpha \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon}{\sqrt{(\cos \varphi \sin \alpha)^2 + (\cos \varphi \cos \alpha \sin \varepsilon - \sin \varphi \cos \varepsilon)^2}}. \quad (26)$$



Obr. 41

Chyba δ , již se dopustíme užitím naší poučky, tedy bude $\delta = \gamma - \alpha$. Speciálně pro zeměpisnou šířku $\varphi = 50^\circ$ (na ní se zhruba nachází náš stát), z obr. 41 zjistíme, že největší chyby se dopustíte v létě přibližně v osm hodin ráno nebo ve čtyři hodiny odpoledne a její velikost bude přibližně $24,6^\circ$.

V zimě to bude ve čtyři ráno a v osm večer, což se ale, protože v daných dobách Slunce pro samou tmou nevidíme, ve skutečnosti nestane. Největší chyby se tak dopustíte při východu a západu Slunce.

S výše uvedenou rovnicí (26) pro úhel γ si můžete ještě vyhrát a najít místa na Zemi a časy, ve kterých je chyba největší.

Ještě je nutno uvážit ostatní relevantní chyby.

Samozřejmě by nám měly jít správně hodinky (± 5 minut). Potom je tu chyba vznikající z faktu, že Země je rozdělena do časových pásem, maximální chyba tak vznikající v určení času je půl hodiny (pokud je čas v pásmu určen poledníkem, půlícím pásmo), čemuž odpovídá na ciferníku 15° , ale chyba bude poloviční, tj. $7,5^\circ$.

Dále se díky eliptické dráze objeví chyba, která má maximální velikost přibližně 15 minut v určení poledne podle Slunce (Slunce totiž nebude ve 12 hodin ležet přesně jižním směrem), tj. $3,75^\circ$ v určení severu. Tato chyba je největší na začátku listopadu či v polovině února.

Je možné (spíše jisté), že jednotlivé chyby jsou na sobě závislé, a proto je není možno jen naivně sečíst. Nicméně z obrázků vidíme, že velikost maximální chyby bude v naší zeměpisné šířce $24,6^\circ + 7,5^\circ \doteq 32^\circ$ právě v létě a speciálně pro Prahu, přes níž prochází patnáctý poledník, kolem $24,6^\circ$, protože se neobjeví „pásmová“ chyba. (Zde neuvažujeme „eliptickou“ chybu, která během roku kolísá.

Poznámka: Rád bych upozornil také na to, že výše uvedená metoda nebude pracovat na jižní polokouli tak, že bude určovat sever. Jak si totiž snadno uvědomíte, hodinky by vám musely jít pozpátku aneb metodu můžete použít s tím, že zrcadlíte malou ručičku vůči ose 6–12.

Úloha IV.2 ... Pepek námořník

Spočtete práci, kterou musí vykonat námořník na to, aby svinul plachtu o hmotnosti M , která má šířku a a výšku b . Plachta visí celá svisle dolů z ráhna a námořník ji navíjí na ráhno konstantní rychlostí.

Řešení:

Ukážeme si dvě řešení této úlohy:

1) Výslednou práci spočítáme ze změny potenciální energie plachty v tíhovém poli. Pro účely tohoto výpočtu si plachtu nahradíme hmotným bodem o hmotnosti M (hmotnost plachty) umístěným v těžišti plachty. Že je možné takovouto aproximaci provést, o tom nás nejlépe přesvědčí jedna z definic těžiště: Těžiště je působiště výsledné tíhové síly. Těžiště nesmotané plachty leží ve vzdálenosti $b/2$ od ráhna, těžiště smotané plachty leží přímo na ose ráhna. Smotaná plachta zvětšila svoji potenciální energii o

$$E_p = Mg \frac{b}{2}.$$

Stejnou práci musel vykonat Pepek, proto

$$W = Mg \frac{b}{2}.$$

2) Užitím integrálního počtu. Práci spočítáme podle definice jako dráhový integrál síly.

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (27)$$

Síla, kterou musí Pepek působit, je rovna tíhové síle dosud nenamotané části plachty (větší síla by způsobila zrychlený pohyb plachty). Vzdálenost nenamotané části plachty od ráhna označíme x (viz obr. 42) a bude se měnit od $-b$ do 0. Snadno odvodíme, že tíhová síla působící na nenamotanou část plachty je

$$\mathbf{F} = M \frac{x}{b} \mathbf{g}.$$

Dosazením do vztahu (27) dostaneme

$$W = - \int_{-b}^0 Mg \frac{x}{b} dx = Mg \frac{b}{2},$$

což je hledaná práce. Při dosazování do skalárního součinu jsme zohlednili to, že Pepek působí silou opačnou než je síla tíhová (znamenko mínus před integrálem).

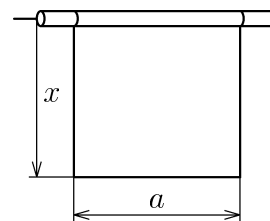
K tomuto výsledku bychom při přesnějším výpočtu museli ještě přidat další práce, které musel Pepek vykonat.

i) Kinetická energie soustavy na konci děje

Pokud bude námořník navíjet konstantní rychlostí až do úplného konce, bude se pak s touto obvodovou rychlostí otáčet ráhno i s plachtou. Kinetická energie takovéto otáčející se soustavy je

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \frac{v^2}{R^2}$$

kde J je moment setrvačnosti soustavy ráhno + namotaná plachta, v rychlost vytažení plachty, R poloměr soustavy ráhno + namotaná plachta. Dosazením nějakých rozumných hodnot ($v = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $b = 10 \text{ m}$...) zjistíme, že v případě, kdy je hmotnost ráhna s hmotností plachty srovnatelná, je tato kinetická energie minimálně o řád menší než W . V opačném případě bychom tuto energii neměli opomíjet. Pepek může zabránit konání této nadbytečné práce tím, že přestane těsně před koncem točit a plachta sama „dojede“.



Obr. 42

ii) Ztráty způsobené třením a jinými odporovými silami

Budou pravděpodobně srovnatelné s W a budou záviset na mnoha faktorech (kvalita navíjecího systému, povětrnostní podmínky ...). Práce jim odpovídající se přemění na teplo.

Poznámka na závěr: Snad na žádné lodi se plachty na ráhno nenamotávají, všude se k němu pouze přivazují.

Úloha IV.3 ... měření tlaku vzduchu v zimě

Fyzikální expedice potřebuje změřit tlak vzduchu ve svém táboře, aby si mohla být jistá, že jí nehrozí vysokohorská nemoc (už i tak jim hrozí umrznutí, protože je přesně -30°C). Shodou okolností mají s sebou rtuťový barometr s hliníkovou stupnicí a naměřili tlak vzduchu 750 torr. Jaký byl ve skutečnosti tlak vzduchu, jestliže jsou barometr i měřidlo cejchovány pro teplotu 0°C ?

Řešení:

Nejprve si ujasněme princip rtuťového barometru. Je to trubice tvaru U, na jednom konci uzavřená. Uvnitř je rtuť, mezi rtuť a uzavřeným koncem U-trubice je vakuum. Z rovnosti sil dostáváme vztah

$$p_a S = h \rho g S,$$

kde ρ je hustota rtuti, S průřez trubice, h rozdíl výšek hladin v obou trubicích. Je vidět, že rozdíl výšek hladin (a tedy i naměřený tlak) závisí pouze na hustotě. Z toho též plyne, že tepelná deformace skleněné trubice nemá na měření vliv. K trubici je připevněno měřítko, na kterém odečítáme jen rozdíl výšek hladin.

Podle definice odpovídá tlak 1 torr výšce 1 mm rtuťového sloupce v manometru při normálních podmínkách. Zajímá nás h_0 , které by udávalo výšku sloupce rtuti při daném tlaku, pokud by teplota barometru byla 0°C .

Protože měřítko se zimou smrsklo, ukazuje více, než je ve skutečnosti výška hladiny. Tedy

$$h_{\text{skut}} = h_{\text{nam}}(1 + \alpha \Delta T) < h_{\text{nam}},$$

kde h_{nam} je výška rtuťového sloupce odečtená polárníky z barometru a $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$ je teplotní délková roztažnost hliníku, $\Delta T = -30 \text{K}$. Navíc je třeba započítat teplotní změnu hustoty rtuti.

$$\rho_{-30} = \rho_0 / (1 + \beta \Delta T) > \rho_0,$$

kde $\beta = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$ je teplotní objemová roztažnost rtuti. Pro atmosférický tlak platí vztah $p_a = h_0 \rho_0 g = h_{\text{skut}} \rho_{-30} g$, z něž chceme získat h_0 . První vyjádření tlaku je při teplotě 0°C a druhé je při -30°C . Výška rtuťového sloupce h_0 udávající správný tlak tedy je

$$h_0 = h_{\text{skut}} \frac{\rho_{-30}}{\rho_0} = h_{\text{nam}} \frac{1 + \alpha \Delta T}{1 + \beta \Delta T},$$

po dosazení $h \doteq 753,5 \text{mm}$, čili atmosférický tlak je ve skutečnosti přibližně 754 torrů. Vysokohorská nemoc tedy rozhodně nehrozí, tento tlak se vyskytuje běžně i v normálních podmínkách.

Protože $\alpha \Delta T, \beta \Delta T \ll 1$, můžeme zanedbat jejich vyšší mocniny a psát

$$h_0 \doteq h_{\text{nam}}(1 + \alpha \Delta T)(1 - \beta \Delta T) \doteq h_{\text{nam}}(1 + \alpha \Delta T - \beta \Delta T).$$

Poznámka: Je dobré si uvědomit, že výška hladiny se počítá ze vzorce $h = p/\rho g$ a ne přímo z toho, že se nějak zvětší objem rtuti (obecně by totiž nemusela vycházet lineární závislost jako zde).

Úloha IV.4 ... napjatá situace

Mějme dvě pružiny o tuhosti k_1 a k_2 . Jaký bude poměr period kmitů, jestliže na ně pověsíme závaží, pokud jsou v prvním případě pružiny spojeny „sériově“ a ve druhém „paralelně“ (viz obr. 43)? V „paralelním“ případě je závaží umístěno tak, že hrazdička je stále vodorovná.

Řešení:

Nejprve připomeňme definiční vztah pro tuhost pružiny

$$k = \frac{F}{\Delta y}$$

a nyní odvodíme vztahy pro tuhost systému pro paralelní a sériové spojení pružin.

1) Paralelní spojení

Prodloužení obou pružin Δy , bude stejné pro obě pružiny, neboť dle předpokladů úlohy je hrazdička spojující pružiny stále vodorovná, tedy

$$\Delta y = \Delta y_1 = \Delta y_2 .$$

Celková síla, kterou působí obě pružiny na hrazdičku, je

$$F = k_1 \Delta y_1 + k_2 \Delta y_2 = (k_1 + k_2) \Delta y$$

a pro „tuhost pružin spojených paralelně“ tak dostaneme

$$k = \frac{F}{\Delta y} = \frac{(k_1 + k_2) \Delta y}{\Delta y} = k_1 + k_2 .$$

Připomeňme, že v zadání úlohy nebylo řečeno nic o umístění zátěže na hrazdičce a bez znalosti její polohy na hrazdičce nelze činit žádné úvahy o rozkládání tíhové síly na zátěž působící na jednotlivé pružiny.

2) Sériové spojení

Síla, která způsobuje prodloužení dolní pružiny, se v ideálním případě, přenáší na horní pružinu, proto platí

$$F = F_1 = F_2 .$$

Celkové prodloužení soustavy pružin je tedy

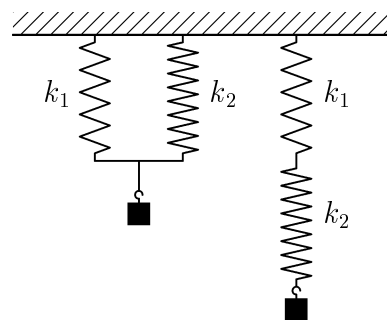
$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

a pro „tuhost pružin spojených sériově“ pak máme

$$k = \frac{F}{\Delta y} = \frac{F}{F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} .$$

Uvažujeme-li, že se obě pružinky budou chovat jako jedna, bez vzniku složených kmitů a podobných nepěkných věcí, stačí použít známý vztah pro dobu periody kmitů oscilátoru tvořeného pružinou tuhosti k , na které je zavěšeno závaží o hmotnosti m

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} .$$



Obr. 43

Tedy poměr period kmitů sériově a paralelně spojených pružin bude

$$\frac{T_c}{T_p} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}}}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1 k_2}} \geq 2.$$

Poslední nerovnost platí díky AG nerovnosti (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem).

Úloha IV.5 ... fotbalistický problém

Fotbalista vykopne míč a udělí mu kromě posuvné rychlosti i rotaci okolo svislé osy. Na kterou stranu od původního směru se míč začne odchylovat v závislosti na smyslu rotace a proč? Míč považujte za ideální kouli, odpor vzduchu nezanedbávejte.

Řešení:

Každý, kdo někdy hrál fotbal, ví, že vykopnutý míč se odchyloje ve směru rotace. Ale jak to zdůvodnit?

Použijme Bernoulliho rovnici

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst.}$$

Jeden ze zdánlivě paradoxních důsledků této rovnice je ten, že v místě, kde kapalina proudí vyšší rychlostí (takové místo poznáme podle vyššího počtu proudnic – podobně jako intenzitu elektrického nebo magnetického pole poznáme podle hustoty siločar), musí být nižší tlak.

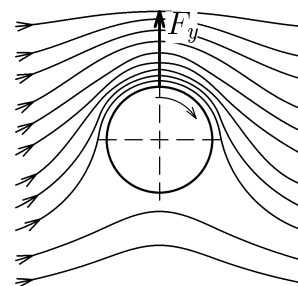
Pokud za rychlost v mechanicky dosadíme vzájemnou rychlost povrchu míče a vzduchu, kde se sčítá rychlost pohybu a rotace, dojdeme k závěru, že míč bude zatáčet v opačném smyslu, než je jeho rotace.

Chybnost této úvahy tkví v tom, že jsme předpokládali, že vzduch má na všech protilehlých bodech u povrchu míče stejnou rychlost vůči těžišti míče a opomněli jsme fakt, že míč sám nezanedbatelnou měrou ovlivní proudící vzduch kolem.

Ve viskózní tekutině (souhrnný název pro kapaliny a plyny) strhuje otáčející se koule nejbližší vrstvy tekutiny a rychlost proudící tekutiny je vyšší nahoře (viz obr. 44). Díky odlišným rychlostem proudění na různých stranách koule, musí být na různých stranách koule různý tlak (abychom splnili Bernoulliovu rovnici). Nižší tlak bude na straně s vyšší rychlostí proudění a opačně na protilehlé straně bude tlak nižší. Jestliže pak sečteme jednotlivé tlakové síly, celková výslednice bude směřovat do oblasti vyšších rychlostí.

Můžeme tedy zopakovat, že koule se bude odklánět od přímého směru ve stejném smyslu jako rotuje.

Tento bezpochyby zajímavý fyzikální efekt nazýváme *Magnusův jev* a byl využit i ke konstrukci novodobých plachetnic – rotorové lodi s Flettnerovým rotorem. Tyto plachetnice mají místo stožáru a plachet vysoké válce, kterými otáčí motor.



Obr. 44

Úloha V.1 ... rozmazaný šroub

Po nakloněné rovině se sklonem β se z klidové pozice valí válec, na kterém je předkreslen závit. Válec se stále zrychluje a postupně se nám jednotlivé závitky „rozmažou“, až není poznat, že tam jednotlivé závitky byly. Měříme čas od puštění válce do chvíle, kdy nerozeznáme jednotlivé závitky. Jak tento čas závisí na úhlu β ? Předpokládejte, že oko má snímkovací frekvenci f , válec má průměr R , stoupání závitů je s .

Řešení:

Oko si představíme jako kameru, která po dobu $1/f$ exponuje, a vše, co se stane, zachytí do jednoho obrázku. Aby se šroub jevil zcela rozmazaný, musí jeho závity za dobu $1/f$ projít všemi polohami, což nastane, pokud se otočí alespoň jednou dokola (nakreslete si obrázek). To znamená, že potřebujeme spočítat, v jakém okamžiku dosáhne válec frekvence otáčení f .

Podle známých vzorců platí $f = \omega/2\pi = v/\pi R$, a tedy $v = \pi R f$. Dále pro pohyb válce po nakloněné rovině musí platit zákon zachování energie $E_p = E_k + E_r$, čili

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2,$$

neboť pro válec je $J = \frac{1}{2}m(R/2)^2$ a $\omega = 2v/R$. Z toho plyne

$$h = \frac{3v^2}{4g}.$$

Protože jde o pohyb rovnoměrně zrychlený s nulovou počáteční rychlostí, platí snadno odvoditelný vztah $d = \frac{1}{2}vt$, kde d je uražená dráha, což v našem případě (nakloněná rovina) znamená $d = h/\sin\beta$, kde h je výškový rozdíl. Dostáváme tak třetí důležitý vztah

$$t = \frac{2h}{v \sin\beta}.$$

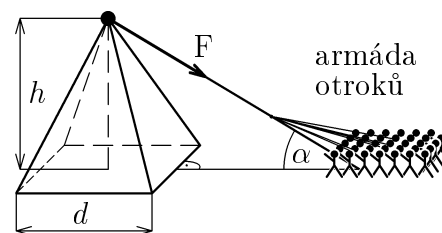
Z výše uvedených vztahů pro t , h a v , obdržíme řešení

$$t = \frac{3\pi R f}{2g \sin\beta}.$$

Můžeme tedy konstatovat, že čas, po kterém se šroub rozmaže, závisí nepřímo úměrně na sinu sklonu nakloněné roviny.

Úloha V.2 ... vykradená pyramida

Jistý duševně chorý faraón si před mnoha tisíci lety nechal vytesat mnoha tisíci otroků z jednoho kusu mohutné skály pyramidu. Starověcí zloději o dvě dynastie později chtěli pyramidu vyloupit, leč nenašli vchod, a tak se rozhodli, že se pokusí pyramidu převrhnout. Do její špičky zaklesli pevný kruh, jímž provlékli ještě pevnější lano. Za lano pak zapřáhli organizovanou skupinu otroků táhnoucích směrem od pyramidy kolmo ke dvěma hranám podstavy (obr. 45). Podaří se otrokům pyramidu převrhnout, když jich bude dostatečně mnoho, nebo ji po písku jen kus popotáhnou?

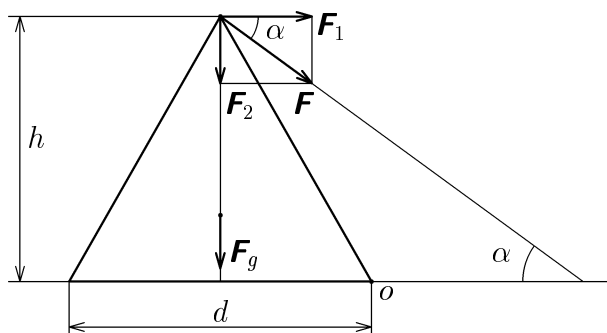
**Obr. 45**

Podaří se otrokům pyramidu převrhnout, když jich bude dostatečně mnoho, nebo ji po písku jen kus popotáhnou?

Okolní písek je dokonale udusán minulými generacemi vykradačů hrodek, kteří už celá staletí obhlíželi, kudy pyramidu vykrást, takže se pyramida do písku nebude bořit. Hmotnost pyramidy je M , koeficient statického smykového tření je μ . Pyramidu považujte za jehlan (pohřební dutina je velmi malá, protože vládce je celý seschlý).

Řešení:

Úlohu je třeba rozdělit na určení dvou podmínek – jak velkou sílu budeme potřebovat pro překlopení pyramidy a při jak velké síle se pyramida ještě nezačne posouvat. Spojením obou podmínek obdržíme řešení.



Obr. 46

Působení síly \mathbf{F} na pyramidu můžeme nahradit působením sil \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , jejichž velikosti jsou $F_1 = F \cos \alpha$ a $F_2 = F \sin \alpha$ (viz obr. 46). Pro úplnost dodejme, že gravitační síla \mathbf{F}_g má působiště v těžišti pyramidy, tj. v $\frac{1}{4}$ výšky!

Tření vykompenzuje působení síly F_1 do maximální velikosti $F_t = \mu(F_g + F_2)$. Položme první podmínku jako $F_1 < F_t$. A tedy po úpravě snadno dostáváme

$$F < \frac{\mu F_g}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}. \quad (28)$$

Toto je podmínka pro velikost síly plynoucí ze tření s podložkou taková, aby se pyramida neposunula. Teď určíme, jak velkou sílu budeme doopravdy potřebovat.

Vyjďeme z momentů působících sil vzhledem k ose otáčení (hrana pyramidy)

$$\begin{aligned} M_1 &= F_1 h, \\ M_2 &= F_g \frac{d}{2} + F_2 \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Z obrázku je jasné, že chceme, aby $M_1 > M_2$, a proto

$$F_1 h > F_g \frac{d}{2} + F_2 \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad F > \frac{\frac{1}{2} F_g d}{h \cos \alpha - \frac{1}{2} d \sin \alpha}. \quad (29)$$

A nyní snadno obě podmínky (28) a (29) spojíme do jedné. Po jednoduchém vykrácení a upravení dostáváme výsledek

$$\mu > \frac{d}{2h}.$$

Na závěr ještě provedme diskusi. Je třeba si uvědomit, jaké postupy a úpravy jsme použili, zda byly ekvivalentní a či jsme nepřehlédli jiné možnosti řešení.

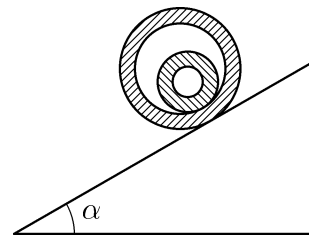
To, co jsme u vztahu (28) označili jako „úpravy“, je předpoklad, že $\cos \alpha - \mu \sin \alpha > 0$. Diskutujme, co se stane, když je zde znaménko opačné. Tím se změní znaménko nerovnosti ve vztahu (28) a každý snadno nahlédne, že je tato podmínka splněna pro každou sílu F (resp. její velikost). Když je $\mu \geq \cotg \alpha$, pyramida se neposune ani při „sebevětší“ síle F .

Podobně ve vztahu (29) jsme předpokládali, že je $h \cos \alpha - \frac{1}{2} d \sin \alpha > 0$. To je pro naši úlohu splněno vždy. Upravíme-li tento vztah na tvar $2h/d > \tg \alpha$, vidíme, že levá strana je tangens úhlu mezi stěnou a podstavou pyramidy, a jelikož otroci stojí venku, je tento vždy větší než $\tg \alpha$.

Úloha V.3 ... velké válení

Mějme dva duté válce vnějších poloměrů R_1, R_2 a vnitřních poloměrů r_1, r_2 ($r_2 < R_2 < r_1 < R_1$). Válce jsou vloženy do sebe (obr. 47) a navzájem se po sobě valí, ale nekloužou. Vnější válec se začne valit po nakloněné rovině s úhlem α . Jakého zrychlení celá soustava dosáhne?

Nad rámec zadání se můžete pokusit popsat pohyb jednotlivých válců. Hmotnosti válců jsou M_1, M_2 a materiál válce můžeme považovat za homogenní. Změní se řešení výrazně pro tři válce?



Obr. 47

Řešení:

Označme h převýšení nakloněné roviny a α velikost úhlu, který svírá nakloněná rovina s vodorovnou rovinou. Označme ω_1 úhlovou rychlost rotace vnějšího válce a ω_2 úhlovou rychlost rotace vnitřního válce; vzhledem k tomu, že se válce po sobě pohybují bez prokluzování, bude platit

$$v = R_1\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{v}{R_1},$$

$$r_1\omega_1 = R_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{r_1}{R_2}\omega_1 = \frac{r_1v}{R_1R_2}.$$

Kinetická energie soustavy se skládá z translační a rotační složky:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2.$$

Vypočteme moment setrvačnosti např. J_1 vnějšího dutého válce $J_1 = J_{1,0} - J_{1,i}$, kde $J_{1,0}$ je moment setrvačnosti celého válce (tj. bez dutiny) a $J_{1,i}$ je moment setrvačnosti válce, který by vyplnil dutinu, tedy

$$J_{1,0} = \frac{1}{2}\left(M_1 \frac{R_1^2}{R_1^2 - r_1^2}\right)R_1^2,$$

$$J_{1,i} = \frac{1}{2}\left(M_1 \frac{r_1^2}{R_1^2 - r_1^2}\right)r_1^2,$$

$$J_1 = J_{1,0} - J_{1,i} = \frac{1}{2}M_1(R_1^2 + r_1^2).$$

Výrazy v závorkách představují hmotnosti plných válců, které jsou samozřejmě jiné než M_1 . Celková kinetická energie soustavy tedy bude

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v^2 + \frac{1}{4}M_1(R_1^2 + r_1^2)\omega_1^2 + \frac{1}{4}M_2(R_2^2 + r_2^2)\omega_2^2,$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v^2 + \frac{1}{4}M_1 \frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2}v^2 + \frac{1}{4}M_2 \frac{(R_2^2 + r_2^2)r_1^2}{R_1^2R_2^2}v^2.$$

Pohybuje-li se soustava bez tření, bude na úpatí nakloněné roviny podle zákona zachování energie platit $E_{kin} = E_{pot} = (M_1 + M_2)gh$. Je-li konečná rychlost soustavy v (předpokládáme, že se soustava pohybuje rovnoměrně zrychleně bez případných kmitů malého válce uvnitř velkého), bude pro její zrychlení platit

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}.$$

Porovnáním vztahu pro energie vyjádříme

$$v^2 = \frac{(M_1 + M_2)gh}{\frac{1}{2}(M_1 + M_2) + \frac{1}{4}M_1 \frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2} + \frac{1}{4}M_2 \frac{(R_2^2 + r_2^2)r_1^2}{R_1^2 R_2^2}}.$$

Nyní již zbývá jen dosadit do vztahu pro zrychlení, $s = \frac{h}{\sin \alpha}$, tedy výsledný vztah bude

$$a = \frac{\frac{1}{2}(M_1 + M_2)g \sin \alpha}{\frac{1}{2}(M_1 + M_2) + \frac{1}{4}M_1 \frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2} + \frac{1}{4}M_2 \frac{(R_2^2 + r_2^2)r_1^2}{R_1^2 R_2^2}}.$$

Bude-li válců více, změní se výsledný vztah tak, že v čitateli bude součet hmotností všech válců a ve jmenovateli bude několik dalších členů za „čtvrtinami“ vhodně pronásobenými poloměry válců. Tedy například pro tři válce

$$a = \frac{\frac{1}{2}(M_1 + M_2 + M_3)g \sin \alpha}{\frac{1}{2}(M_1 + M_2) + \frac{1}{4}M_1 \frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2} + \frac{1}{4}M_2 \frac{(R_2^2 + r_2^2)r_1^2}{R_1^2 R_2^2} + \frac{1}{4}M_3 \frac{(R_3^2 + r_3^2)r_1^2 r_2^2}{R_1^2 R_2^2 R_3^2}}.$$

Úloha V.4 ... vodotrysk v lodi, aneb Rychlé šípy nikdo nedoběhne

Rychlé šípy si postavily šlapohyb neboli obojživelný vůz, s nímž podnikly závod přes řeku s Bratrstvem kočičí pracky. Bratrstvo prohrálo a málem se utopilo. „Vy budete mokřý taky, koukněte se na ty mraky!“ procedil Dlouhé Bidlo po nedobrovolné koupeli, načež následující den vyvrtal do dna šlapohybu Rychlých šípů nebozecem díru průřezu S . Jak vysokým vodotryskem se na příštích závodech mohly kochat davy příznivců sportu, když Rychlé šípy včetně Rychlonožky usedly do lodi?

Řešení:

Tuto úlohu mnozí z vás řešili pomocí Bernoulliho rovnice. Je to jistě jeden z možných způsobů, ale někteří se v řešení ztratili, a nic nespočítali.

Stačila jednoduchá úvaha: Voda u dna lodi má přesně takovou tlakovou potenciální energii, která stačí na to, aby vyvrtanou dírou vystoupila opět do výšky okolní hladiny.

Tuto úvahu můžeme zpřesnit tak, aby platila pro případ, kdy se loďka potápí: Představme si, že na díru vytvořenou Dlouhým Bidlem vodotěsně připevníme ve svislém směru trubici. Pak se nepochybně hladina v trubici ustálí ve výšce odpovídající velikosti případného vodotrysku. Pokud se takto upravená loď bude pohybovat ke dnu, nic to nezmění na tom, že hladina v trubici bude ve stejné výšce jako hladina okolní. Z toho plyne, že nejvyšší možný vodotrysk sahá do výšky okolní hladiny.

Několik poznámek k tomu, kdy to vůbec takto funguje: Vlivem různých třecích a odporových sil bude vodotrysk pravděpodobně nižší. Uvažovali jsme pouze případ, kdy na loďku nepůsobí další síly a zrychlení. Pokud by Rychlonožka do loďky skočil, mohla by voda vyšplouchnout i výše. Nejednalo by se však o trvalý jev. Zanedbali jsme také kapilární efekty.

Závěr: Příznivci Rychlých šípů se asi moc nepobaví.

Úloha V.5 ... šlechtic

Veliký šéf semináře radostně přeskakuje fluktuace hmoty ve svém pokoji. Právě dopadl plnou vahou z výše $H = 1$ m nad zemí volným pádem na hrábě. Násada je dlouhá $l = 2,0$ m a váží $m_2 = 1$ kg, část ocelového hrabla kolmá k násadě je dlouhá $z = 7$ cm a váží $m_1 = 2,5$ kg (považujte jej za homogenní).

Jakou rychlost má konec násady hrabí v okamžiku, kdy se opovážlivě dotkne nosu našeho nejvyššího? Srážku považujte za nepružnou. Šéfu nos se nachází 180 cm nad podlahou, šéfova hmotnost činí 92 kg včetně klíčů v pravé kapse.

Řešení:

Na začátku, těsně před osudným pádem, se náš veliký šéf nachází ve výši $H = 1$ m nad podlahou. Následně padá, padá a padá, dokud se jeho podrážky nedotknou nejvyšší části nastraženého hrabla. K této srážce dojde poté, co uletí volným pádem vzdálenost $H - z$, kde z je výška kovového hrabla. Páně šéfova rychlost v tomto okamžiku tedy bude ze zákona zachování energie,

$$v = \sqrt{2g(H - z)}.$$

Předpokládejme, že náš šéf má dokonale pevnou obuv značky ****. (Navíc má šéf hroší kůži.) Srážka obuv–hrábě bude nepružná. Pokud bychom totiž předpokládali srážku pružnou, šéf by se od hrabla odrazil.

Tedy šéf dopadne na hrábě a zastaví se v rovnovážné poloze. Všechna jeho kinetická energie se absorbuje v jeho podrážkách. Tato rovnovážná poloha však není jen tak ledajaká, ona je labilní a tak působením malinké fluktuace se šéf z ní vychýlí a uvede hrábě v pohyb otáčivý.

Pro další pohyb soustavy šéf–hrábě platí zákon zachování energie (při zanedbání takových přízemních jevů, jako je kupříkladu odpor prostředí). Předpokládejme zde, že hrábě po podlaze neprokluzují. Celková energie soustavy E_1 těsně po dopadu šéfa na hrablo jest rovna celkové energii E_2 soustavy v okamžiku, kdy je násada svislá. Zjevně E_1 je rovna jen potenciální energii, jelikož šéf je v klidu:

$$E_1 = Mgz + m_1g\frac{z}{2},$$

Nechť $v'' = z\omega''$, ω'' je úhlová rychlost hrabí, J je moment setrvačnosti hrabí $J = \frac{1}{3}m_1z^2 + \frac{1}{3}m_2l^2$, přičemž $m_1z^2 \ll m_2l^2$, tedy můžeme přibližně psát $J \approx \frac{1}{3}m_2l^2$. Pak

$$E_2 = \frac{1}{2}Mv''^2 + \frac{1}{2}J\omega''^2 + m_2g\frac{l}{2},$$

Tedy

$$Mgz + m_1g\frac{z}{2} = \frac{1}{2}M\omega''^2z^2 + \frac{1}{2}J\omega''^2 + m_2g\frac{l}{2}.$$

Dostáváme úhlovou rychlost hrabí v okamžiku, kdy je násada kolmá na vodorovnou rovinu

$$\omega'' = \sqrt{\frac{2Mgz + m_1gz - m_2gl}{Mz^2 + J}}.$$

V zadání jsme hovořili o úderu konce násady do nosu – oním koncem násady jsme minili část násady, která odpovídá výšinám Jeho vzácného frňáku. Udeří-li násada v tuto chvíli do nosu našeho nejvyššího, pak tak učiní rychlostí $w = \{\omega''\}.1,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Úloha VI. 1 ... kapalina mezi rovnoběžnými deskami

Odvoďte vztah pro výšku h hladiny kapaliny mezi dvěma svislými nekonečně dlouhými rovinami, vzdálenými od sebe d , které jsou ponořeny do kapaliny. Povrchové napětí kapaliny je σ a hustota je ρ .

Řešení:

Úlohu lze řešit celou řadou postupů. Nejjednodušší je úlohu si zbytečně nekomplikovat a stykový úhel mezi povrchem kapaliny a deskami položit roven $\pm 90^\circ$, tedy předpokládat, že

kapalina dokonale smáčí či nesmáčí desky. Vzhledem k tomu, že desky jsou nekonečné (v reálném případě je jejich délka mnohem větší než jejich vzdálenost), bude situace symetrická vzhledem ke každé rovině kolmé na obě desky i povrch kapaliny. Z této symetrie vyplyne, že povrch kapaliny bude „válcový“.

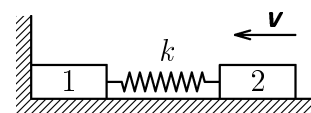
Nyní uvažujme úsek desek délky L . Ze symetrie nepůsobí na kapalinu žádná síla rovnoběžná s deskami. Na každé desce působí na její okraj povrch kapaliny silou $F_1 = \sigma L$, celková síla na kapalinu je $F = 2\sigma L$. Vzhledem k předpokladu o dokonalém (ne)smáčení je tato síla rovnoběžná s tíhovou silou působící na kapalinu mezi deskami. Směr této síly určuje, zda kapalina materiál desek smáčí nebo nesmáčí. Je-li zakřivení povrchu malé, je objem kapaliny v uvažovaném úseku $V = hLd$. V případě, že kapalina desky smáčí, je tíhová síla na ni působící $F_g = mg = \rho Vg = \rho hLdg$. Jelikož je kapalina v rovnovážném stavu, platí $F = F_g$, a tedy

$$h = \frac{2\sigma}{\rho dg}. \quad (30)$$

V opačném případě, tj. kapalina desky nesmáčí, dostaneme obdobný vztah až na to, že kapilární sílu vyrovnává tlaková síla kapaliny.

Úloha VI.2 ... pružina, kvádr a tření

Na obr. 48 máme dva stejné kvádry o hmotnosti m spojené pružinou o tuhosti k . Koeficient tření (statického i dynamického) je f . Jakou minimální rychlostí v musíme poslat kvádr č. 2 směrem ke stěně, aby se v průběhu nastalého děje pohnul i kvádr č. 1?



Obr. 48

Řešení:

V zadání úlohy nebylo řečeno, v jakém stavu se na počátku soustava nachází, zda je pružina napjatá, stlačená, anebo v rovnovážné poloze. Rozebereme proto všechny možnosti.

Nejprve zavedeme souřadnou soustavu. Protože k vyřešení úlohy stačí vyšetřovat pohyb pouze kvádrů č. 2, volíme souřadnice co nejvhodněji vůči danému tělesu. Osa x je v nárysu totožná s podložkou a její počátek je v místě, kde by se nacházelo těžiště kvádrů č. 2, pokud by pružina byla v rovnováze.

Rozebereme si nyní silové působení na jednotlivé kvádry. Na oba působí stejná tíhová síla, a proto i stejná reakce podložky. Tyto síly jsou příčinou tření mezi kvádry a podložkou. Třecí síla má velikost $F_t = mgf$, kde f je koeficient tření, a působí vždy proti směru pohybu (dynamické tření), případně proti směru síly, která se snaží s tělesem pohnout (statické tření). Dále na oba kvádry působí síla pružiny, stejná co do velikosti, ale opačná co do směru. U této síly pro zjednodušení předpokládáme, že má během celého děje velikost úměrnou změně její délky: $F_p = k\Delta l$, kde k je tuhost pružiny. No a konečně na kvádr č. 1 působí síla od stěny, která vyrovnává všechny síly snažící se pohnout tímto kvádrem „skrz stěnu“. Ostatní síly (např. odporovou sílu vzduchu) zanedbáme.

Má-li se pohnout kvádr č. 1, což je zadáním úlohy, musí na něho působit síla pružiny směrem od stěny větší, než je třecí síla. K tomu je potřeba zjistit, zda se kvádr č. 2, při dané počáteční rychlosti, může dostat do místa, kde bude pružina dostatečně napnutá. Pro souřadnici tělesa č. 2, při vyrovnání síly tření a síly pružiny na těleso č. 1, musí platit

$$F_p = kx = F_t = mgf \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mgf}{k}. \quad (31)$$

Kvádr č. 2 musí dosáhnout této souřadnice s nenulovou rychlostí, aby se pohnul kvádr č. 1.

Úlohu lze řešit dvěma způsoby. Buď napíšeme pohybové rovnice, kdy je nutno kvůli třecí

síle rozlišit případy pohybu kvádrů č. 2 směrem ke stěně a ode stěny. Rovnice mají tvar

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mgf - kx, \quad \text{pro pohyb ke stěně,}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mgf - kmx, \quad \text{pro pohyb ode stěny.}$$

K těmto rovnicím musíme navíc zadat počáteční podmínky $x(t=0) = x_0$ a $v(t=0) = v_0$. Řešení je však, i když jej lze provést, obtížnější. Proto budeme úlohu řešit snazším způsobem: přes zákon zachování energie, kde započteme i přeměnu pohybové energie na tepelnou energii, která je způsobena třením. Uvažujeme přitom pouze těleso č. 2, které se pohybuje.

Na počátku děje má kvádr č. 2 energii

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2, \quad (32)$$

kde první člen je kinetická energie a druhý člen vyjadřuje potenciální energii přítomnou díky silovému působení pružiny. Předpokládáme zde, že těleso má v čase $t=0$ rychlost o velikosti v_0 směrem ke stěně. Této rychlosti nabylo určitým, blíže nepopsaným způsobem (např. velmi krátkým působením značné síly – úderem apod.). Počáteční výchylka x_0 je buď kladná, pokud je pružina napnutá, nulová, je-li v rovnováze, nebo záporná, je-li stlačena.

V určitém čase t_1 se kvádr přestane pohybovat směrem ke stěně a díky síle od pružiny se začne vracet zpět. V tomto okamžiku bude mít polohu x_1 a pouze potenciální energii, která se bude rovnat počáteční energii zmenšené o energii, která se přeměnila v teplo vlivem tření, tedy

$$E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = E_0 - mgf(x_0 - x_1). \quad (33)$$

Konečně v čase t_2 dosáhne kvádr souřadnice $x = \frac{mgf}{k}$, potřebné k tomu, aby se pohnul kvádr č. 1. V tomto okamžiku bude mít kvádr č. 2 energii

$$E_2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E_1 - mgf(x - x_1). \quad (34)$$

Část energie se opět ztratila třením.

Z rovnic (33) a (34) můžeme dosazením za E_0 z (32) a za x z (31) vyjádřit x_1 a v_0 pro krajní případ, kdy bude rychlost v kvádrů č. 2 po dosažení souřadnice x nulová, čímž vypadne člen kinetické energie v rovnici (34). Uvědomíme-li si, že vzhledem ke zvolené souřadné soustavě musí být $v_0 < 0$ a $x_1 < 0$, obdržíme po úpravách

$$x_1 = -3 \frac{mgf}{k}, \quad (35)$$

$$v_0 = -\sqrt{15g^2 f^2 \frac{m}{k} + 2gfx_0 - x_0^2 \frac{k}{m}} \Rightarrow v_0 = -gf \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{15}, \quad \text{pro } x_0 = 0.$$

Měla by následovat krátká diskuse výsledků. Předně bychom si měli uvědomit to, že při velkém tření by dle našeho výpočtu (viz vztah (35)) muselo být také velké stlačení pružiny. Tedy v reálném případě musí být jednak vzdálenost mezi kvádry větší než x_1 , dále pružina musí být natolik pružná, aby dovolila stlačení o tuto hodnotu. Jinak dojde k odrazu (ať už pružnému, či nepružnému) kvádrů č. 2 a úloha se zkomplikuje, poněvadž pak musíme započítat délku plně stlačené pružiny.

Uvažujeme-li nenulové x_0 , pak pro $x_0 < -3\frac{mgf}{k}$ a $x_0 > \frac{mgf}{k}$ je řešení více než jednoduché. V těchto případech může být totiž počáteční rychlost kvádrů č. 2 nulová a kvádr č. 1 se pohne vždy.

Úloha VI. 3 ... kulečník

Máme N identických kulečnickových koulí, které leží na nekonečně velkém, ideálně rovném a vodorovném kulečnickovém stole. Jednu kouli uvedeme do pohybu. Po jistém počtu nárazů se koule vrátí zpět a zůstane stát. Jaký je minimální počet koulí, aby to bylo možné. Všechny rázy jsou dokonale elastické.

Řešení:

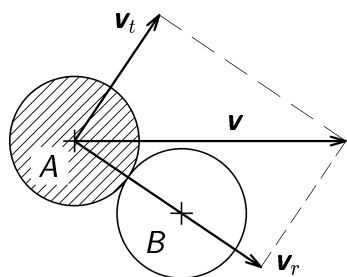
Řešení úlohy započneme tvrzením, které si snadno dokážete sami.

Pokud se srazí dvě stejné koule dokonale pružným středovým rázem, pak si vzájemně vymění rychlosti. Vypadá to tedy, jako by proletěly skrz sebe. (Ale jen vypadá!)

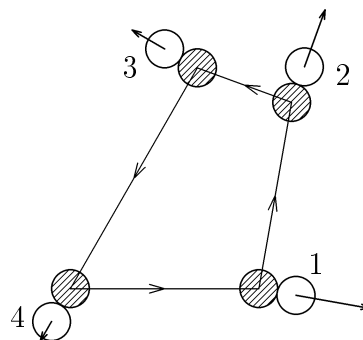
Ve speciálním případě, kdy koule B stála a koule A do ní vrazila, se koule A zastaví (v ideálním případě na místě) a koule B se začne pohybovat stejným směrem a stejnou rychlostí jako se pohybovala koule A .

Pokud dojde k necentrálnímu rázu, můžeme k řešení úlohy o dalším pohybu koulí využít výše uvedeného tvrzení. Protože v naší úloze bude při srážkách vždy jedna z koulí v klidu, budeme řešit jednodušší variantu, než kdyby se obě koule mohly pohybovat.

Rozložíme vektor rychlosti \mathbf{v} nalétávající koule A na dvě komponenty. Jedna (\mathbf{v}_r) bude namířena na střed koule B , druhá (\mathbf{v}_t) bude tečná k povrchu koule B (viz obr. 49). Protože neuvažujeme tření, dojde prakticky ke středovému rázu koule A pohybující se rychlostí \mathbf{v}_r s koulí B . Koule B se začne pohybovat rychlostí \mathbf{v}_r a koule A bude mít rychlost \mathbf{v}_t . Snadno se přesvědčíte, že úhlová odchylka vektorů \mathbf{v} a \mathbf{v}_t může být maximálně 90° , což však ve skutečnosti odpovídá středovému rázu, tj. nalétávající koule by se zastavila.

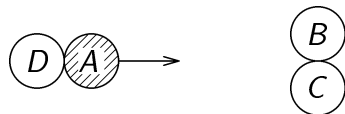


Obr. 49

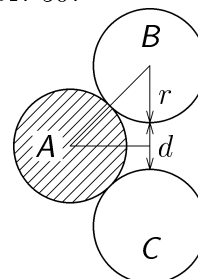


Obr. 50

Z výše uvedeného vyplývá, že nejmenší počet koulí v případě, že uvažujeme pouze „dvoukoulové“ srážky je: 4 (to jsou ty rozmístěné) + 1 (to je ta, co do ní na začátku strčíme) = 5, přičemž schematické rozmístění koulí je zachyceno na obr. 50.



Obr. 51



Obr. 52

Nicméně existuje uspořádání, při němž dojde k požadovanému efektu za účasti pouhých

čtyř koulí (viz obr. 51). Zde dochází k zajímavé situaci. Použitím pouze dvou rovnic (zákonů zachování (ZZ) hybnosti a energie) úlohu o dalším pohybu koulí po srážce nevyřešíme. Získáme na závěr dvě rovnice o třech neznámých (např. tři rychlosti). Proto musíme použít předpoklad o dokonale tvrdých koulích k tomu, abychom mohli říci, že koule B a C se rozletí pod úhlem 60° , tj. že koule se začnou pohybovat ve směru síly, jež na ně při srážce působila. Tak zjistíme, že koule A se odrazí zpět s nenulovou rychlostí a po nárazu do koule D se zastaví.

Pro zajímavost si to spočtíme s tím, že koule B a C se nemusejí dotýkat (viz obr. 52). Pak platí (užitím ZZ), že

$$v = w + \frac{\sqrt{12r^2 - 4rd - d^2}}{2r}u \quad \text{a} \quad v^2 = w^2 + 2u^2,$$

kde v , resp. w je velikost rychlosti koule A před srážkou, resp. po srážce a u je velikost rychlosti, kterou bude mít po srážce koule B i C .

Nás zajímá situace, kdy se koule A zastaví, tj. $w = 0$. To nastane pro

$$d = 2r(\sqrt{2} - 1) \approx 0,82r.$$

Vidíme, že rezerva pro to, aby došlo k odrazu koule A při nedotýkajících se koulích B a C , je značná.

Úloha VI.4 ... lanovka

Na Šumavě se v současnosti buduje zajímavé zařízení na přepravu dřeva. Protože se do močálu normální traktor nedostane, pokoušejí se lesníci použít pro přepravu dřeva vzducholodě. Vzducholodě bude mít nosnost 5000 kg a bude upevněna ke dvěma stanovištím vzdálených od sebe 3 km. Vzducholodě nemá žádný pohon a je tahána mezi kotvícími stanovišti. Jednu cestu absolvuje s nákladem dřeva a druhou jede prázdná, občas nese vaky s vodou.

Jakou maximální silou bude vzducholodě působit na upevňovací lana, bude-li prázdná a nesmí-li její výška nad terénem přesáhnout 300 m (aby nenarušila vzdušný prostor) na celé tříkilometrové trase?

Řešení:

Pro jednoznačnost předpokládejme následující dopravní režim prázdné vzducholodi. Nejprve vzducholodě vystoupá do výšky h (zde 300 m) a pak se prodlužuje lano z místa, kde vzducholodě startovala, současně se přitahuje lano vedoucí z místa, kam směřuje, tak, aby vzducholodě zůstala v konstantní výšce. Přistání nechť je opět kolmé.

Zanedbáme též změny hustoty vzduchu s výškou. Nechť je tedy rozdíl vztahové a gravitační síly pro prázdnou vzducholodě konstantní $F_0 = Mg = 49\,050$ N, kde M je nosnost vzducholodi.

Zavedeme označení: \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 nechť jsou síly působící na jednotlivá lana, délka základny je $l = 3$ km, vzducholodě nechť je ve vodorovné vzdálenosti x od bodu, kde je upevněno první lano ($0 \leq x \leq l$).

Pro složky těchto sil platí

$$F_{1x} = F_{2x}, \\ F_{1y} + F_{2y} = F_0.$$

Z geometrických úvah lze dále odvodit další rovnice, svazující jednotlivé složky sil. Například můžeme vzít tyto dvě rovnice vyjadřující poměry x -ových a y -ových složek.

$$\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{h}{x}, \quad \frac{F_{2y}}{F_{2x}} = \frac{h}{l-x},$$

Jiné vztahy určené z geometrie by již nebyly nezávislé. Máme tak čtyři rovnice pro čtyři neznámé, jejichž řešením jsou

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_0 \frac{(l-x)x}{lh}, & F_{1y} &= F_0 \frac{l-x}{l}, \\ F_{2x} &= F_0 \frac{(l-x)x}{lh}, & F_{2y} &= F_0 \frac{x}{l}. \end{aligned}$$

Pro velikost síly působící na první lano nakonec obdržíme

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{2x}^2} = F_0 \frac{\sqrt{x^2 + h^2}(l-x)}{lh}.$$

Pro F_2 by to bylo díky symetrii podobné, jen je nutné vzájemně zaměnit výrazy x a $(l-x)$.

Maximum funkce lze zjišťovat různými způsoby. Kdo neumí derivovat, může hledat pomocí vypočítaných hodnot a nakresleného grafu (viz obr. 53). Je nicméně žádoucí extrém najít přesně, třeba metodou postupného půlení intervalů (za chvíli ukážeme proč).

Exaktní hodnoty x , v nichž se může nacházet extrém, jsou dány rovnicí

$$\frac{dF_1}{dx} = F_0 \frac{(l-2x)x - h^2}{\sqrt{x^2 + h^2}lh} = 0.$$

Čitatel tvoří kvadratickou rovnici, jejíž kořeny snadno spočteme

$$x_{\text{extrém}1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 8h^2}}{4}. \quad (36)$$

Pro dané hodnoty se na intervalu nacházejí extrémy dva. Jak ukazuje graf (viz obr. 53), jedná se o mělké lokální minimum ve vzdálenosti cca 30 m a maximum pro $x = 1470$ m. Kdo si vypsál hodnoty po 100 metrech, nabyl dojmu, že maximum leží uprostřed, což číselně nedává velkou chybu, ale pro jiné vstupní hodnoty už to vliv mít může.

Pokud měníme poměr h/l , mění se i poloha, v níž dochází k extrémům. Zvyšujeme-li výšku h , maximum se posunuje stále více ke kraji, zatímco minimum mu „jde naproti“. Existuje určitá kritická výška, kdy je pod odmocninou v rovnici (36) nula, tj.

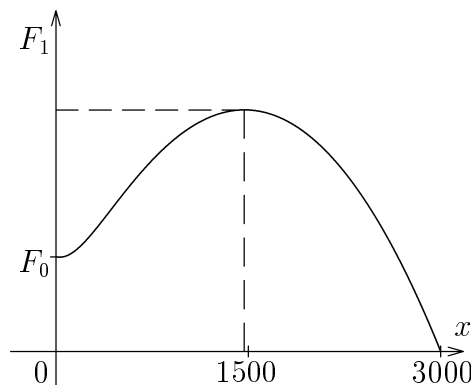
$$h = \frac{\sqrt{2}}{4}l = 1060 \text{ m}, \quad x_{\text{extrém}1,2} = \frac{l}{4} = 750 \text{ m}.$$

Oba extrémy zde splynou a funkce $F_1(x)$ zde má tzv. inflexní bod. Pokud dále zvětšujeme poměr, derivací již žádné extrémy nenalezneme, funkce je zde monotónní a extrémní hodnoty budou na kraji intervalu.

$$\begin{aligned} \text{Číselně vyjde: } F_1(x = 1500 \text{ m}) &= 125\,050 \text{ N}, \\ F_1(x = 1470 \text{ m}) &= 125\,100 \text{ N}, \\ F_1(x = 30 \text{ m}) &= 48\,800 \text{ N}. \end{aligned}$$

Úloha VI.5 ... vodovod

Ke koncům vodorovné trubice délky l , hmotnosti M a konstantního průřezu S jsou připevněna kolena, která přivádí vodu shora a odvádí ji směrem dolů (voda běží svisle, zatočí doleva, běží vodorovně, pak zahne vpravo a běží zase svisle dolů). Druhé koleno je upevněno na otočném kloubu. Jaký průtok musí být v trubici, aby zůstala vodorovně?



Obr. 53

Řešení:

Označení veličin v úloze: ρ je hustota vody, g – tíhové zrychlení, S – průřez trubky, l – délka trubky a M – hmotnost trubky. Prvním krokem k správnému vyřešení úlohy je zakreslení všech působících sil (viz obr. 54).

Sílu \mathbf{F} , kterou působí na trubici protékající kapalina, určíme z druhého Newtonova zákona

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}.$$

Síla \mathbf{R} je reakční síla upevnění prvního kolena. Její velikost a směr určíme z podmínky rovnováhy sil

$$\mathbf{F} - \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = -\mathbf{F}_g.$$

Dále nás bude zajímat pouze y -ová složka síly \mathbf{F} . Pro její velikost bude platit

$$F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{v \Delta m}{\Delta t} = v^2 \rho S = \frac{Q_m^2}{\rho S} = \frac{\rho Q_v^2}{S},$$

kde $Q_m = \Delta m / \Delta t = \rho v S$ je hmotnostní průtok a $Q_v = \Delta V / \Delta t = v S$ průtok objemový.

Velikost tíhové síly je dána vztahem

$$F_g = (M + \rho l S)g.$$

Má-li zůstat trubka v klidu, musí být splněna kromě podmínky rovnováhy sil také podmínka rovnováhy momentů sil vůči libovolné pevné ose. Pro osu zvolenou v bodě upevnění A tak máme

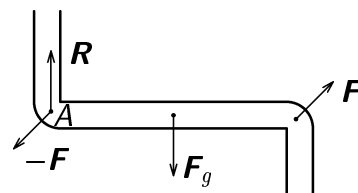
$$F_g \frac{l}{2} = F_y l.$$

Odtud dostaneme pro hmotnostní průtok rovnici

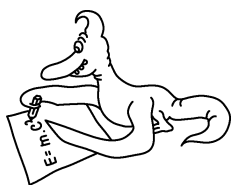
$$(M + \rho l S)g \frac{l}{2} = \frac{Q_m^2}{\rho S} l \quad \Rightarrow \quad Q_m = \sqrt{\frac{g \rho S (M + \rho l S)}{2}}.$$

Pro objemový průtok pak obdržíme

$$Q_v = \sqrt{\frac{g S (M + \rho l S)}{2 \rho}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{g (M + \rho l S)}{2 \rho S}}.$$



Obr. 54



Řešení experimentálních úloh

Úloha I.6 ... výše mého domova hvězd se bude dotýkat...

První experimentální úloha letošního ročníku je svým zadáním poměrně jednoduchá, poskytuje však velký prostor pro vaši nápaditost a vynalézavost: Změřte výšku vašeho bydliště co nejvíce způsoby a výsledky porovnejte. Nebojte se odvážných nápadů. Spočítejte nebo alespoň odhadněte chyby měření nezapomínajíc na to, že ve fyzice platí: *jedno pozorování = žádné pozorování!*

Řešení:

Vypracování experimentální úlohy by mělo obsahovat na začátku trochu teorie popisující danou problematiku, následuje stručný, ale srozumitelný popis měření, na škodu není výčet pomůcek. Nezbytná je tabulka naměřených hodnot a výpočet odchylky měření (viz Chyby měření). Stejně nezbytný je závěr a diskuse získaných výsledků, kde diskutujete, proč vám co jak vyšlo, srovnáváte metody apod. To vše se bohužel do našeho řešení z prostorových důvodů nevešlo. Proto jsou podrobně vypracovány především první dvě metody, které mají všechny základní náležitosti.

Metody měření

Měření přímé

Pomůcky: Pro naše měření je vhodné stavební pásmo, které mívá délku několika desítek metrů a bývá dělené po 1 mm. Při měření délky 1 metru pásmem se dopouštíme chyby asi 1 mm. Dále jsou užiteční olovnice a kamarád.

Popis měření: Vylezeme na střechu a pásmo spustíme k patě domu asistentovi, který jeho konec přiloží k zemi tak, aby pásmo bylo napnuté a svislé. Svislost lze kontrolovat vedle spuštěnou olovnicí. Alternativně lze použít dlouhý žebřík a odměřit výšku metrem (pásmem) po částech postupným přikládáním. My jsme měřili pomocí pásma a pomocníka.

Naměřené hodnoty:

Měření	h/m	$\Delta h_i/m$	$(\Delta h_i)^2/m^2$
1	5,99	+0,00	0,0000
2	6,00	-0,01	0,0001
3	6,00	-0,01	0,0001
4	5,98	+0,01	0,0001
5	5,99	+0,00	0,0000
6	6,00	-0,01	0,0001
7	5,98	+0,01	0,0001
8	6,00	-0,01	0,0001
9	5,98	+0,01	0,0001
10	5,99	+0,00	0,0000

Aritmetický průměr je $\bar{h} = 5,99$ m.

Výpočet odchylky:

Standardní odchylka $s(h) = 0,009$ m. K hrubé chybě podle 3- s kritéria nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\bar{h}) = 0,003$ m. Systematická chyba je asi $s_{sys} = 0,01$ m.

Celková chyba $s_{tot} = 0,013$ m $\approx 0,01$ m.

Skutečná výška domu $h = (5,99 \pm 0,01)$ m.

Diskuse: Měření dává poměrně příznivou celkovou chybu. Systematická chyba je dána tím, že se nepovede držet pásno přesně svise a také tím, že i když se pásno prodlužuje jen minimálně, může se trochu prohýbat, pokud jej málo napínáme.

Obměny přímého měření:

- i) Měření „per partes“ neboli „po částech“: Změříme výšku jednoho bytu (patra) v domě, kde se opakuje více pater stejné výšky, a násobíme počtem pater. Přičteme výšky neperiodických partií, které odměříme zvlášť. Možné je též u paneláku změřit výšku panelu zvenku. Chyba měření roste s rostoucím počtem dílů, na které si dům rozdělíme, protože se zvýší počet měření.
- ii) Jsou-li v domě schody (stejně), změříme výšku jednoho schodu a násobíme počtem schodů. Zvlášť změříme výšku nezaschoděných partií domu. Chyba je opět větší než u prostého přímého měření. Navíc tu používáme předpokladu, že všechny schody mají stejnou výšku, což nám nikdo nezaručí.

Měření pomocí provázku

Postup: Ze střechy, resp. jiného nejvyššího bodu, jehož výšku nad patou domu chceme měřit, spustíme na provázku závaží. Závaží se dole musí dotýkat země a zároveň provázek musí zůstat napnutý. Nahoře v úrovni bodu, jehož výšku měříme, učiníme na provázku značku (uzlík, fix, kolíček na prádlo). Potom provázek rozložíme někde na podlaze a přikládáním měřidla délky zjistíme délku provázku včetně závaží až ke značce.

Pomůcky: provázek, závaží, délkové měřidlo (metr, pásno).

Naměřené hodnoty:

Měření	h/m	$\Delta h_i/m$	$(\Delta h_i)^2/m^2$
1	5,95	+0,03	0,0009
2	5,96	+0,02	0,0004
3	5,98	+0,00	0,0000
4	6,00	-0,02	0,0004
5	5,99	-0,01	0,0001
6	5,97	+0,01	0,0001
7	5,94	+0,04	0,0016
8	5,99	-0,01	0,0001
9	6,02	-0,04	0,0016
10	5,97	+0,01	0,0001

Aritmetický průměr je $\bar{h} = 5,98$ m.

Výpočet odchylky:

Standardní odchylka $s(h) = 0,02$ m. K hrubé chybě podle 3- s kritéria nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\bar{h}) = 0,008$ m. Systematická chyba je asi $s_{sys} = 0,03$ m.

Celková chyba $s_{tot} = 0,04$ m.

Skutečná výška domu $h = (5,98 \pm 0,04)$ m.

Diskuse: Při měření dochází k napínání a prodlužování provázku, při srovnání provázku s měřidlem pak provázek je napnutý podstatně méně. Zejména proto nám vyšla průměrná hodnota menší než při přímém měření. Systematická chyba – pro daný provázek jsme odhadli, že 1 m se tahem prodlouží asi o 2 mm, dále jsme připočetli asi 2 cm na různé chyby při tvoření značky a porovnávání provázku s metrem.

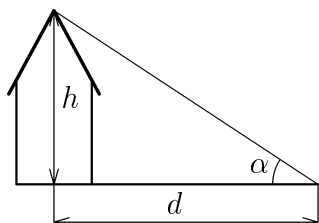
Toto byla dvě měření vzorová skoro se vším všudy (to jest s trochou teorie, popisem měření a potřebných pomůcek, naměř. hodnotami v tabulce, výpočtem odchylek, určením skutečné výšky domu a diskusí. Z důvodu úspory místa dále uvedeme jen stručný popis jednotlivých metod.

Trigonometrické metody

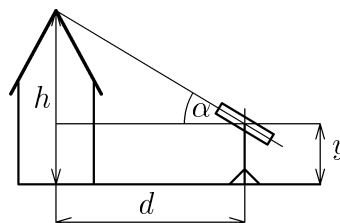
Těchto metod jste uváděli snad nejvíce. Mají většinou tu společnou nevýhodu, že nepočítají s nerovností terénu v určitém okolí domu.

1) **Měření úhlů**

Nechť okolí domu je vodorovná rovina. Odejďme do vzdálenosti d od průmětu nejvyššího bodu domu do vodorovné roviny. V této vzdálenosti na zemi změříme úhloměrem úhel α , pod kterým vidíme nejvyšší bod domu nad vodorovnou rovinou okolí (obr. 55). Platí $h = d \operatorname{tg} \alpha$. Chyba měření spočívá zejména v praktické nerovnosti terénu (tomu lze odpomoci vhodným užitím vodováhy) a v poměrně nepřesném měření úhlu.



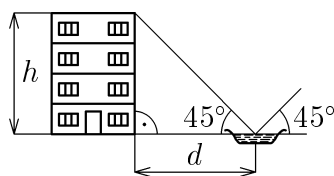
Obr. 55



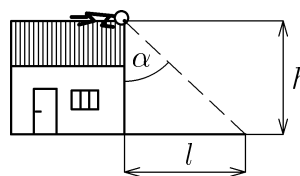
Obr. 56

Obměny:

- i) Do různých vzdáleností d od průmětu vrcholu domu stavíme astronomický dalekohled a zaměřujeme jej na nejv. bod (obr. 56). Na stupnici azimutální montáže dalekohledu odečteme úhel α . Délkovým měřidlem změříme výšku y průsečíku osy hledáčku a osy stativu nad zemí. Výška domu $h = x \operatorname{tg} \alpha + y$.
- ii) Pomocí odrazu v talíři s vodou (obr. 57). Do misky nalijeme vodu. Pak misku poponášíme těsně nad zemí směrem od domu a díváme se do ní pod úhlem 45° vzhledem k rovině hladiny (úhloměr). S miskou jdeme tak daleko, dokud v ní nevidíme odraz špičky domu. Potom změříme pásmem vzdálenost misky od domu – to je výška domu. Chyby se objeví zejména při měření úhlu. Poznámka: místo vody lze užít rovinné zrcadlo – potom máme ale nový problém zajistit jeho vodorovnost.
- iii) Shora zjišťujeme, pod jakým úhlem vůči normále se nám jeví úsečka délky l vyznačená na zemi kolmo ke zdi domu (obr. 58).



Obr. 57

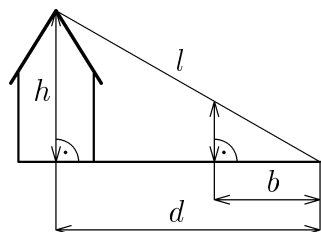


Obr. 58

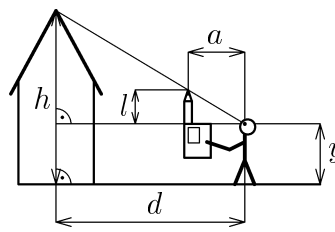
2) **Zákrytová pozorování**

- i) Metoda J. Verna z knihy Tajuplný ostrov nebo též v knize Dva divoši od E. T. Setona. Do země před dům zabodneme do země svisle tyčku. Pak si lehneme na zem a posouváme se tak dlouho, dokud nebude naše oko, vrchol tyče a vrchol střechy ležet v jedné přímce (obr. 59). Pak změříme výšku tyče l , vzdálenost b oka od tyče a vzdálenost d oka od domu. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků je výška domu $h = d \frac{l}{b}$. Chyba měření plyne zejména z nerovností terénu, z určování polohy oka a z měření délek d, l . Poznámka: speciálně, je-li $l = 1$ m, pak $h = \frac{d}{b}$.

Obměna: Oko přiložíme k zemi blíž k tyčce než v předchozím. Kamarád potom vyznačí na tyčce bod, který zakrývá vrchol domu. Jako l pak uvažujeme výšku značky nad zemí.



Obr. 59

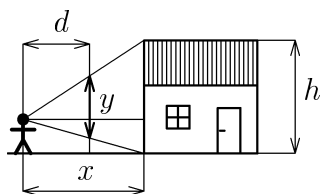


Obr. 60

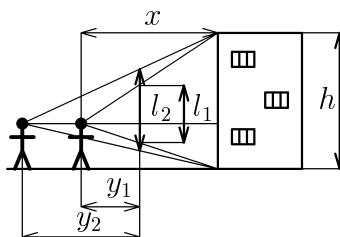
- ii) Skautský způsob. Stoupneme si dostatečně daleko od domu. Zápiskník podržme vodorovně před okem, vysuneme kolmo k němu tužku tak, abychom přes její špičku viděli vrchol domu (obr. 60) – pak opět uijeme podobnost.
- iii) Další zákryt. Viz obr. 61. Z podobnosti trojúhelníků plyne $h = \frac{y}{d}x$.
- iv) Srovnávací zákrytové pozorování (obr. 62). Z podobnosti trojúhelníků odvodíme

$$h = \frac{l_1 l_2 (y_2 - y_1)}{l_1 y_2 - l_2 y_1}.$$

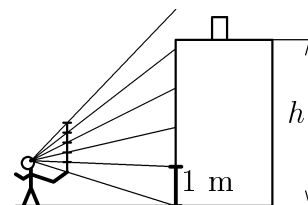
Výhoda oproti předchozímu – nemusíme měřit naši vzdálenost x od domu.



Obr. 61



Obr. 62

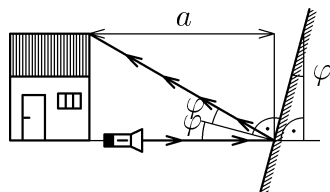


Obr. 63

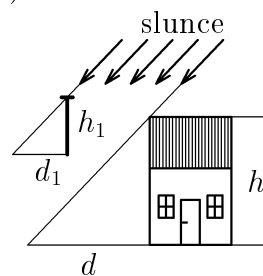
- v) Pomocí tužky. Na domě vyznačíme svisle od země úsečku délky 1 m. Stoupneme si do velké (vhodné) vzd. od domu a před oči umístíme svisle tužku tak, aby nám právě zakrývala úsečku vyznač. na domě. Potom zjistíme tužkou, kolikrát se tato úsečka vejde do výšky domu (obr. 63). Jde o nanášení míry v nějakém poměru.
- Chyby: z obr. 63 vidíme, že čím stojí člověk dál od domu, tím jsou jednotlivé trojúhelníky vzáj. podobnější, a tedy tužka přesněji kryje 1 m.
- Další chyby: problém dodržet stálou vzdálenost tužky od očí a odhadnout, kde končil předchozí zákryt tužky, když posouváme tužku o jednu její délku výše. Lze použít i fotoaparát a z fotografie pak odečítat jednotlivé poměry.

3) Zrcátková metoda

Viz obr. 64. Baterku položíme na zem, aby svítila vodorovně, kolmo od stěny domu. V ose baterky umístíme zrcadlo (obr. 64) pod takovým úhlem φ vůči normále, aby vrhalo „prasátko“ na nejvyšší bod domu. Změříme úhel φ a vzdálenost a průmětu vrcholu domu od bodu odrazu paprsku na zrcadle. Platí zřejmě $h = a \operatorname{tg}(2\varphi)$.



Obr. 64



Obr. 65

4) Srovnávání délek slunečního stínu

Svisle postavíme tyčku, změříme její výšku h_1 , délku jejího stínu d_1 a délku stínu domu d . Výška domu je potom $h = h_1 \frac{d}{d_1}$, jak nahlédneme z obr. 65. Nevýhody: nehodí se pro domy v nerovném terénu, obestavěné, vrhající stín na frekventovanou silnici, nebo např. s mírným sklonem střechy, jejíž vrchol vrhá stín pouze krátce po východu a těsně před západem slunce, a to ještě někam hodně daleko, metoda závisí na přízni počasí. Chyby vznikají nerovnostmi terénu, ale také neostrotí stínu, neboť Slunce má na obloze dost velkou úhlovou velikost.

Mechanické metody.

1) Výtah

Známe-li provozní rychlost výtahu v , změříme stopkami dobu t , za kterou výtah urazí nějakou část výšky domu, když už je rozjetý; tato část má potom výšku $s = vt$. Zbylé partie, kam výtah nejede a kde jede zrychleně, změříme jinak. Toto měření je však silně nepřesné.

2) Valení po nakloněné rovině

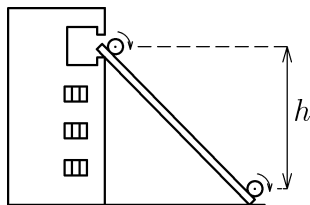
Viz obr. 66. O dům opřeme fošnu, aby její konec sahal až do bodu, jehož výšku chceme měřit. Po fošně necháme valit kouli/válec. Změříme stopkami dobu valivého pohybu po fošně, změříme hmotnost tělesa a změříme délku fošny. Poznámka: použitelné pro menší domy. Nevýhody: přímému měření se nevyhneme a ještě způsobíme velkou chybu při měření času a zanedbáním odporu vzduchu a tření.

3) Matematické kyvadlo

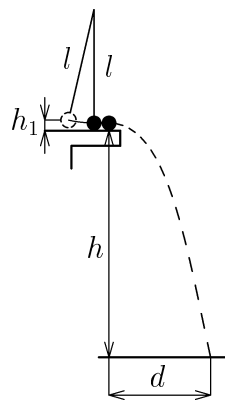
Tenký provázek zatížený na konci malým těžkým závažím spustíme podél měřené stěny. Nahoře provázek upevníme a takto vzniklé kyvadlo rozhoupeme s malou výchylkou. Důležité je, aby těžiště závaží bylo v rovnovážné poloze těsně nad zemí (ještě lepší je vyhrabat tam důlek). Stopkami změříme dobu kyvu (nejlépe tak, že změříme dobu více kyvů a dělíme ji jejich počtem). Jako model můžeme použít s malou chybou kyvadlo matematické, pro které

$$h = l = \frac{T^2 g}{4\pi^2},$$

kde T je perioda, l délka závěsu, h výška domu. Chyby závisí na konkrétních parametrech kyvadla – odpor vzduchu, kyvadlo je fyzikální, chyba při měření času (malá).



Obr. 66



Obr. 67

4) Pružné kuličky

Vytvoříme matematické kyvadlo o délce závěsu l tak, aby kulička v rovnovážné poloze byla v nejvyš. bodě domu (viz obr. 67). Do tohoto bodu položíme druhou, identickou kuličku. První kuličku z nějaké výchylky pustíme, ta pružně narazí do druhé a udělí jí počáteční rychlost ve vodorovném směru. Druhá kulička tedy koná vodorovný vrh. Změřme h_1 , d .

Potom za předpokladu ideální pružnosti kuliček a užitím zákona zach. energie dostaneme

$$h = \frac{1}{4} \frac{d^2}{h_1}.$$

Chyba závisí na dvou podstatných věcech: jak dalece je ráz kuliček pružný ve skutečnosti a jak velký je odpor vzduchu při pohybu kuliček.

Pády – speciální mechanické metody

1) Volný pád malého předmětu se zanedbáním odporu prostředí

Dobu pádu měříme stopkami. Výška domu je v tomto modelu úměrná druhé mocnině času, proto chyba roste lineárně s dobou pádu. Jisté výpovědní hodnoty výsledku dosáhneme při větších výškách domu pro aerodynamické tvary padajícího předmětu.

2) Volný pád s odporem vzduchu

Zde necháme padat předmět s malou hmotností, velkým součinitelem odporu a většími rozměry. Pustíme např. kulový míček (balónek) z nejvyš. bodu domu. Rychlost míčku se velmi rychle ustálí na určité hodnotě, pohyb balónku můžeme s malou chybou považovat za rovnoměrný. Síly tíhová $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, vztlaková $\mathbf{F}_{vz} = -V\rho\mathbf{g}$ a odporová, působící proti směru pohybu a mající velikost

$$F_{odp} = -\frac{1}{2}C\rho S v^2,$$

jsou během rovnoměrného přímočarého pohybu v rovnováze, na těleso působí nulová celková síla (m je hmotnost míčku, g velikost tíhového zrychlení, V objem míčku, ρ hustota vzduchu a C je součinitel odporu tělesa – pro kouli $C \approx 0,48$). Odtud snadno

$$h = t\sqrt{\frac{2(mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g)}{C\pi R^2 \rho}},$$

kde R je poloměr míčku (balónku), t doba pohybu.

Vylepšení: míček vyhodíme svisle vzhůru nad nejvyšší bod domu, aby měl při pádu v jeho úrovni téměř stálou rychlost.

Chyby: měříme čas (asi 0,2 s), poloměr balónku (nevelká chyba, je-li dost kulový), hmotnost balónku se vzduchem.

Hydromechanika

1) Objem okapu

Okap nebo svisle podél domu nataženou hadici naplníme po úroveň bodu, jehož výšku měříme, vodou. Buď už při nalévání anebo při vylití do nějaké nádoby zjistíme objem V okapu/hadice. Poloměr R okapu změříme šuplerou. Výška pak zřejmě

$$h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Chyby nastanou při měření objemu, při prohnutí nebo prodloužení hadice. Problém – pro vysoké domy sehnat vhodnou hadici, dost vody a zařízení, které by tu hadici udrželo ...

2) Hydrostatika

Hadici (okap) naplníme vodou jako v předchozím, ale dolů umístíme manometr, kterým změříme hydrostatický tlak, který nezávisí na průřezu hadice apod., ale jen a pouze na výšce hladiny nad manometrem. Výška hladiny je

$$h = \frac{p}{\rho g}.$$

Chyby vzniknou zejména při měření menších tlaků.

3) Hydrodynamika

Zacpeme zdola okap a naplníme jej vodou jako v předchozím. Po uvolnění dolního konce měříme rychlost vytékající vody (např. tak, že změříme, za jak dlouho se naplní malá nádoba přistavená pod okap). Původní výšku hladiny pak vypočteme z Bernoulliho rovnice.

Elektromagnetické metody – např. odporem drátu

Svisle podél stěny domu natáhneme tam a zpět drát konst. průřezu. Změříme jeho el. odpor R . Potom změříme odpor R_0 kusu téhož drátu délky l_0 . Platí

$$R_0 = \rho \frac{l_0}{S}, \quad R = \rho \frac{l}{S} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{l}{2} = \frac{Rl_0}{2R_0},$$

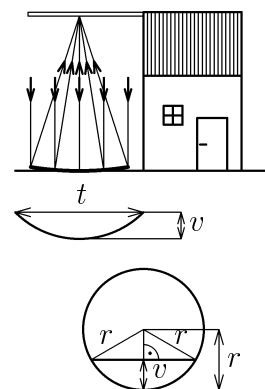
kde ρ je rezistivita materiálu, z něhož je drát vyroben. Chyba metody závisí na tom, jak šikovně ji provedeme. Jestliže je totiž odpor kusu drátu délky l_0 malý (třeba $10^{-3} \Omega$), tak výsledek měření takového odporu přímo ohmmetrem je katastrofálně nepřesný (chyby třeba 500% – výborný generátor náhodných čísel). Buď tedy musíme použít drát s mnohem větší rezistivitou, anebo odpor krátké části drátu měřit šikovněji – najděte si někde, co je to tzv. Ohmova metoda (drátem se pouští velký proud a měří se napětí přímo mezi dvěma body drátu, jejichž vzdálenost je l_0). Když toto vyřešíme, můžeme provést celkem přesné měření.

Metoda korýtkového zrcadla

Dle obr. 68 umístíme na štít domu vodorovnou desku. Kus pozinkovaného plechu tvaru obdélníku ohneme na zemi pod deskou v část pláště válce tak, aby paprsky vrhané sluncem soustředěny byly tímto „korýtkovým zrcátkem“ do jedné co nejostřejší přímky na desku. Změříme pak parametry zrcadla (tětivu t , výšku v) a spočítáme poloměr R kružnice, jejíž část je řezem korýtky:

$$R = \frac{t^2}{8v} + \frac{v}{2}.$$

Chyby mohou být značné vzhledem k tomu, že ohnout plech do daného tvaru je nesnadné, nicméně tato metoda byla skutečně realizována.



Obr. 68

Některé neprovedené, ale proveditelné metody

Doba, za kterou urazí vzdálenost zvuková vlna (ozvěna, mikrofon); určení frekvence tónu vydávaného po úderu do trubky stejné délky, jako je výška domu; různá využití čoček a zrcadel; na zemi měříme v noci intenzitu světla ze zdroje na střeše expozimetrem atd. atd.

Metody krajně nerealistické

Jakákoli použití obecné teorie relativity; měření frekvence fotonu puštěného z vrcholu domu nahore a dole; práce námi vykonaná při vynesení 1kg od přízemí na střechu; různý bod varu vody a rozdíl tlaku v týž okamžik v různých výškách je pro objekty typu dům příliš malý, lze je použít pouze pro měření výšky nadmořské; odchylka volně padajícího tělesa vlivem působení Coriolisovy síly; rozdíl grav. zrychlení v různých výškách; měření času, za který uletí danou vzdálenost světlo, při použití běžně dostupných pomůcek...

Závěr

Jak vidíte, metod je skutečně přehršel. Avšak ne všechny dávají uspokojivé výsledky. Přesnost většiny metod ovšem záleží na jejich konkrétní realizaci, takže by nemělo smysl zde např. obecně „seřadit“ uvedené metody podle přesnosti. Osobně jsme obdrželi dobré výsledky u přímého měření, jen o trochu méně přesné při měření provázkem; metody používající měření úhlu jsou méně přesné (tam jsme dostali až 10% chybu).

Chyby měření

Z praktických důvodů si dovoluujeme připojit několik základních poznatků z teorie chyb.

Chyby systematické

Jde o chyby způsobené použitou metodou, měřicími přístroji a o některé chyby experimentující osoby. Systematické chyby zkreslují zpravidla výsledek k trvale vyšším nebo k trvale nižším hodnotám než je hodnota skutečná.

1) Chyby metody

Např. měříme-li výšku domu provázkem, který se během měření o hodně protáhne a pak při porovnávání s metrem (pásmem) je mnohem kratší, zákonitě obdržíme menší výšku domu, než je skutečná.

2) Chyba měřidla

Dílky na pásmu mají vzdálenost ne přesně 1mm, ale třeba 1,001 mm. Nedokonalost a nepřesnost stupnic.

3) Některé chyby osobní

Někdo při odečítání ze stupnice zaokrouhluje měřenou hodnotu mezi dvěma dílky nahoru, někdo dolů. **Systematické chyby nelze zmírnit velkým počtem měření!** Chyby měřidla se dají zmírnit pouze použitím jiného měřidla (lepšího). Chyby osobní lze z velké části odstranit tím, že dáme veličinu měřit za stejných podmínek více různým osobám. Chybu metody lze vyloučit jedině tak, že použijeme jinou metodu.

Chyby náhodné

Opakujeme-li za týchž podmínek měření téže veličiny, shledáme, že jednotlivé výsledky se navzájem poněkud liší. Měření je ovlivněno např. náhodnými změnami tlaku vzduchu, prouděním vzduchu, malými změnami teploty, změnou polohy oka při měření, přítomností prachu při měření hmotnosti... Takových navzájem nezávislých vlivů bývá mnoho a těžko bychom hledali přesnou příčinu takové konkrétní odchylky (tj. který vliv a o kolik přesně nám výsledek „posunul“), proto původ náhodných chyb vidíme skutečně v náhodě.

Chyby hrubé

Jsou to velké chyby, které vznikají nedostatečným soustředěním pozorovatele na měření. Objevíme je, jestliže měření vícekrát opakujeme (viz dále). Měření zatížené hrubou chybou vypustíme ze souboru naměřených hodnot.

Zpracování výsledků měření postačující k řešení experimentálky FKS

Předkládáme vám jednoduchý algoritmus, který vám doporučujeme užít pro zpracování **dostatečného počtu** (deseti a více) měření. Body 1) až 5) se týkají pouze chyby statistické.

1) Určíme z naměřených hodnot aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Dá se ukázat, že za jistých předpokladů pro nekonečně mnoho měření se aritmetický průměr ztotožňuje se střední hodnotou měřené veličiny (viz literaturu).

2) Stanovíme pro každou naměřenou hodnotu její zdánlivou chybu $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$.

3) Vypočteme standardní odchylku

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}.$$

- 4) Vyloučíme hrubé chyby. K tomu se používá tzv. 3- s kritérium: vyloučíme ty naměřené hodnoty, které se od aritmetického průměru \bar{x} odchyľují o více než $3s$ a opakujeme body 1) až 4).
- 5) Určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru (statistickou chybu)

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2},$$

kde N je počet naměřených hodnot po vyloučení hrubých chyb.

- 6) Určíme systematickou chybu. Za chybu přístrojů můžeme považovat např. polovinu dílku stupnice. Chybu metody, není-li možné ji vypočítat, je nutno ji aspoň nějak fundovaně odhadnout.
- 7) Určíme celkovou odchylku buď podle vzorce

$$s_{celk} = \sqrt{(3s_{stat})^2 + (s_{syst})^2}$$

nebo pro malý počet měření použijeme přibližného vzorce $s_{celk} = 3s_{stat} + s_{syst}$.

- 8) Chybu zaokrouhlíme na jedno platné místo, výjimečně na dvě platná místa, začíná-li dekadický zápis chyby na jedničku. Aritmetický průměr zaokrouhlíme na číslici stejného řádu, jako je nejnižší platné místo chyby.
- 9) Výslednou hodnotu uvádíme ve tvaru

$$x = (\bar{x} \pm s_{celk}).$$

Ještě byste měli vědět, k čemu vůbec nějaké odchylky počítat. Odchylka nám říká, jak přesně jsme veličinu změřili a jak je pravděpodobné, že skutečná hodnota leží v námi určeném intervalu. Dá se odvodit, že výsledek leží s pravděpodobností 99,7% v intervalu $(\bar{x} - s_{celk}, \bar{x} + s_{celk})$.

Literatura:

- J. BROŽ A KOL.: Základy fyzikálních měření (I), SPN, Praha 1967.
E. SVOBODA: Přehled středoškolské fyziky, SPN, 1990.

Úloha II.6 ... kostka cukru

Zjistěte, jaký tlak vydrží kostka cukru, tj. jaká je její mez pevnosti v tlaku. V řešení nezapomeňte uvést parametry použitých kostek (rozměry kostky, značku cukru apod.). Vhodnou metodou proveďte tolik měření, aby vaše výsledky byly průkazné (nejméně deset měření na jeden druh kostky). Z výsledků zkuste vyvodit nějaké závěry.

Řešení:

Teorie

Při každém měření vycházíme z nějakých teoretických předpokladů. Měli bychom tedy zmínit aspoň ty základní, které s naším měřením bezprostředně souvisejí. Úkolem bylo změřit mez pevnosti cukru v tlaku. Působíme-li na průřez S pevného tělesa tlakovou silou F_p , pak v rovnovážném stavu působí v opačném směru síly pružnosti daného materiálu. Míru „napjatosti“ tělesa v nějaké části tělesa o průřezu S kolmém na vnější tlakovou sílu F popisujeme veličinou zvanou normálové napětí. Normálové napětí značíme σ_n a platí $\sigma_n = \frac{F_p}{S}$, tedy $[\sigma_n] = \text{Pa}$. Pro některé pevné látky existuje kritická hranice normálového napětí σ_p , při jejímž překročení dojde k trvalé deformaci. σ_p nazýváme *mez pevnosti v tlaku*. Při pevném průřezu S tedy existuje pro některé látky kritická síla F_{krit} taková, že při působení větší silou dojde k trvalé deformaci. Je $\sigma_p = \frac{F_{krit}}{S}$.

Kostka cukru je těleso se stálým průřezem. Abychom změřili její mez pevnosti v tlaku, musíme na ni působit tlakovou silou a posléze kostku trvale deformovat. Vhodné je působit pomalu se zvětšující tlakovou silou kolmo na jednu ze stěn kostky, přičemž protější stěna je opřena o podložku.

Uvažme nyní vnitřní strukturu kostky. Kostka je složena z velkého množství drobných krystalků, menších než 1 mm. Tyto krystalky pojí k sobě nějaká síla, o jejíž povaze by nám asi něco řekli spíš v cukrovaru. Tato síla je však slabší než síly, díky nimž drží pohromadě každý jednotlivý krystalek o sobě. Při dosažení kritického napětí dojde nejprve k porušení „vazeb“ mezi krystalky a kostka se na tyto krystalky rozsype. Teprve kdybychom působící sílu ještě několikanásobně zvětšili, rozdrtili bychom i tu hromádku krystalků.

Tlakovou silou musíme působit na stěnu kostky rovnoměrně, na každou plošku ΔS této stěny by měla působit stejná síla ΔF . Přesto se nevyhneme problémům s „okrajovými jevy“. Na oddělení krystalků dotýkajících se hrany kostky je totiž třeba menší působící síly než na stejné krystalky uvnitř stěny. Důsledky tohoto jevu nám nezbyde než zanedbat, je však třeba zajistit, aby na tyto okraje nepůsobila větší síla než na krystalky uprostřed. Další nepříjemný jev je skutečnost, že když se kostka už jednou začne drolit, sama zabraňuje dalšímu drcení tím, že rozdrčený cukr „překáží“. Je nasnadě, že po úspěšném rozdrčení cukru odhalíme v hromádce krystalků nějaký nerozdrčený kousek. Také můžeme odhadnout a vzápětí pokusem ověřit průběh deformace: zvyšujeme-li tlakovou sílu F_p , pak poblíž kritické hodnoty dojde nejprve k narušení „vazeb“ mezi krystalky na ploše, na niž F_p působí, potom se rozdrčí okraje kostky, následuje destrukce zbytku kostky.

Postup měření

Naznačíme celkem 4 metody, jak změřit mez pevnosti v tlaku pro kostkový cukr. Ve všech postupech je třeba nejprve změřit rozměry kostky. Pokud se totiž jednotlivé kostky liší významněji v rozměrech, je třeba změřit rozměry pro každou zvlášť. K měření rozměrů kostky je možno užít posuvné měřítko s noniem, v nejhorším případě i pravítko. Kostky, které se velmi málo liší, můžeme naklást těsně za sebou do řady a změřit tak jejich průměrnou délku pravítkem.

(1) Kostku položíme na vodorovnou hladkou podložku, která je dost pevná (ocel apod.) a neohýbá se. Na kostku položíme neohebnou pevnou desku. Na desku klademe pomalu závaží. Když dojde k rozdrčení kostky, zjistíme hmotnost všech použitých závaží. Tato aparatura je jistě velmi nestabilní, při malém naklonění ze zvýší síla působící na některou hranu, ta se začne hroutit a zhrouť se celá kostka při poměrně malé zátěži. Vhodnější je proto rozmístit na podložku 3 nebo více kostek tak, aby při zatížení na nich spočívající desky působila na každou z kostek stejná síla. Např. 4 kostky umístíme do 4 rohů čtverce, zakryjeme čtvercovou deskou a tu zatížíme. Celkovou hmotnost závaží pak ze zřejmých důvodů dělíme počtem kostek.

(2) Kostku položíme na pevnou podložku vedle osobní váhy. Na kostku dáme pevnou destičku rozměrů o trochu větších než kostka. Zvážíme se, stoupneme si na váhu a velmi pomalu „přenášíme tíhu“ z váhy na kostku, sledující stupnici váhy. Údaj odečtený těsně před rozdrčením odečteme od své hmotnosti a získáme zátěž spočívající v ten okamžik na kostce.

(3) Kostku položíme i s podložkou a nadložkou na osobní váhu a pomalu na vrchní destičku působíme silou svisle dolů, sílu velmi pomalu zvětšujeme. Přitom sledujeme stupnici váhy. Důležitý pro naše měření je údaj odečtený těsně před rozdrčením, neboť během drcení dochází k prudkým výkyvům ručičky vah.

(4) Metody působící na kostku přes nějakou páku, zatěžovanou závažím na různých místech. U těchto metod závisí úspěch značně na jejich provedení. Velmi snadno zde dojde k situaci, že silou nepůsobíme na celou stěnu kostky.

Vlastní měření

Použili jsme 2 druhy cukru:

a) Cukrovar a rafinerie cukru v Dobrovci, krychličky o hraně $a = (12,1 \pm 0,2)$ mm.

b) Cukr z Pražských cukrovarů o rozměrech ($a = 21,8 \pm 0,1$) mm, $b = (12,4 \pm 0,2)$ mm, $c = (11,0 \pm 0,1)$ mm.

(1) Nejdříve jsme se pokusili provést měření s jednou kostkou, ovšem nestabilita zajistila kolaps už při zatížení 10 kg. Pro více kostek jsme postup nerealizovali, neboť vyžadoval příliš velkou zátěž na vhodné podložce.

(2) Kostku jsme vložili mezi dvě ocelové destičky. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v následujících tabulkách.

a) *Dobrovecký cukr*:

m/kg	58	55	40	54	47	39	57	43	38	45
$\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$	3,89	3,69	2,68	3,62	3,15	2,61	3,83	2,89	2,55	3,02

Hmotnost zátěže $m = \bar{m} \pm s(\bar{m}) = (48 \pm 2)$ kg, k hrubé chybě nedošlo.

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl $S = (1,46 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Chyba přístrojů (váhy): $\pm 0,5$ kg (půl dílku stupnice).

Průměrná mez pevnosti $\bar{\sigma}_p = 3,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka $s = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\bar{\sigma}_p) = 0,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Mez pevnosti v tlaku $\sigma_p = \bar{\sigma}_p \pm \text{celková odchylka} = (3,2 \pm 0,2) \cdot 10^6 \text{ Pa} \pm \text{chyba přístrojů} \pm \text{chyba metody}$.

Chyba přístrojů: $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow \sigma_p = (3,2 \pm 0,3) \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

b) *Pražský cukr*:

m/kg	63	65	61	67	65	58	65	60	62	65
$\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$	2,29	2,36	2,22	2,43	2,36	2,11	2,36	2,18	2,25	3,36

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl $S = (2,70 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Průměrná mez pevnosti $\bar{\sigma}_p = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka $s = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\bar{\sigma}_p) = 0,03 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Chyba přístrojů: $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ Mez pevnosti v tlaku $\sigma_p = (2,3 \pm 0,1) \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

(3) Opět jsme vložili kostku mezi 2 ocelové destičky. Celá soustava měla zanedbatelnou hmotnost vzhledem k chybě osobní váhy $\pm 0,5$ kg. Naměřené hodnoty odečtené ze stupnice váhy těsně před rozdrcením jsou v tabulkách.

a) *Dobrovecký cukr*:

m/kg	30	43	36	45	31	40	33	35	44	41
$\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$	2,01	2,89	2,41	3,02	2,08	2,68	2,22	2,35	2,95	2,75

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl $S = (1,46 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Průměrná mez pevnosti $\bar{\sigma}_p = 2,54 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka $s = 0,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\bar{\sigma}_p) = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Chyba přístrojů: $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ Mez pevnosti v tlaku $\sigma_p = (2,5 \pm 0,2) \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

b) *Pražský cukr*:

m/kg	42	40	43	46	41	45	39	42	41	45
$\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$	1,53	1,45	1,56	1,67	1,49	1,64	1,42	1,53	1,49	1,64

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl $S = (2,70 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Průměrná mez pevnosti $\overline{\sigma_p} = 1,54 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka $s = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\overline{\sigma_p}) = 0,03 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Chyba přístrojů: $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ Mez pevnosti v tlaku $\sigma_p = (1,5 \pm 0,1) \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Závěr a diskuse

Metoda použitá v měření (2) dává zřejmě mnohem větší hodnoty než metoda (3). Kde je chyba? V jedné z metod, popřípadě v obou. Při svých experimentech jsme si všimli, že kritická síla, při které se kostka začne drobit, závisí do jisté míry na časové změně této síly. Pozorování je takové, že při větší časové změně síly vydrží kostka kupodivu víc. Druhá metoda pak má taky nedostatek: spočívá ve zkreslení vlivem už zmíněného faktu, že hrana je vůči tlakové síle „méně odolná“, a tudíž se začne bortit při malém zvýšení tlaku oproti ostatním bodům účinné plochy. Správný výsledek lze očekávat někde mezi výsledky obou metod, rozhodně nebude menší než výsledek metody (3).

Častým zjištěním bylo, že hodnoty meze pevnosti pro jednotlivé kostky téhož druhu cukru se nezanedbatelně lišily. To si lze vysvětlit individuálními fluktuacemi v každé kostce způsobenými při výrobě anebo vnějšími faktory (vlhkost apod.) a také narušením hran některých kostek např. při přepravě. Co se týče systematických chyb, byly to (kromě chyb metod) také chyby přístrojů, nejčastěji osobní váhy. Za dobrý postřeh považuji i to, že kritický tlak závisí i na výšce kostky, tj. rozměru kolmém k účinné ploše.

Filosofický závěr a malé poučení

Z výsledků by se dal sestavit pěkný žebříček našich cukrovarů. Po vzoru pana Dishmana ze známého filmu „Křídýlko nebo stehýnko“ bychom tak mohli přidělit tři hvězdičky např. Dobroveckému cukrovaru s dovětkem: „cukr z Dobrovce svými báječnými krystalky omámí vaše chuťové buňky, avšak dejte si pozor na protézy.“ Podobně bychom mohli konstatovat: „kostky pro chvíle pohody z Hrušovan se vám rozplynou na jazyku tak, že na to ani 1,4 MPa nepotřebujete.“ A to poučení? Z provedených výzkumů vyplývá, že když se o někom řekne, že je z cukru, může to znamenat skutečně ledacos.

Úloha III. 6 ... optické vlastnosti vody

Tentokrát je zadání velmi stručné: změřte index lomu obyčejné pitné vody. Současně si přečtěte autorské řešení úlohy I.6 a pokuste se realizovat jen jednu metodu, ale zato co nejprecizněji.

Řešení:

Obecný teoretický úvod společný všem metodám

Nechceme opisovat učebnice, avšak na základních pojmech a vztazích je nutné se v teorii dohodnout.

Měřit budeme absolutní index lomu vody, který je definován poměrem $n = c/v$, kde c je rychlost světla ve vakuu, v je rychlost světla ve vodě.

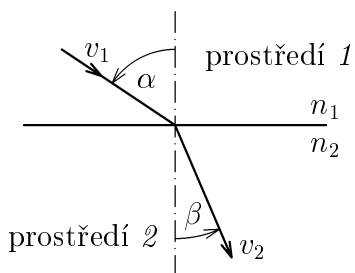
Základním fyzikálním vztahem popisujícím lom z prostředí 1 do prostředí 2 je tzv. Snellův zákon (viz obr. 69):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

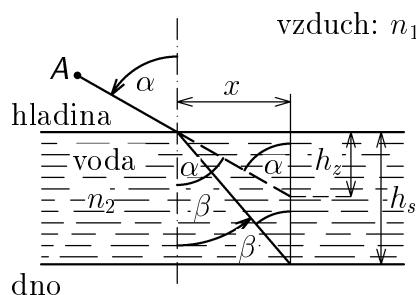
kde α je úhel dopadu na rozhraní, β je úhel lomu, v_1 (resp. v_2) je rychlost světla v prostředí 1 (resp. 2), n_1 (resp. n_2) je index lomu prostředí 1 (resp. 2).

Na vodorovné dno nádoby s vodou položíme předmět a pozorujme jej z bodu A nad hladinou (obr. 70). Vzdálenost od hladiny, ve které by předmět musel ležet, abychom jej po

vypuštění vody pozorovali z bodu A na témže místě, jako když v nádobě byla voda, označme h_z . Skutečnou hloubku předmětu označme h_s .



Obr. 69



Obr. 70

Podle obrázku 70 platí:

$$\frac{x}{h_z} = \sin \alpha, \quad \frac{x}{h_s} = \sin \beta.$$

Odtud snadno plyne

$$\frac{h_s}{h_z} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (37)$$

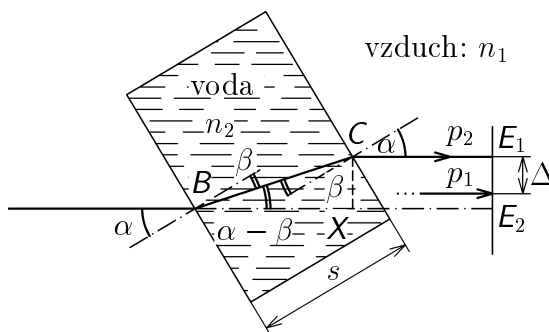
přičemž poslední rovnost plyne ze Snellova zákona a n_2 je index lomu vody, n_1 index lomu vzduchu. Nakonec uveďme, co nám prorokuje teorie – ta říká, že libovolnou metodou bychom měli naměřit $n = n_{vody} \in \langle 1,329; 1,344 \rangle$ pro vlnové délky viditelného světla. V dalším výkladu budeme občas využívat znalosti indexu lomu vzduchu n_1 . Protože n_1 je velmi blízký jedné (např. pro žluté sodíkové světlo se uvádí $n_1 = 1,000292$), dopustíme se zaokrouhlením $n_1 \doteq 1$ chyby řádově mnohem menší, než bude systematická chyba našich měření.

Uvádíme 4 metody měření, z nichž první je zpracována pořádně a další jsou zkrácené.

Metoda 1 (Měření, které vejde do dějin)

Teorie: Laserové ukazovátko namíříme kolmo na zeď a do cesty mu postavíme obdélníkovou nádobu, zatím bez vody (obr. 71). Na zeď nalepíme milimetrový papír. Bod, do něhož dopadá střed paprsku, označíme křížkem. Pak nalijeme do nádoby vodu a na milimetrovém papíře vyznačíme novou polohu paprsku.

Vzdálenost obou značek na milimetrovém papíře označíme $\Delta = |E_1 E_2|$. Z rovnoběžnosti stěn nádoby plyne rovnoběžnost paprsku p_1 vycházejícího z prázdné nádoby s paprskem p_2 z plné nádoby. Laskavý (i nelaskavý) čtenář sám odvodí, že průchod paprsku stěnami nemá žádný vliv na veličinu Δ . Určeme obecně Δ bez uvažování stěn nádoby (viz obr. 71). Vnitřní šířka nádoby je s . Z pravoúhlého trojúhelníka BXC je $\frac{\Delta}{s} = \sin(\alpha - \beta)$, a tedy $\beta = \alpha - \arcsin \frac{\Delta}{s}$. Ze Snellova zákona



Obr. 71: Půdorys

$$n_2 = n_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \left(\alpha - \arcsin \frac{\Delta}{s} \right)},$$

kde položíme $n_1 = 1$, jak odůvodněno výše.

Naměřené hodnoty:

Měření	α/grad	Δ/cm	n	Δn
1	44	2,2	1,53	0,06
2	54	2,8	1,53	0,06
3	52	2,7	1,54	0,05
4	39	1,5	1,36	0,23
5	58	4,1	1,99	0,40

Šířka nádoby byla $s = (8,5 \pm 0,3)$ cm.

Střední hodnota $\bar{n} = 1,59$, průměrná chyba $\overline{\Delta n} = 0,16$. Systematická chyba je způsobena těmito vlivy: chyba při měření Δ na milimetrovém papíře je ± 2 mm, chyba při měření α je $\pm 0,5$ grad, chyba při měření vzdálenosti stěn nádoby je ± 3 mm. Odtud $\sigma_{SYS} = 0,15$.

Diskuse: Námi naměřené hodnoty neodpovídají tabulkovým údajům. Příčinu této skutečnosti spatřujeme v nedokonalé rovnoběžnosti stěn nádoby, kterážto skutečnost unikla při měření naší pozornosti. Velká chyba plyne také z obtížného určení středu dopadajícího paprsku na milimetrový papír, neboť se paprsek při průchodu nádobou a vodou značně rozptyluje. Chyba měření úhlu je proti těmto chybám zanedbatelná. Měření č. 5 je patrně hrubou chybou (způsobenou spícími experimentátory). Korekci na nerovnoběžnost stěn zpřesněním teorie zřejmě není možné provést. Proto křivost stěn zahrneme do celkové systematické chyby, kterou odhadneme na $\delta_{SYS} = 0,3$.

Závěr: Realizace této metody v našich podmínkách nedává výsledky s uspokojivou přesností. Kdybychom měli nádobu, jejíž stěny bychom mohli považovat za rovné a rovnoběžné s dostatečnou přesností, dosáhli bychom uspokojivé přesnosti měření.

Metoda 2 (Bystrozraký a Krátkozraký)

Teorie: Do kýblu nalijeme do výšky H ode dna vodu a na dno položíme minci. Identickou mincí pohybuje ve vertikálním směru ve vzdušném prostoru stranou kýblu, dokud nejsme přesvědčeni, že obě mince jsou stejně hluboko. Následně změříme hloubku mince vedle kýblu. Podle vztahu (37) je

$$n_2 = \frac{h_S}{h_Z} n_1 \approx \frac{h_S}{h_Z},$$

kde h_S je skutečná hloubka mince v kýblu, h_Z vzdálenost mince vedle kýblu od hladiny, n_2 je index lomu vody, n_1 vzduchu.

Obávali jsme se, že měření zdánlivé hloubky bude do značné míry subjektivní, proto jsme je provedli každý zvlášť desetkrát a výsledky jsme zpracovali také samostatně.

Měření všech délek jsme prováděli pravítkem s dílkem stupnice 1mm.

Naměřené hodnoty:

V obou případech byla skutečná hloubka $h_S = (20,5 \pm 0,2)$ cm.

Martinův výsledek: $n_2 = 1,37 \pm (0,04 + \text{chyba systematická})$.

Matoušův výsledek: $n_2 = 1,60 \pm (0,03 + \text{chyba systematická})$.

Diskuse: Větší přesnosti odhadu dosáhneme, pokud odhadujeme, kdy se nám zdá mince býti na dně nádoby. Měření vyžaduje jistou zkušenost experimentátora v odhadování. Všimněte si, že nám vyšly každému výrazně jiné výsledky. Právě jsme se v praxi setkali s chybou osobní systematickou. (Pozn. M. J.: není to chyba moje – třeba že bych snad šilhal –, nýbrž chyba metody.)

Porovnáme-li naměřené hodnoty s tabulkovým údajem $n \approx 1,33$, zjistíme, že systematická chyba bude značná – aspoň 0,3.

Závěr: Metodou 2 lze změřit index lomu vody s nevalnou přesností, zvláště má-li experimentátor špatný odhad pro malé vzdálenosti. Měření je hodně subjektivní, a proto může být velmi nepřesné.

Metoda 3 (Odraz úplný, naprostý a totální)

Teorie: Při průchodu světla z prostředí opticky hustšího do prostředí opticky řidšího se paprsek láme od kolmice. Existuje tzv. mezní úhel dopadu γ'_m , pro který je úhel lomu $\delta = 90^\circ$. Pro úhel dopadu $\gamma > \gamma'_m$ se paprsek již neláme, nýbrž úplně odrazí od rozhraní.

Postup měření: Do průhledné nádoby s alespoň jednou svislou rovnou stěnou nalijeme vodu do vhodné výšky. Ze strany pak svítíme laserovým ukazovátkem pod úhlem α . Světlo se nejprve láme ze vzduchu do stěny nádoby (bod A), pak ze skla do vody v bodě B , a nakonec z vody do vzduchu (bod C) – viz obr. 72.

Nyní ukážeme, že namísto dvou lomů v bodě A a B stačí uvažovat pouze jeden lom, a to ze vzduchu přímo do vody. Zdůrazněme, že se nejedná o žádné „zanedbání“.

Nechť $n_1 \dots$ index lomu vzduchu, $n_2 \dots$ index lomu skla, $n_3 \dots$ index lomu vody, $\alpha \dots$ úhel dopadu na stěnu nádoby, $\beta \dots$ úhel lomu ze vzduchu do skla a úhel dopadu ze skla na rozhraní sklo-voda, $\gamma \dots$ úhel lomu ze skla do vody.

Ze Snellova zákona plyne

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{n_3}{n_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_3}{n_1}, \quad (38)$$

což je však totéž, jako kdybychom napsali Snellův zákon pro rozhraní vzduch-voda, bez uvažování skleněné stěny. Pro výpočet úhlu γ tedy nemusíme existenci stěny uvažovat (to však neplatí, pokud úhly určujeme pomocí měření vzdáleností!).

Na obr. 72 je znázorněna nádoba s vodou – řez je totožný s rovinou, v níž je paprsek. Vidíme, že platí $\gamma'_m = 90^\circ - \gamma$. Ze Snellova zákona v bodě C platí

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \gamma'_m} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}}. \quad (39)$$

Index lomu vzduchu lze nahradit jedničkou, jak řečeno výše. Z rovnic (38), (39) po úpravách plyne

$$n_3 = \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}. \quad (40)$$

Index lomu vody n_3 ve vztahu (40) závisí pouze na prvním úhlu dopadu α , na ničem jiném. Stačí proto měřit pouze úhel α .

Naměřené hodnoty:

Střední hodnota $\bar{n} = 1,320$.

Chyba standardní $\sigma(n) = 0,004$, k hrubé chybě nedošlo.

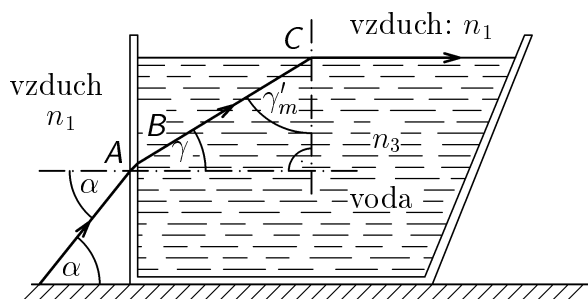
Chyba směrodatná $\sigma(\bar{n}) = 0,001$.

Chyba systematická $\sigma_{SYS} = 0,03$.

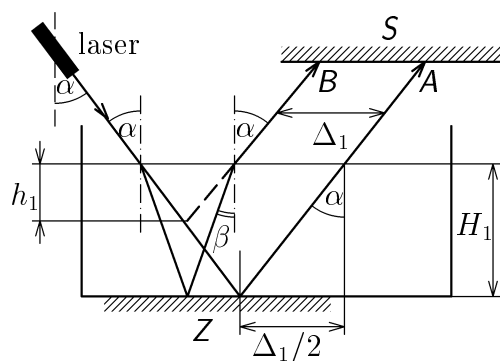
Index lomu $n = 1,32 \pm 0,03$.

Diskuse: Při prvním měření jsme zjistili, že je těžké najít úhel, kdy dochází k úplnému odrazu. Proto jsme zavedli jisté korekce představující úhel lomu φ do vzduchu. Tento úhel jsme určovali měřením vzdálenosti v pravoúhlém trojúhelníku. Vzhledem k tomu, že největší odchylka φ od 90° byla 1° , jsou tyto chyby zanedbatelné ve srovnání s ostatními systematickými chybami. Systematická chyba měření klesá s rostoucími rozměry nádoby, neboť pak lze přesněji určit mezní úhel.

Závěr: V rámci chyby odpovídá změřený index lomu tabulkové hodnotě. Tato metoda je nejpřesnější z námi použitých.



Obr. 72



Obr. 73

Metoda 4 (Odras v hloubi hrnce)

Teorie: Kromě zákona lomu (viz obecná teorie v úvodu) použijeme ještě zákon odrazu, který říká, že úhel odrazu má stejnou velikost jako úhel dopadu.

Do hrnce hlubokého a širokého (bystrozrakého už nikoliv) umístíme na dno rovinné zrcátko Z vodorovně (obr. 73), aby se během pokusu nepohnulo. Do hrnce nalijeme do výšky H_1 vodu tak, aby zrcátko bylo pod vodou, ale nádoba nebyla příliš plná.

Pod úhlem α nasměrujeme do hrnce laserový paprsek, aby po odrazu od zrcátka dopadl na stínítko S tvořené milimetrovým papírem. Když v hrnci nebyla ještě žádná voda, dopadl paprsek odražený od zrcátka do bodu A . V hrnci s vodou však došlo též k lomu a paprsek dopadl až do bodu B . Označme $|AB| = \Delta_1$. Platí (viz obr. 73)

$$\frac{\Delta_1}{2} \frac{1}{H_1 - h_1} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (41)$$

kde H_1 je skutečná hloubka nádoby (od hladiny k zrcadlu) a h_1 je zdánlivá hloubka.

V úvodní teorii jsme však odvodili vztah pro skutečnou a zdánlivou hloubku

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{n_{\text{vody}}}{n_{\text{vzduchu}}} \Rightarrow h_1 = \frac{H_1}{n_{\text{vody}}}, \quad (42)$$

jestliže položíme $n_{\text{vzduchu}} = 1$, což při naší přesnosti smíme. Dosazením (42) do (41) a jednoduchou úpravou obdržíme

$$\Delta_1 = 2H_1 \left(1 - \frac{1}{n_{\text{vody}}} \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Nyní dolijme do nádoby ještě nějakou vodu a posun paprsku do bodu C na stínítku popíšeme vzdáleností $|AC| = \Delta_2$. Pro Δ_2 platí obdobný vztah jako v předchozím případě pro Δ_1 , pouze nahradíme H_1 vzdáleností nové hladiny od zrcadla H_2 .

Měřit budeme vzdálenost bodů B a C , tj. polohu paprsku na milimetrovém papíře pro dvě různé hloubky H_1, H_2 . Platí zřejmě $\Delta = |BC| = \Delta_2 - \Delta_1 = 2(H_2 - H_1) \left(1 - \frac{1}{n_{\text{vody}}} \right) \operatorname{tg} \alpha$, odkud

$$n_{\text{vody}} = \frac{2(H_2 - H_1) \operatorname{tg} \alpha}{2(H_2 - H_1) \operatorname{tg} \alpha - \Delta}.$$

Úhel α jsme měřili úhloměrem (v gradech), délky H_1, H_2 pomocí pravítka, Δ pomocí milimetrového papíru.

Naměřené hodnoty: Pro celkovou časovou složitost pokusu jsme provedli jen 2 měření. Systematickou chybu odhadujeme na $\sigma_{SYS} = 0,1$ (nevodorovné zrcátko, určení středu paprsku, měření úhlu ($\pm 0,5$ grad), měření hloubky (± 1 mm)).

Index lomu vody $n = 1,44 \pm 0,12$.

Diskuse: Systematická chyba měření je poměrně velká; je způsobena zejména nevodorovností zrcátka v naší konkrétní realizaci. Tabulkové hodnotě však výsledek v rámci chyby odpovídá. Chybu lze zmírnit použitím hlubšího a širšího hrnce, neboť Δ je úměrné H_2 a $\operatorname{tg} \alpha$.

Závěr: Výsledek měření odpovídá teorii.

Celkový závěr

Nejpřesněji se nám povedlo realizovat metodu 3. Měli jsme přitom jistou výhodu, že jsme mohli použít (a použili) laser. Metod, jak změřit index lomu, existuje mnoho desítek a nemohli jsme pochopitelně zkusit všechny. Chtěli bychom však říci, že laser rozhodně k pokusu potřeba nebyl. Naši řešitelé se s problémem zdroje vyrovnali celkem třemi různými způsoby:

- 1) vytvořili si dobrý zdroj z nějakého svítidla (pomocí clony jste vyrobili zdroj bodový),
- 2) sehnali si laser jako my,
- 3) vymysleli pokus tak, aby bodový zdroj nebyl potřeba (pozorovali pod nějakým úhlem značku v hrnci apod.).

Z autorského řešení metody 1 a obecného úvodu si můžete vzít poučení, co patří do jednotlivých částí vyhodnocení měření, např. jak má vypadat diskuse.

Úloha IV.6 ... hustota vody

Tentokrát je vaším experimentálním úkolem změřit další fyzikální vlastnost vody, totiž její hustotu. Aby nevznikaly velké zmatky, vymysleli jsme pro vás tento postup měření: Do vody ponoříme nádobu dnem vzhůru, původně celou naplněnou vzduchem o atmosférickém tlaku. Jak se nádoba ponořuje, tak se do nádoby postupně dostává voda. Vymyslete, jak tímto postupem zjistíte hustotu vody a pokuste se navrhnout takové experimentální uspořádání, abyste dosáhli maximální přesnosti. Znáte atmosférický tlak a tíhové zrychlení.

Řešení:

Teorie

Upřesníme nejprve trochu zadání úlohy. Sklenici plnou atmosférického vzduchu obrátíme vzhůru dnem a ponoříme částečně nebo úplně do vody v nějaké větší nádobě. Vlivem hydrostatického tlaku vody dojde ke stlačení vzduchu ve sklenici. Nejjednodušší způsob, jak pomocí takto ponořené sklenice změřit hustotu vody, vychází z měření změny objemu vzduchu ve sklenici při jeho stlačování. Pro toto měření je třeba navrhnout (a pochopitelně i sestavit) co nejpřesnější experimentální uspořádání.

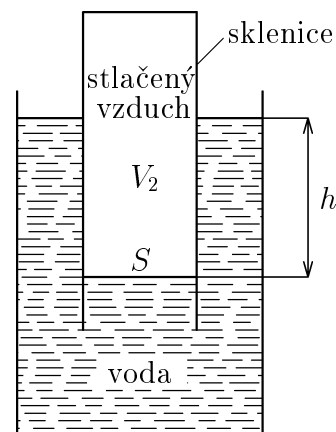
Na obr. 74 vidíte ponořenou skleničku. Sklenku ve vodě upevníme. Před ponořením je ve sklenici vzduch o objemu V_1 , teplotě T_1 a tlaku p_1 , který je roven atmosférickému tlaku p_A . Po ponoření bude mít vzduch ve sklenici objem V_2 , teplotu T_2 a tlak p_2 . Při ponořování skleničky proběhne ve vzduchu nějaký děj, pro který platí stavová rovnice

$$\frac{p_A V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

neboť při této stavové změně se hmotnost vzduchu nemění.

Ze stavové rovnice víme, že po ponoření je tlak vzduchu ve sklenici

$$p_2 = \frac{p_A V_1 T_2}{T_1 V_2}.$$



Obr. 74

Na vodní hladinu ve sklenici působí shora dolů tlaková síla vzduchu $F_p = Sp_2$, kde S je povrch hladiny (vnitřní průřez sklenice ve výšce hladiny uvnitř sklenice). Proti této síle působí směrem vzhůru tlaková síla vody F_t a aerostatická tlaková síla F_{p_A} . Platí $F_t = Sh\rho g$, kde h je rozdíl výšek hladin vně a uvnitř sklenice, ρ je hustota vody a g je velikost tíhového zrychlení. Zřejmě též platí $F_{p_A} = Sp_A$, kde p_A je atmosférický tlak.

Hladinu vody ve skleničce budeme pozorovat, až když se ustálí, tj. v rovnovážném stavu. Tehdy bude platit

$$F_p = F_t + F_{p_A},$$

jestliže zanedbáme všechny ostatní síly (povrchové jevy apod.). Z této rovnosti sil plyne

$$S \frac{p_A V_1 T_2}{T_1 V_2} = Sh\rho g + Sp_A.$$

Z tohoto vztahu snadno dostaneme hustotu vody

$$\rho = \frac{p_A}{hg} \left(\frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} - 1 \right).$$

Pokud bude možno považovat stlačování vzduchu za izotermické, pak se předchozí vztah redukuje na

$$\rho = \frac{p_A}{hg} \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right). \quad (43)$$

Abychom mohli použít tento redukováný vztah, bude nutné zajistit, aby rozdíl $|T_1 - T_2|$ byl velice malý. Významem slovíčka „velice“ se budeme podrobněji zabývat v diskusi.

Objem vody ve sklenici po ponoření označme W . Snadno nahlédneme, že $V_2 = V_1 - W$. Dosazením do (43) máme

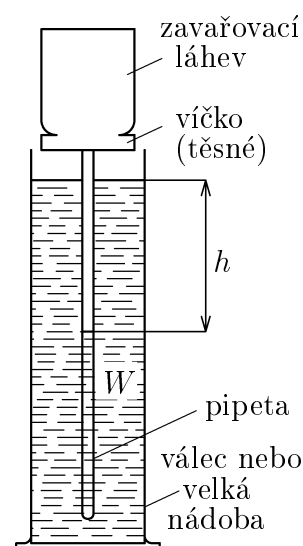
$$\rho = \frac{p_A}{hg} \left(\frac{V_1}{V_1 - W} - 1 \right) = \frac{p_A}{hg} \frac{W}{V_1 - W}. \quad (44)$$

Měřit budeme hloubku h , objem W a objem celé sklenice V_1 .

Přistupme nyní ke druhé části úlohy, totiž jak uspořádat pokus, aby naše měření hýřilo přesností. Velkou přesnost budeme potřebovat u veličin h , W a $V_1 - W$, neboť relativní odchylky těchto veličin se při výpočtu systematické chyby sčítají (díky tomu že jsou v součinu, resp. v podílu – viz vzorce (43) a (44)). Lze očekávat, že W bude poměrně malé. Naše sklenice by tedy měla mít malý průřez, aby se malý rozdíl objemů projevil velkým rozdílem h hladin, a též kvůli přesnějšímu změření objemu W . Výhodné bude ponořovat sklenici hodně hluboko, protože tím se W zvětší a způsobí menší relativní chybu. Aby bylo přesnější měření $V_1 - W$, bude třeba zvětšit objem celé sklenice.

Všechny tyto žádoucí vlastnosti se snoubí ve „sklenici“ znázorněné na obr. 75. Tato „sklenice“ vznikne např. z láhve od sirupu, nebo jako v našem experimentu, když k zavařovací lahvi o objemu asi 1 litr připevníme vzduchotěsně pipetu o průměru aspoň 5 mm (abychom mohli zanedbat kapilaritu). Tuto umně zhotovenou „sklenici“ budeme v dalším textu označovat jako „láhev“.

Zavařovací sklenice splňuje požadavek velkého objemu, na stupnici pipety lze zase velmi přesně odečítat změnu objemu W a hloubku h . Hloubka, ve které budeme láhev topit, závisí na hloubce naší domácí vany nebo jiné vhodné nádoby.



Obr. 75

Pomůcky

Výše popsaná láhev, velká nádoba (vana nebo např. větší odměrný válec), skládací metr nebo pravítko, rukavice, noviny s aktuálním údajem o atmosférickém tlaku.

*Výsledky měření***Veličiny společné všem metodám**

Při všech měřeních byl atmosférický tlak $p_A = (1,015 \cdot 10^5 \pm 0,005 \cdot 10^5)$ Pa. Údaj jsme získali z meteorologické mapy v Lidových novinách.

Tíhové zrychlení uvažujeme $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Objem celé lahve jsme změřili tak, že jsme ji celou včetně pipety naplnili vodou a vodu přelili do odměrného válce. Obdrželi jsme objem $V_1 = (765 \pm 4)$ ml.

Při všech následujících měřeních jsme délku h měřili metrem s přesností 1 mm. Objem W jsme odečítali ze stupnice pipety s přesností 0,1 ml.

Měření 1: odstrašující

Teorie: Aparaturu sestavíme dle obr. 75. Do většího odměrného válce ponořujeme část lahve tvořenou pipetou.

Naměřené hodnoty:

Měření	W/ml	h/cm	$\rho/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\Delta\rho/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
1	10,0	15,7	870	-70
2	9,4	14,5	890	-50
3	9,9	14,3	950	10
4	10,4	14,8	960	20
5	10,3	15,0	940	0
6	9,2	14,5	870	-70
7	9,7	14,5	920	-20
8	10,8	14,3	1040	100
9	10,4	14,8	960	20
10	10,6	14,2	1020	80

Průměrná hodnota hustoty vody $\bar{\rho} = 940 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(\rho) = 60 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\bar{\rho}) = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Pro hustoty vody jsme tak obdrželi $\rho = (940 \pm (60 + \delta_{SYS})) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Diskuse: Po deseti měřeních jsme shledali, že jsme si vyrobili velmi citlivý plynový teploměr. Během pokusu stačilo položit teplou ruku na dno zavařovačky, načež hladina v pipetě značně poklesla. Rozdíl teplot $|T_1 - T_2|$ byl sice malý, avšak zdaleka ne zanedbatelný. Způsobil chybu přes 10%. Ostatní chyby měření (měření $h(1\%)$, měření $W(1\%)$, chyba tlaku $p_A(1\%)$ apod.) lze vzhledem k této chybě zanedbat. Jelikož při tomto měření byla láhev držena ručně, přecházelo teplo vesele z rukou do útrob lahve. Aproximace izotermickým dějem je zde proto oprávněná jen v rámci velké chyby. Povšimněte si, že hustota vody vychází menší než skutečná. Vzduch ohříváný našimi dlaněmi se totiž rozpíná a vytlačuje více vody z pipety.

Měření 2: předchlazení

Teorie: Abychom mohli stlačení považovat za izotermické, pozměnili jsme trochu metodu. Chtěli jsme se vyhnout měření teploty, neboť k tomu by bylo třeba použít citlivého teploměru (desetiny °C) a uvážit teplotní rozdíly mezi různými body lahve.

První minimalizace teplotního rozdílu: Do velkého válce nebo vany nalijeme studenou vodu. Stejně studenou vodu nalijeme do kýblu. Láhev se vzduchem pak v kýblu předchla-

díme. Pokojová teplota je vyšší než teplota vody. Rukavicí uchopíme láhev a ponoříme ji pipetou do válce (vany). Stlačení vzduchu proběhne poměrně rychle. Díky tepelné výměně se vzduchem v pokoji se však vzduch v láhvi začne pomalu rozpínat. Proto objem W měříme ihned, jakmile skončí stlačování.

Naměřené hodnoty:

Měření	W/ml	h/cm	$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$\Delta\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
1	9,2	13,8	910	-50
2	9,1	13,7	910	-50
3	9,2	13,6	930	-30
4	9,3	13,4	950	-10
5	10,4	13,9	1030	70
6	10,0	14,3	960	0
7	8,0	11,2	980	20
8	9,1	13,0	960	0
9	9,8	13,9	970	10
10	10,4	13,7	1040	80

Průměrná hodnota hustoty vody $\bar{\rho} = 970 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(\rho) = 40 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\bar{\rho}) = 10 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Relativní systematická chyba je $\delta_{SYS} = 10\%$, odtud $\sigma_{SYS} = 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. (Zdůvodnění je v celkové diskusi.)

Tedy celková chyba $\sigma_{CELK} = 130 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Skutečná hodnota hustoty vody $\rho = (970 \pm 130) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Měření 3

Teorie: Druhý způsob minimalizace teplotních rozdílů: Zajistíme stejnou teplotu vzduchu v lahvi, vody ve válci (vaně) i vzduchu v pokoji. Objem W měříme, když skončí stlačování.

Naměřené hodnoty:

Měření	W/ml	h/cm	$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$\Delta\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
1	10,8	13,9	1070	40
2	9,5	14,8	880	-150
3	9,2	11,7	1080	50
4	8,7	12,0	990	-40
5	8,5	11,3	1030	0
6	10,3	13,1	1080	50
7	10,1	13,0	1060	30
8	8,6	10,9	1080	50
9	10,0	13,5	1020	-10
10	9,2	12,0	1050	20

Průměrná hodnota hustoty vody $\bar{\rho} = 1020 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(\rho) = 60 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\bar{\rho}) = 20 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Relativní systematická chyba je $\delta_{SYS} = 10\%$. (Zdůvodnění je v celkové diskusi.)

Absolutní systematická chyba $\sigma_{SYS} = 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Celková chyba $\sigma_{tot} = 160 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Skutečná hodnota $\rho = (1020 \pm 160) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Měření 4

Teorie: Odměrný válec, do něhož jsme dosud láhev ponořovali, nahradme podstatně větší nádobou – např. velkým sudem nebo rybníkem. Kapacita velkého vodního tělesa zaručuje, že voda svoji teplotu měnit nebude. Aby se co nejméně měnila teplota vzduchu v lahvi, tuto opět předchladíme. Ponoříme ji pak celou (nejen pipetu) a několik minut počkáme. Pokud dojde při stlačení k ohřátí vzduchu, popřípadě teplotním výkyvům způsobených výskytem vodních par, po jisté době se díky tepelné výměně teplotní rozdíly zmírní.

Naměřené hodnoty:

Pro náročnost provedení jsme získali jen jednu hodnotu. Náročnost měření spočívala v lovení láhve ze sudu plného studené vody (o teplotě 5°C) v nevládném jarním počasí.

$$h = (31,1 \pm 0,2) \text{ cm}, \quad W = (23,0 \pm 0,2) \text{ ml}, \\ p_A = (1,015 \pm 0,010) \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad V_1 = (765 \pm 4) \text{ ml}.$$

Určili jsme tedy hustotu vody $\rho = (1030 \pm 30) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Diskuse: Soubor obsahující jednu hodnotu mnoho nevyovídá. Přesto si myslíme, že děj byl ze všech měření nejvíce izotermický – díky desetiminutovému předchlazení ve velkém množství vody byly splněny všechny předpoklady pro to, aby děj byl téměř ideálně izotermický. Systematickou chybu jsme brali s jistou rezervou, neboť jsme měření provedli pouze jednou a nemá smysl počítat chybu statistickou.

Diskuse společná pro všechna měření

Při měření délky h jsme se dopustili chyby 1 mm, což odpovídá relativní odchylce $\delta_h = 0,01$. Chyba měření objemu W byla 0,1 ml, tedy relativní chyba $\delta_W = 0,01$.

Chyba při měření celkového objemu V_1 byla 4 ml.

Tedy relativní chyba rozdílu ($V_1 - W$) je $\delta_{(V_1 - W)} = 0,005$.

Relativní chyba použité hodnoty pro atmosférický tlak byla $\delta_{p_A} = 0,010$.

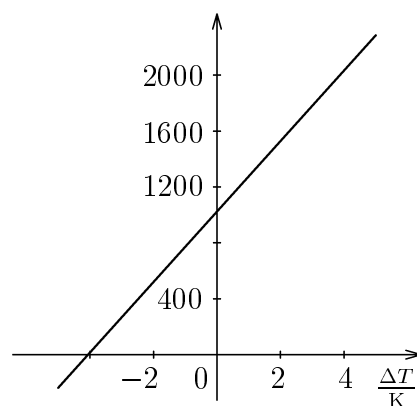
Relativní systematická chyba měření je tedy $\delta_{SYS} = \delta_h + \delta_W + \delta_{(V_1 - W)} + \delta_{p_A} + \delta_X = 4\% + \delta_X$, kde δ_X je chyba způsobená ostatními vlivy.

Protože jsme velmi účinně minimalizovali chyby plynoucí z měření délek a objemů, způsobí nám největší chybu změny teploty (s výjimkou měření 4). Uvažme jedno z provedených měření, ve kterém jsme obdrželi výsledky $h = 14,2 \text{ cm}$ a $W = 10,6 \text{ ml}$, z nichž spočteme hustotu $\rho = 1020 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, ale za předpokladu izotermičnosti stlačování. Posuďte, jakou hustotu vody bychom z týchž údajů vypočetli, kdyby se všechnen vzduch v lahvi stačil ohřát nebo ochladit o teplotu ΔT . Vidíme, že velmi malá změna teploty mohla proměnit měření ve zdrcující neúspěch. Teprve teď vidíme, jak malý teplotní rozdíl nastal během měření – maximálně $0,5^{\circ}\text{C}$, jelikož skoro všechny hodnoty ρ ve všech měřeních nám vyšly v intervalu $\langle 850; 1100 \rangle \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Chybu způsobenou neizotermičností děje můžeme pouze odhadnout z výsledků měření. U prvního měření (kdy jsme láhev ohřívali rukama) bude tato chyba činit 10% až 15%. U zbylých měření byla tato chyba většinou pod 10%. U měření 4 nebude rozhodně tato odchylka větší než 2%.

Na měření měly vliv ještě další jevy a skutečnosti:

- uvnitř láhve docházelo k vypařování vody (odtud mohlo plynout jisté ochlazování a vzešup hladiny v pipetě);

**Obr. 76**

- v pipetě došlo k malé kapilární elevaci;
- láhev nebyla jistě ideálně vzduchotěsná;
- vzduch není ideální plyn;
- vzduch uvnitř lahve má také nějakou hmotnost, kterou zanedbáváme.

Všechny tyto jevy však v našem uspořádání pokusu hrály vskutku zanedbatelnou roli v růstu chyby, vzniklé teplotním rozdílem.

Závěr

V rámci chyby potvrzují všechna měření tabulkovou hustotu vody $996 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Největší chyba byla způsobena neizotermičností děje. Její odstranění a pořízení většího souboru hodnot by patrně vyžadovalo laboratorní podmínky. Zpřesnění bychom mohli dosáhnout např. potápěním se s lahví do dvou různých hloubek, ve kterých má voda stejnou teplotu.

Úloha V.6 ... experimentování v dešti

Teď už nebude sněžit, a proto můžete pozorovat déšť. Pokuste se změřit objem jedné dešťové kapky. Nezapomeňte si zapsat, kdy to vlastně přelo a jestli déšť přišel ze západu nebo z východu (porovnávejte kvalitu východních a západních dešťů). Např. při pádu padákem lze měřit šuplerou všechny rozměry kapky, ocejchujeme-li si dalekohled, můžeme v něm odhadovat velikost kapek...

Řešení:

Velikost dešťových kapek se dá měřit mnoha metodami, ale v zásadě se metody dají rozdělit na ty, kdy měříme velikost jedné (náhodně odchycené) kapky, a ty, kde nachytáme velké a zhruba známé množství kapek a zjistíme průměrný objem námi zachycené kapky.

Jako ukázkou jsme zvolili metodu z druhé skupiny: Měřili jsme objem vody V , která dopadla na plochu S_1 za dobu t_1 a současně počet kapek N , dopadnuvších na plochu S_2 za dobu t_2 . Je velice dobré si veličiny zvolit tak, aby $S_1 > S_2$ a $t_1 > t_2$. Průměrný objem kapky pak vypočteme ze vztahu

$$V_{\text{kapka}} = \frac{V t_2 S_2}{N t_1 S_1}.$$

Pokus č. 1:

Pardubice, 11.4.1997, mezi 14:55 a 15:00 SELČ, SZ vítr, 5°C

Změřené hodnoty:

$$\begin{aligned} t_1 &= 113 \text{ s}, & S_1 &= 3 \times 23,0 \text{ cm} \times 27,5 \text{ cm} = 1897,5 \text{ cm}^2, & V &= 10,4 \text{ cm}^3, \\ t_2 &= 17,5 \text{ s}, & S_2 &= 13,4 \text{ cm} \times 9,2 \text{ cm} = 123,28 \text{ cm}^2, & N &= 73. \end{aligned}$$

Po dosazení do vzorce získám průměrný objem kapky $V_{\text{kapka}} = 1,43 \text{ mm}^3$.

Odhad chyby měření:

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= 1 \text{ s}, & & 1\%, \\ \Delta S_1 &= 5 \text{ cm}^2, & & 0,2\%, \\ \Delta t_2 &= 0,2 \text{ s}, & & 1\%, \\ \Delta S_2 &= 2 \text{ cm}^2, & & 2\%, \\ \Delta V &= 0,1 \text{ cm}^3, & & 10\%, \\ \Delta N &= \sqrt{N} = 8 \text{ kapek},^2 & & 11\%. \end{aligned}$$

Celková chyba (odmocnina ze součtu kvadrátů): 15%.

Objem kapky: $V_{\text{kapka}} = 1,43 \pm 0,22 \text{ mm}^3$.

Pokusy č. 2, č. 3:

Metoda podobná jako v předchozím, ale položíme $t_1 = t_2$ (počítání kapek v reálném čase).

²Jako chybu veličiny N jsme zvolili \sqrt{N} , což je analogie z jaderné fyziky, kdy např. průlet jedné částice, či rozpad jednoho atomu je jevem náhodným, a až velké množství jednotlivých aktů umožní určit, jaká je intenzita záření nebo rychlost rozpadu izotopu.

Pardubice, 8.5.1997, mezi 15:00 a 16:00 SELČ, bezvětrí

$$\begin{aligned} \text{Změřené hodnoty: } S_1 &= 3 \times 23,0 \text{ cm} \times 27,5 \text{ cm} = 1\,897,5 \text{ cm}^2, & V &= 24,2 \text{ cm}^3, \\ S_2 &= \pi (15 \text{ mm})^2 = 7,07 \text{ cm}^2, & N &= 15. \end{aligned}$$

Objem kapky: $V_{\text{kapka}} = 6,0 \pm 2,0 \text{ mm}^3$.

$$\begin{aligned} \text{Změřené hodnoty: } S_1 &= 3 \times 23,0 \text{ cm} \times 27,5 \text{ cm} = 1\,897,5 \text{ cm}^2, & V &= 13,3 \text{ cm}^3, \\ S_2 &= \pi (54 \text{ mm})^2 = 91,6 \text{ cm}^2, & N &= 85. \end{aligned}$$

Objem kapky: $V_{\text{kapka}} = 7,6 \pm 1,0 \text{ mm}^3$.

Tím, že jsme počítali kapky současně s odběrem vzorku na objem, jsme jednak snížili počet vstupních veličin a také by to mělo odstranit případné změny intenzity deště během těch několika minut. Velká chyba v druhém pokusu je způsobena malým počtem kapek.

Závěr:

Zjistili jsme, že typický rozměr dešťové kapky je několik jednotek mikrolitrů a že se může měnit až o řád mezi různými přeháňkami.

Podobně jako v klasické úloze s měřením výšky budovy, i zde lze vymyslet mnoho dalších metod.

- i) Někteří řešitelé se rozhodli změřit hmotnost několika konkrétních kapek na laboratorních vahách. Když se podařilo zabránit odparu kapek během vlastního vážení, dařilo se obvykle dosáhnout vysoké přesnosti. Snad jen vydělení nesprávnou hustotou (pro jinou teplotu) mohlo nepatrně snížit množství platných číslic ve výsledném objemu.
- ii) Jiné originální měření objemu jednotlivých kapek bylo použito na Slovensku. Za předpokladu, že se do savého papíru vejde konstantní množství vody na jednotku plochy, lze změřit skvrnu po dopadu kapky, a posléze si papír okalibrovat známým množstvím vody.
- iii) „Metoda šmouhy“. Rozměry kapky lze určit nepřímo na základě určení její pádové rychlosti. Za jízdy dopravním prostředkem s průhlednými okny měříme úhly dešťových kapek rozmáznutých po skle vůči horizontále. Tangens tohoto úhlu je poměr rychlosti pádu kapky a rychlosti dopravního prostředku. Pro rychlost kapky by bylo nejvhodnější použít vzorec $F = \frac{1}{2} C S_{\text{kapka}} \rho_{\text{vzduch}} v_{\text{kapka}}^2$, plocha kapky je svázána s objemem přes poloměr, a to za předpokladu kulového tvaru kapky. Rychlost dopravního prostředku zjistíme pohledem na tachometr v případě auta, měřením časů mezi kilometrovíky v případě vlaku a dotazem u pilota v případě letadla. Zdroje chyb jsou následující: sklon vozovky, trati, či leteckého koridoru, vítr unášející kapky bokem a turbulence kolem kabiny.
- iv) Velice piplavé je určování rozměrů šuplerou, přiloženou k již zachycené kapce. Není přesně určitelné, jaký má (bývalá) kapička geometrický tvar. Návrhy sahaly od tenké vrstvičky neměnné tloušťky, přes kulovou úseč, až po polokouli.
- v) Vyfotografování padající kapky společně se škálou naráží na problémy s vysokou pádovou rychlostí, která vyžaduje velmi krátký čas fotografování. Rovněž je dobré použít místo s velkou intenzitou světla a z toho plynoucí velkou hloubkou ostrosti.

Úloha VI.6 ... jak tlustý je papír?

Pokuste se změřit, jak tlustý je list papíru. Aby byly vaše výsledky srovnatelné, měřte papír pocházející ze školního sešitu nelinkovaného.

Řešení:

Vzhledem k tomu, že naprostá většina řešitelů měřila tloušťku papíru klasickým způsobem, to jest metodou přímou pomocí mikrometru nebo jiného, více či méně přesného měřidla, rozhodli jsme se, že uděláme v řešení trochu změnu. Myslíme si totiž, že je docela zbytečné takovou jednoduchou věc přeměřovat, a tak čtenáře seznámíme s výsledky řešitelů a s případnými dalšími metodami měření.

Jak jistě víte, tloušťku papíru lze změřit metodou přímou. Měřit se dá 1 list až N listů,

příčemž počet listů hraje nemalou roli při tomto způsobu měření. Je samozřejmé, že se tím ovlivňuje přesnost měření, a tedy i chyba. Postup je velice jednoduchý. Vezmeme sešit, odstraníme desky, pokusíme se tak trochu vytlačit vzduch nacházející se mezi jednotlivými listy a hurá, můžeme měřit. Změříme tedy výšku stohu papíru, nejlépe na více místech a vícekrát. Výsledek pak dělíme počtem papírů. Nesmíme však zapomínat na to, že papír se nám při měření tlakem měřidla deformuje, čímž jsou výsledky zkreslené. S tím si můžeme poradit tak, že jednoduše dáme papíry mezi dvě podložky, které už tak snadno zdeformovat nejde. Tloušťku těchto podložek pak odečteme od výsledného měření.

Další takovou docela jednoduchou metodou je metoda objemová. Pomocí odměrného válce naplněného kapalinou změříme objem papírového listu. Pak už jen změříme dvě delší strany papírového kvádru a tloušťka listu je na světě. Měření provádíme několikrát, to kvůli přesnosti.

Objevilo se i velmi zajímavé řešení tohoto problému. Nazvěme ho kapková metoda. Ta spočívá v tom, že pomocí pipety kápneme kapku o známém objemu na sklíčko, na kterém se nachází papír. Tento papír je však mírně poupraven, a to tak, že je uprostřed něj vystřižený otvor, uvnitř kterého se nachází již zmíněná kapka. To vše se velmi opatrně přikryje dalším sklíčkem a dává se pozor, aby se zdeformovaná kapka nevsála do papíru. Ta se totiž zmáčkne až na úroveň tloušťky papíru. Nezbývá nic jiného, než změřit průměr kapky (kruh) a z toho, že kapka má nyní tvar válce (výška je právě ta hledaná tloušťka papíru) a známého objemu snadno spočteme to, co potřebujeme. Toto měření vyžaduje poměrně velkou přesnost a chuť si vyhrát. Problém je totiž v tom, že pipeta není moc vhodná na takovýto pokus a to z toho důvodu, že kapka by měla mít malý objem (to abychom nemuseli brát velký kus papíru), což se pipetou velmi těžce dosahuje. Ale určitě existuje něco jiného, mnohem přesnějšího, čím se dá dosáhnout toho, že daná kapka bude mít daný objem.

A teď něco statistiky. Zde jsou uvedeny hodnoty, které naměřili řešitelé, pro jednotlivé druhy sešitů:

Brněnské papírny:

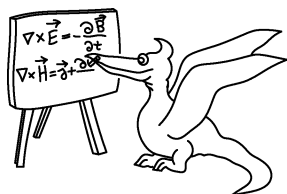
Sešit typu PT 440	$d = 80 \mu\text{m}$
Sešit typu PT 540	$d = 77 \mu\text{m}$
Sešit typu M 520	$d = 92 \mu\text{m}$
Sešit typu PN 2-260-94	$d = 70 \mu\text{m}$
Sešit typu PN 2-100-96	$d = 69 \mu\text{m}$
Sešit typu PT 560	$d = 83 \mu\text{m}$
Sešit typu PT 460	$d = 81 \mu\text{m}$

Slovensko-Slavošické papírny: $d = 73 \mu\text{m}$

Neuvedený výrobce: $d = 75 \mu\text{m}$

Tedy celkově vychází v průměru na Českou republiku tloušťka papíru ve školních sešitech na $77,5 \mu\text{m}$. Jak je vidět, Slovenská republika má papíry asi o $5 \mu\text{m}$ tenčí.

A ještě jeden postřeh: přehnete-li papír celkem 42 krát, dostanete stejnou výšku tohoto papíru jako je vzdálenost Země–Měsíc.



Seriál o astronomii

Předmluva

Námětem letošního Seriálu na pokračování byla astronomie a astrofyzika. Nechtěli jsme podat ucelený přehled vědomostí těchto oborů, ale zaměřili jsme se pouze na několik dílčích témat. Po úvodní kapitole, která je věnovaná základním veličinám a pojmům potřebných v dalších částech, se zmíníme o předpovídání poloh planet z Keplerových zákonů a o některých dalších problémech nebeské mechaniky. Pak následují kapitoly o tom, proč svítí hvězdy, a nástin tvorby modelů hvězd.

Kapitola 1

V této úvodní kapitole ještě nepůjde o žádnou fyziku. Věnujeme ji zavedení některých pojmů a veličin běžně v astronomii používaných.

Délkové míry užívané v astronomii jsou tři: astronomická jednotka, světelný rok a parsek. **Astronomická jednotka (AU)**, střední vzdálenost Země od Slunce, slouží především k popisu dějů ve Sluneční soustavě. Její velikost je $1 \text{ AU} = 1,495\,978\,706(2) \cdot 10^{11} \text{ m}$. **Světelný rok (ly – light year)** je vzdálenost, kterou světlo urazí za jeden rok, takže $1 \text{ ly} = 9,461 \cdot 10^{15} \text{ m} = 63\,232,68 \text{ AU}$. **Parsekem (pc)** se označuje vzdálenost, ze které by bylo vidět kolmo postavenou úsečku délky 1 AU pod úhlem jedné obloukové vteřiny: $1 \text{ pc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3,262 \text{ ly} = 206\,265 \text{ AU}$.

Jasnosti hvězd se v astronomii udávají v tzv. **hvězdných velikostech**, neboli **magnitudách**. Tento pojem používali již staří Řekové – rozdělili hvězdy viditelné okem do šesti skupin. Nejjasnější byly první hvězdné velikosti, ty na hranici viditelnosti pak šesté. Ve snaze přibližně zachovat toto rozdělení zavedl Pogson v 19. století zdánlivou hvězdnou magnitudu vztahem

$$m_A - m_B = -2,5 \log(\Phi_A / \Phi_B), \quad (\text{S.1})$$

kde m_A, m_B jsou zdánlivé hvězdné velikosti dvou hvězd, Φ_A, Φ_B jsou odpovídající zářivé toky plochou jednoho čtverečního metru postaveného kolmo na směr k hvězdě a funkcí log je míněn dekadický logaritmus. Tento vztah (tzv. **Pogsonova rovnice**) nedefinuje pojem zdánlivé magnitudy úplně. Musíme ještě zadat magnitudu nějaké referenční hvězdy (dříve to byla Polárka, jenže později přesnější měření ukázala, že nepatrně svoji jasnost mění). Přívlastek zdánlivá vyjadřuje fakt, že se jedná o jasnosti měřené ze Země. Pro srovnání jsou v tabulce uvedeny zdánlivé magnitudy některých objektů.

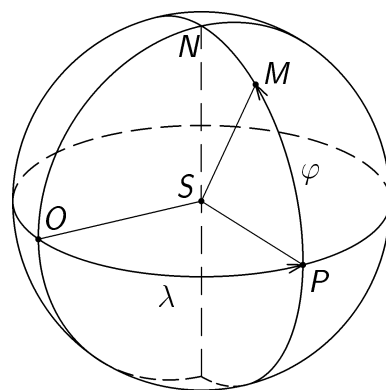
Zdánlivé jasnosti některých objektů na obloze

Magnituda	Objekt na obloze
–26,7	Slunce
–12	Měsíc v úplňku
0,0	Vega
6	hvězdy na hranici viditelnosti okem
29	nejslabší hvězdy pozorovatelné Hubbleovým teleskopem

Zavádí se ještě pojem **absolutní magnitudy (M)**, což je jasnost, kterou by daný objekt měl ve vzdálenosti 10 pc od Země. Vztah mezi touto veličinou a zdánlivou magnitudou snadno dostaneme, uvědomíme-li si, že zářivý tok klesá se čtvercem vzdálenosti od zdroje.

Ještě si povíme něco o tom, jak astronomové udávají polohu těles na obloze. Všechny astronomické objekty jsou velmi daleko, a tak nevnímáme jejich vzdálenost. Můžeme si představit, že se promítají na zdánlivou nebeskou sféru, v jejímž středu se nacházíme. Pro popis polohy objektu na kouli si vystačíme se dvěma úhly, například polohu na zemském glóbu udáváme pomocí zeměpisné délky a šířky. Tato souřadná síť je definována jednou orientovanou rovinou procházející středem sféry (rovinou zemského rovníku a určení směru k severnímu pólu N) a bodem O na rovníku, který určuje nultý poledník a tím i místo, odkud odečítáme zeměpisnou délku. Konvence se volí většinou taková, že kladný směr zeměpisné délky (a příslušných úhlů v jiných souřadných systémech) se jeví ze severního pólu proti směru chodu hodinových ručiček. Máme-li určit souřadnice bodu M , provedeme to takto: bodem M vedeme poledník (tj. rovinu SNM), najdeme průsečík P tohoto poledníku s rovníkem, přičemž vybereme ten, do kterého se můžeme dostat z bodu M bez toho, abychom prošli severním nebo jižním pólem; zeměpisná šířka φ je pak $\angle MSP$ (vezmeme jej kladně, pokud M leží na severní polokouli) a zeměpisná délka λ $\angle OSP$ (viz obr. 77).

V astronomii potřebujeme takový souřadnicový systém, aby v něm polohy hvězd pokud možno co nejméně závisely na čase. Tento požadavek splňují například tyto dvě roviny – rovina **ekliptiky**, tj. rovina oběhu Země kolem Slunce (pohyb v radiálním gravitačním poli se vždy děje v rovině) a rovina zemského rovníku. Rovina rovníku však není v prostoru stabilní – Země, obrovský setrvačnick, vykonává precesní pohyb (tj. osa rotace se pohybuje po plášti kužele). Doba jednoho oběhu osy po plášti kužele trvá 26 000 let, a tak je změna rovníkových a ekliptikálních souřadnic (viz dále) jen velmi malá. Průsečík ekliptiky a roviny rovníku definuje přímku, která protíná nebeskou sféru ve dvou bodech, tzv. **jarní a podzimní bod**. Jarní bod odpovídá místu na obloze, kde se Slunce nachází v den jarní rovnodennosti a podzimní bod poloze Slunce v den podzimní rovnodennosti.



Obr. 77

Rovina ekliptiky je základní rovinou **ekliptikálních souřadnic**. Ekliptika nám rozděljuje prostor na dva podprostory. Kladný směr (tj. směr k severnímu pólu ekliptiky) leží v tom podprostoru, do kterého míří severní pól Země. „Nultý poledník“ je dán jarním bodem (což odpovídá bodu O na obr. 77). Odpovídající souřadnice se nazývají ekliptikální délka a šířka.

V astronomii nejužívanější **rovníkové souřadnice** jsou dány rovinou zemského rovníku orientovanou k severnímu pólu a jarním bodem. Analog zeměpisné délky se nazývá rektascenze α (může se udávat ve stupních, ale nejčastěji se udává v hodinové míře, 24 hodin odpovídá 360°). Obdobou zeměpisné šířky je **deklinace** δ , udávaná ve stupních.

Úloha S.I ... Na procvičení pojmu hvězdné velikosti

- Jaká je absolutní magnituda Slunce M , je-li jeho zdánlivá magnituda $m = -26,74$?
- Složky dvojhvězdy Castor v souhvězdí Blíženců jsou v dalekohledu jasné $m_A = 2,0$ a $m_B = 2,9$. Neozbrojené lidské oko však tyto hvězdy nerozliší. Jak jasná se jeví tato dvojhvězda při pozorování pouhým okem?
- V jaké poloze na své dráze se jeví Venuše ze Země nejjasnější? Předpokládejte, že Venuše obíhá kolem Slunce přibližně po kružnici s poloměrem $r = 0,7233$ AU a že jasnost v celé viditelné a osvětlené části povrchu Venuše je konstantní. U těch, co neumějí derivovat, se spokojíme s numerickou hodnotou vzdálenosti Venuše od Země; nakreslete si graf závislosti jasnosti Venuše na vzdálenosti a odečtěte z něj polohu největší jasnosti.
- Pokuste se odhadnout jasnost Venuše v poloze, kdy je na obloze od Slunce úhlově nejdál. Albedo Venuše (tj. poměr odražené ku dopadající intenzitě záření) je 0,76 a její po-

loměr $R_V = 6\,052$ km. Předpokládejte, že záření odražené od Venuše se rovnoměrně rozptýlí do celého poloprostoru a že jasnost každého světlého místa viditelného povrchu bude, jako by Slunce bylo právě nad ním.

e) Určete, v jaké největší a nejmenší výšce nad obzorem se v naší zeměpisné šířce nachází Slunce během roku. Rovina ekliptiky s rovinou zemského rovníku svírá úhel $23,5^\circ$.

Řešení:

a) Budeme-li se na Slunce dívat ze vzdálenosti 10 pc, bude poměr světelného toku Φ_{10} k světelnému toku Φ z normální vzdálenosti r roven poměru druhých mocnin vzdáleností

$$\Phi_{10}/\Phi = (r/10)^2,$$

kde r je vyjádřeno v parsecích. Dosazením do Pogsonovy rovnice (S.1) dostaneme

$$M - m = -2,5 \log \left(\frac{r}{10} \right)^2 = -5 \log \frac{r}{10} = 5 - 5 \log r. \quad (\text{S.2})$$

Číselně pak $M = 4,83$.

b) Protože oko dvojhvězdu nerozliší, vnímá ji jako jeden objekt o celkovém světelném toku

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B,$$

kde toky Φ_A, Φ_B odpovídají jednotlivým složkám dvojhvězdy. Z Pogsonovy rovnice (S.1) obdržíme pro celkovou jasnost objektu m vztah

$$m - m_A = -2,5 \log \frac{\Phi}{\Phi_A} = -2,5 \log \left(1 + \frac{\Phi_B}{\Phi_A} \right).$$

Poměr Φ_B/Φ_A získáme opět z Pogsonovy rovnice

$$m_B - m_A = -2,5 \log \frac{\Phi_B}{\Phi_A}, \quad \text{neboli} \quad \frac{\Phi_B}{\Phi_A} = 10^{0,4(m_A - m_B)}.$$

Pro celkovou jasnost dvojhvězdy tak dostáváme

$$m = m_A - 2,5 \log \left(1 + 10^{0,4(m_A - m_B)} \right) = -2,5 \log \left(10^{-0,4m_A} + 10^{-0,4m_B} \right).$$

Číselně $m = 1,6$.

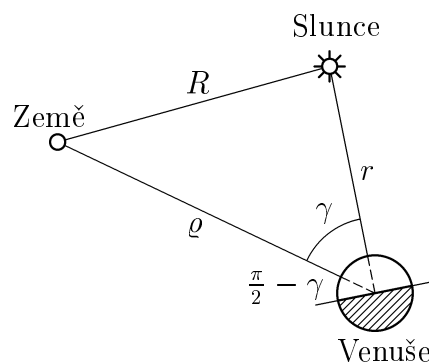
c) Prostým okem vnímáme na obloze Venuši jako bodový objekt. Jeho jasnost je určena celkovým zářivým tokem Φ dopadajícím na Zem od všech částí viditelného osvětleného povrchu Venuše. Podle návodu k úloze budeme předpokládat jasnost viditelného povrchu za konstantní, tj.

$$\Phi \sim \frac{S}{\rho^2},$$

kde S je plocha viditelné osvětlené části Venuše (přesněji její projekce při pohledu ze Země) a ρ je vzdálenost Venuše od Země. Tento předpoklad nemusí být zase tak špatný, při pohledu dalekohledem vypadá osvětlená část Venuše skutečně stejně jasná.

Hranice světla a stínu vymezuje na povrchu Venuše kružnici. Tu vidíme ze Země pod úhlem $\frac{\pi}{2} - \gamma$, kde γ je úhel Slunce–Venuše–Země (viz obr. 78). Proto jsou rozměry kružnice v jednom směru zkráceny

$$\left| \sin \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \right| = |\cos \gamma| \text{ krát.}$$



Obr. 78

Její plocha pak je

$$S_O = |\cos \gamma| \pi R_V^2,$$

kde R_V představuje poloměr Venuše. Můžeme tak psát

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \pi R_V^2 + \frac{1}{2} S_O, & \text{pro } \gamma < \frac{\pi}{2}, \\ S &= \frac{1}{2} \pi R_V^2 - \frac{1}{2} S_O, & \text{pro } \gamma > \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Celkově tedy

$$S = \frac{1}{2} \pi R_V^2 (1 + \cos \gamma).$$

Velikost úhlu γ vyjádříme z kosinové věty

$$\cos \gamma = \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2\rho r}.$$

Pro celkový tok Φ dopadající na Zem tak dostáváme

$$\Phi \sim \frac{1 + \cos \gamma}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2\rho^3 r}.$$

Vzdálenost ρ_0 , ve které je Venuše nejjasnější, teď můžeme určit buď z grafu a nebo pomocí diferenciálního počtu. Derivace toku Φ podle vzdálenosti ρ musí být v místě maxima nulová

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{3R^2 - \rho^2 - 3r^2 - 4\rho r}{2\rho^4 r}, \text{ takže } 3R^2 - \rho_0^2 - 3r^2 - 4\rho_0 r = 0.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice (a po zamítnutí záporného kořenu) nakonec dostáváme

$$\rho_0 = \sqrt{3R^2 + r^2} - 2r.$$

Ještě bychom pomocí druhé derivace měli ověřit, že se jedná skutečně o maximum. To už ale necháme na vás.

Číselná hodnota $\rho_0 = 0,43$ AU kupodivu docela přesně odpovídá skutečnosti.

d) Je-li Venuše na obloze od Slunce úhlově nejvzdálenější, jeví se na obloze v 1. nebo 3. čtvrti, neboli úhel Slunce–Venuše–Země je pravý. Tok Φ_V dopadající na Zemi bude úměrný albedu a , slunečnímu toku $W(r)$ ve vzdálenosti r od Slunce, osvětlené, ze Země viditelné, ploše S a nepřímo úměrný povrchu polokoule $2\pi\rho^2$ o poloměru ρ rovném vzdálenosti Venuše od Země (což odpovídá předpokladu, že se odražené sluneční světlo rovnoměrně rozptýlí do celého poloprostoru).

Osvětlená, ze Země viditelná, část povrchu má z pohledu Slunce plochu

$$S_1 = \frac{1}{2} \pi R_V^2.$$

Podle návodu k úloze bychom naopak měli za plochu S dosadit

$$S_2 = \frac{1}{4} 4\pi R_V^2 = \pi R_V^2.$$

Z hlediska reality je první model přesnější, neboť $S_1 W(r)$ představuje energii, která dopadne na viditelnou část Venuše. Ani tento model však není dokonalý, protože se záření rozptyluje do většího prostorového úhlu než 2π . Samozřejmě i řešení s $S = S_2$ jsme ohodnotili plným počtem bodů.

Celkově máme pro tok dopadající na Zemi z Venuše

$$\Phi_V = \frac{SaW(r)}{2\pi\rho^2},$$

přičemž z Pythagorovy věty je $\rho^2 = R^2 - r^2$. Použitím Pogsonovy rovnice pro jasnost Venuše m_V a Slunce m_\odot dostáváme

$$m_V - m_\odot = -2.5 \log \frac{\Phi_V}{W(R)},$$

kde $W(R)$ je sluneční světelný tok dopadající na Zem, takže

$$\frac{W(r)}{W(R)} = \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Po dosazení do Pogsonovy rovnice nakonec obdržíme

$$m_V = m_\odot - 2.5 \log \frac{1}{2\pi} \frac{S}{R^2 - r^2} \frac{R^2}{r^2} a.$$

Číselná hodnota pro $S = S_1$ vyjde $m_V = -4,5$, což zase kupodivu skoro koresponduje se skutečností.

e) Rovina rovníku svírá s rovinou horizontu úhel $90^\circ - \phi$, kde ϕ je zeměpisná šířka. Rovina ekliptiky svírá s rovníkem úhel $\varepsilon = 23,5^\circ$. Na obloze se tedy jeví jako kružnice, která s rovníkem svírá tentýž úhel ε . Slunce během roku opíše na obloze celou ekliptiku. V den letního slunovratu je nad rovníkem právě ve výšce ε , takže se v pravé poledne nachází nad horizontem nejvýše a to v

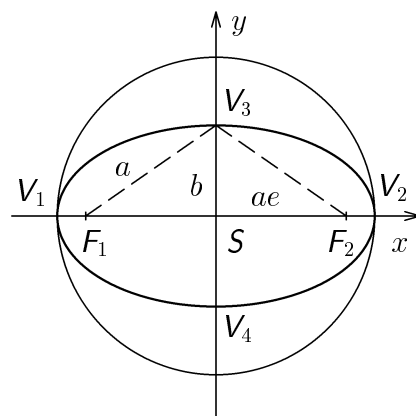
$$h_{max} = 90^\circ - \phi + \varepsilon$$

(číselně pro $\phi = 50^\circ$ je $h_{max} = 63,5^\circ$). Druhá část úlohy je chyták. Nejmenší možná výška Slunce **nad** obzorem je 0° (v této poloze se alespoň v našich zeměpisných šířkách nachází během dne hned dvakrát). Nejnižší pod obzorem se Slunce nachází o půlnoci zimního slunovratu a to je $h_{min} = -63,5^\circ$.

Kapitola 2

V této kapitole se naučíme počítat polohy planet pomocí Keplerových zákonů (KZ). První KZ říká, že se planety pohybují po elipsách, v jejichž jednom ohnisku se nachází Slunce. V následujícím odstavci jsou proto shrnuty základní poznatky o elipse.

Elipsa je útvar, který vznikne projekcí kružnice do roviny. V rovině existuje právě jedna přímka (tzv. **hlavní osa**) procházející středem elipsy S , která vytne na elipse úsek délky $2a$, kde a značí poloměr původní kružnice. Na obr. 79 jsme ji ztotožnili s osou x . Naopak osa y ze všech výše zmíněných přímek vytne na elipse úsek nejmenší (tzv. **vedlejší osa**). Délku tohoto úseku označme $2b$. Protože elipsa vznikla projekcí, jsou všechny vzdálenosti oproti původním ve směru osy x nezměněny a ve směru osy y zmenšeny v poměru b/a . Z tohoto faktu plynou dvě důležité věci: rovnice elipsy a vztah pro plochu elipsy S_E . Rovnice kružnice vypadá takto: $x^2 + y^2 = a^2$, což vyjadřuje, že kružnice je množina bodů, které mají od středu (umístěného v počátku souřadného systému) stejnou



Obr. 79

vzdálenost a . Tuto rovnici přepíšeme do tvaru $y^2 = a^2 - x^2$. Protože jsou všechny rozměry ve směru osy y zmenšeny, bude mít rovnice elipsy na obr. 79 tvar $y^2 = (b/a)^2(a^2 - x^2)$, neboli

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Kružnici si můžeme přestavit jakoby složenou ze spousty obdélníků namířených ve směru osy y . Po projekci se plocha těchto obdélníků (a tím i plocha kružnice S_O) zmenší v poměru b/a , takže $S_E = (b/a)S_O = \pi ab$.

Zavedeme některé důležité pojmy. Vzđálenost a nazýváme **délkou hlavní poloosy** a b **délkou vedlejší poloosy**. Body F_1 a F_2 nalézající se na hlavní ose ve vzdálenosti a od vedlejších vrcholů V_3 a V_4 se nazývají **ohniska** elipsy. Můžete si zkusit dokázat, že body ležící na elipse mají součet vzdáleností od obou ohnisek konstantní a rovný právě $2a$. **Excentricita** elipsy e je definována vztahem

$$e = |SF_1|/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a \quad (\text{S.3})$$

a charakterizuje míru zploštění elipsy (na obrázcích je vyznačena délková hodnota excentricity $|SF_1|$, pro potřeby výpočtů se používá bezrozměrné e). Pro kružnici je $e = 0$ a čím je elipsa protáhlejší, tím víc se e blíží k jedničce.

Pusťme se do počítání poloh planet. Zákon popisující rychlost oběhu planet kolem Slunce je právě druhý KZ. Podle něj opíše průvodič, což je úsečka spojující Slunce a planetu, za jednotku času vždy stejnou plochu. Nechť se planeta nejprve nachází v periheliu (tj. nejbliže Slunci – na obr. 80 bod V). Za dobu t se posune do místa P . Předpovědět polohu planety znamená pro dané t určit úhel $\angle VFP$ (tzv. **pravá anomálie** v – *ypsilon*). Za dobu jednoho oběhu T opíše průvodič plochu $S_E = \pi ab$. Z druhého KZ pak plyne, že za dobu t opíše plochu

$$S_{VFP} = t(S_E/T) = \pi ab(t/T).$$

Pokud by se planeta pohybovala po kružnici, otočila by se za čas t o úhel M (tzv. **střední anomálie**) vyjádřený v radiánech

$$M = 2\pi(t/T). \quad (\text{S.4})$$

Plochu opsanou průvodičem za dobu t tak můžeme vyjádřit ve tvaru

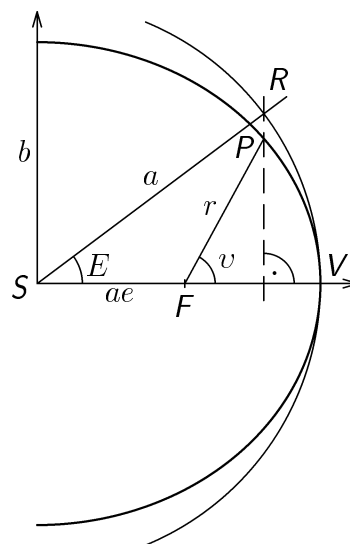
$$S_{VFP} = \frac{1}{2}abM. \quad (\text{S.5})$$

Zbývá nám už jenom určit velikost plochy S_{VFP} jako funkci úhlu v . Útvar VFP vznikne projekcí útvaru VFR . Plochu tohoto útvaru vyjádříme jednoduše pomocí úhlu $\angle VSR$ (tzv. **excentrická anomálie** E)

$$S_{VFR} = S_{VSR} - S_{\Delta RSF} = \pi a^2 \frac{E}{2\pi} - \frac{1}{2}a(ae \sin E),$$

kde excentrickou anomálii E udáváme v radiánech! Protože $S_{VFP} = (b/a)S_{VFR}$ bude pro E po dosazení do (S.5) platit

$$\pi ab \frac{E}{2\pi} - \frac{1}{2}abe \sin E = \frac{1}{2}abM.$$



Obr. 80

Po vykrácení výrazem $\frac{1}{2}ab$ tak dostáváme slavnou **Keplerovu rovnici**

$$E - e \sin E = M. \quad (\text{S.6})$$

Bohužel, z této rovnice nemůžeme vyjádřit E přímo jako funkci M a e . Abychom ji vyřešili, budeme muset použít nějakou numerickou metodu. V tomto případě je snad nejjednodušší iterační metoda. V prvním kroku zvolíme $E_1 = M$. Posloupnost čísel E_k , která se pro rostoucí k blíží k řešení Keplerovy rovnice je pak dána rekurentním vztahem

$$E_{k+1} = M + e \sin E_k. \quad (\text{S.7})$$

Teď už stačí jen najít vztah mezi pravou a excentrickou anomálií. Z obr. 80 plyne

$$r \sin v = \frac{b}{a} \sin E, \quad r \cos v = a \cos E - ae, \quad (\text{S.8})$$

kde r je délka průvodiče. Sečtením kvadrátů předchozí dvojice rovnic obdržíme

$$r^2 = r^2 \sin^2 v + r^2 \cos^2 v = b^2 \sin^2 E + a^2 \cos^2 E - 2a^2 e \cos E + a^2 e^2.$$

Vedlejší poloosu vyjádříme ze vztahu (S.3)

$$r = a\sqrt{(1 - e^2) \sin^2 E + \cos^2 E - 2e \cos E + e^2} = a\sqrt{1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E},$$

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (\text{S.9})$$

Pro $\text{tg} \frac{v}{2}$ dostaneme užitím goniometrických vzorců z (S.8) a (S.9)

$$\text{tg} \frac{v}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}} = \pm \sqrt{\frac{r - a \cos E + ae}{r + a \cos E - ae}},$$

$$\text{tg} \frac{v}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - e \cos E - \cos E + e}{1 - e \cos E + \cos E - e}} = \pm \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \sqrt{\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}},$$

neboli

$$\text{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \text{tg} \frac{E}{2}. \quad (\text{S.10})$$

Zrekapitulujme si celý postup ještě jednou. Parametry popisující dráhu planety jsou: velká poloosa elipsy a , excentricita e elipsy a doba oběhu planety T . Pro daný čas t vypočteme z (S.4) střední anomálii M . Vyřešením Keplerovy rovnice (S.6) získáme excentrickou anomálii E a ze vztahů (S.9) a (S.10) konečně vypočteme vzdálenost planety od Slunce r a pravou anomálii v . Samozřejmě, že ještě nemůžeme říct nic o poloze planety na obloze. Abychom to dokázali, musíme specifikovat umístění roviny oběhu planety v prostoru (např. vzhledem k jarnímu bodu), ale o tom až příště.

Úloha S . II ... oběžná dráha Země kolem Slunce

Určete pravou anomálii a vzdálenost Země od Slunce po $\frac{1}{4}$ oběžné doby Země kolem Slunce od průchodu Země periheliem. Velká poloosa je $a = 1 \text{ AU}$ a excentricita $e = 0,0167$.

Řešení:

Ze vztahu (S.4) vypočteme nejprve střední anomálii. Jelikož $t = \frac{1}{4}T$, je $M = \pi/2$. Nyní je potřeba vyřešit Keplerovu rovnici (S.6). K tomu použijeme iterační metodu. V prvním kroku zvolíme $E_1 = M$. E_2 pak vypočteme ze vztahu $E_2 = M + e \sin E_1$ (viz (S.7)). Dále pak postupujeme analogicky. Na začátku si ještě musíme uvědomit, na kolik desetinných míst je

potřeba výpočet provádět. Obecně je to dáno přesností vstupních veličin, v našem případě excentricitou zadanou na čtyři desetinná místa, takže bude stačit řešit Keplerovu rovnici s přesností asi o řád větší. V rámci této přesnosti dostáváme hodnotu excentrické anomálie již v druhém kroku

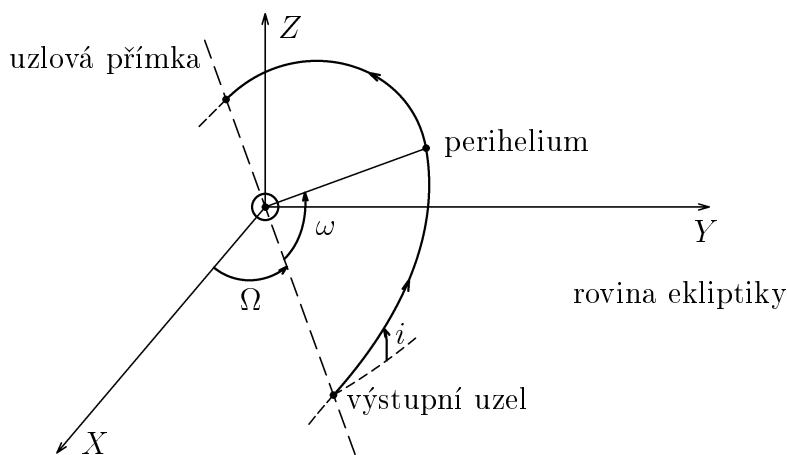
$$E_1 = M = 1,57080, \quad E_2 = 1,58750, \quad E_3 = 1,58750.$$

Ze vztahů (S.9) a (S.10) pak prostým dosazením dospějeme k číselným hodnotám vzdálenosti r Země od Slunce a pravé anomálie v

$$r = 1,000279 \text{ AU}, \quad v = 91^\circ 54,8'.$$

Kapitola 3

V této kapitole se budeme věnovat předpovědi poloh planet na obloze. Pomocí tří čísel (velké poloosy a , excentricity e a okamžiku t_0 průchodu planety periheliem) už umíme určit polohu planety v rovině jejího oběhu. (Čtvrtou potřebnou veličinu, oběžnou dobu T , vypočteme z III. Keplerova zákona). Abychom mohli určit ekliptikální souřadnice planety, musíme nějak zadat umístění roviny oběhu planety vzhledem k ekliptice a jarnímu bodu γ . K tomu slouží tři úhly (viz. obr. 81). **Sklon dráhy** i je úhel, který svírá ekliptika s rovinou oběhu. Tato rovina protne ekliptiku v tzv. uzlové přímce. Bod, kde planeta vystupuje nad ekliptiku (tj. do severního poloprostoru) se nazývá **výstupní uzel**. **Délka výstupního uzlu** Ω je úhel svíraný směrem k jarnímu bodu a směrem k výstupnímu uzlu. Tyto dva úhly popisují polohu roviny oběhu. Ještě musíme zadat polohu perihelia, k čemuž slouží **argument perihelia** ω – úhel mezi směrem k periheliu a směrem k výstupnímu uzlu. Šest parametrů a , e , t_0 , i , Ω , ω plně určuje pohyb planety a nazývají se **elementy dráhy**.

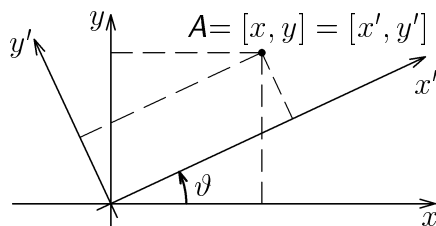


Obr. 81

Na obr. 81 jsme zavedli kartézské souřadnice X, Y, Z se středem ve Slunci \odot . Osu X jsme ztotožnili se směrem k jarnímu bodu γ a rovinu XY s ekliptikou. Zavedeme ještě další pravotočivé kartézské souřadnice x, y, z tak, že ve středu je opět Slunce, osa x směřuje do perihelia a rovina xy odpovídá rovině oběhu planety. Z předchozí kapitoly už umíme vypočítat polohu planety v této souřadné soustavě

$$\begin{aligned} x &= r \cos v, \\ y &= r \sin v, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Celý další postup bude spočívat v tom, jak souřadnice planety $[x, y, z]$ převést do souřadnic $[X, Y, Z]$. K tomu budeme potřebovat vědět, jak od pravoúhlých souřadnic x, y přejít k souřadnicím x', y' , které jsou otočeny vzhledem k původním o úhel ϑ (viz obr. 82).



Obr. 82

Není na tom nic těžkého (je to jenom geometrie), a tak odvození následujících vztahů nechám na vás

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \\y' &= -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Nejprve naši soustavu x, y, z pootočíme kolem osy z o úhel $-\omega$. Tím ztotožníme osu x_1 s uzlovou přímkou

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cos(-\omega) + y \sin(-\omega) = x \cos \omega - y \sin \omega, \\y_1 &= -x \sin(-\omega) + y \cos(-\omega) = x \sin \omega + y \cos \omega, \\z_1 &= z = 0.\end{aligned}\tag{S.11}$$

Otočením kolem osy x_1 o úhel $-i$ ztotožníme rovinu x_2y_2 s ekliptikou

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1, \\y_2 &= y_1 \cos(-i) + z_1 \sin(-i) = y_1 \cos i, \\z_2 &= -y_1 \sin(-i) + z_1 \cos(-i) = y_1 \sin i.\end{aligned}\tag{S.12}$$

A otočením o úhel $-\Omega$ kolem osy z_2 ztotožníme osu x_3 se směrem k jarnímu bodu, čímž přejdeme k souřadnicím X, Y, Z

$$\begin{aligned}X &= x_3 = x_2 \cos(-\Omega) + y_2 \sin(-\Omega) = x_2 \cos \Omega - y_2 \sin \Omega, \\Y &= y_3 = -x_2 \sin(-\Omega) + y_2 \cos(-\Omega) = x_2 \sin \Omega + y_2 \cos \Omega, \\Z &= z_3 = z_2.\end{aligned}\tag{S.13}$$

Tím jsme obdrželi souřadnice planety vzhledem ke Slunci. Stejným způsobem spočteme souřadnice Země $[X_Z, Y_Z, Z_Z]$. Souřadnice $[X_0, Y_0, Z_0]$ planety vzhledem k Zemi jsou pak

$$\begin{aligned}X_0 &= X - X_Z, \\Y_0 &= Y - Y_Z, \\Z_0 &= Z - Z_Z.\end{aligned}$$

Převést tyto pravoúhlé souřadnice na ekliptikální délku λ a šířku β je už maličkost. Ze zavedení těchto úhlů (viz. 1. kapitola) plyne

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}}, \\ \cos \lambda &= \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}, \\ \sin \lambda &= \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}.\end{aligned}\tag{S.14}$$

V dnešní době se nejčastěji používají rovníkové souřadnice. Příslušné kartézské souřadnice X_0^R, Y_0^R, Z_0^R obdržíme otočením souřadnic X_0, Y_0, Z_0 o úhel $-\varepsilon$ kolem osy X_0 . Velikost

pootočení je dána úhlem ε , který svírá rovník s ekliptikou, směr pak tím, že Slunce v den jarní rovnodennosti vystupuje nad rovník (tj. severně od rovníku). Kartézské souřadnice X_0^R , Y_0^R , Z_0^R převedeme na rovníkové podobně, jako tomu bylo v případě ekliptikálních souřadnic.

Na konec ještě dvě poznámky. Celá mašinerie elementů dráhy jde pochopitelně použít na jakékoliv těleso obíhající kolem Slunce (planetky, komety, ...). Druhá pak je, že elementy dráhy, díky precesi zemské osy (viz 2. kapitola) a díky gravitačnímu působení ostatních planet, závisí na čase. Proto se uvádí epocha (rok), ke které jsou elementy dráhy vztaženy.

Úloha S.III ... Venuše

Spočtete ekliptikální a rovníkové souřadnice Venuše pro 24.8.1988 v 0^h UT (světový čas). Pro tento den určete vzdálenost Venuše od Země a máte-li doma nějakou hvězdnou mapu, určete také souhvězdí, ve kterém se Venuše nachází. Elementy drah Venuše a Země jsou

$$\begin{aligned} a_V &= 0,72333 \text{ AU}, & e_V &= 0,00679, & i_V &= 3,3949^\circ, & \Omega_V &= 76,7112^\circ, & \omega_V &= 55,0804^\circ, \\ a_Z &= 1,00000 \text{ AU}, & e_Z &= 0,01673, & i_Z &= 0,0014^\circ, & \Omega_Z &= 352,2647^\circ, & \omega_Z &= 110,6756^\circ. \end{aligned}$$

Oběžná doba Země kolem Slunce je $T_Z = 365,2571$ dne. Údaj o okamžiku průchodu planet periheliem je nahrazen zadáním středních anomálií Venuše M_0^V a Země M_0^Z pro 18.7.1988 v 0^h UT

$$M_0^V = 186,0712^\circ \quad M_0^Z = 193,2434^\circ.$$

Při řešení nepoužívejte žádné vztahy vyčtené z knih o astronomii.

Řešení:

Postup řešení je popsán právě ve 3. kapitole. Popíšeme zde jen stručně jeho nejproblémovější místa.

Podle vztahu (S.4) se střední anomálie M vyjádřená v **radiánech** v čase t rovná

$$M = 2\pi(t - t_p)/T,$$

kde T je oběžná doba dané planety a t_p je okamžik průchodu periheliem. Ze zadané hodnoty M_0 v čase $t_0 = 18.7.1988$ vyjádříme neznámou dobu průchodu periheliem t_p . Nakonec pro M_1 dostaneme

$$M_1 = 2\pi \frac{\Delta t}{T} + M_0,$$

kde $\Delta t = t_1 - t_0$ (v našem případě $\Delta t = 37$ dní). Ještě potřebujeme znát oběžnou dobu T_V Venuše. Tu však hravě získáme z III. Keplerova zákona

$$T_V = T_Z \left(\frac{a_V}{a_Z} \right)^{\frac{2}{3}},$$

číselně pak $T_V = 224,7002$ dne. Pro střední anomálie Země M_Z a Venuše M_V nakonec dostaneme tyto hodnoty

$$M_V = 4,282169 \text{ rad}, \quad M_Z = 4,009211 \text{ rad}.$$

Dalším krokem pak bylo spočítat pravoúhlé souřadnice (x, y, z) těchto planet v rovině jejich oběhu. Této problematice byla věnována 2. kapitola. Číselné hodnoty jsou

$$\begin{aligned} x_V &= -0,3106310 \text{ AU}, & x_Z &= -0,6729527 \text{ AU}, \\ y_V &= -0,6555319 \text{ AU}, & y_Z &= -0,7544617 \text{ AU}, \\ z_V &= 0,0000000 \text{ AU}, & z_Z &= 0,0000000 \text{ AU}. \end{aligned}$$

Potom následuje série otočení daných vztahy (S.11), (S.12) a (S.13) z 3. kapitoly seriálu. Jejich výsledkem je

$$\begin{aligned} X_V &= +0,6946958 \text{ AU}, & X_Z &= +0,8859994 \text{ AU}, \\ Y_V &= +0,2055145 \text{ AU}, & Y_Z &= -0,4869115 \text{ AU}, \\ Z_V &= -0,0373047 \text{ AU}, & Z_Z &= -0,0000088 \text{ AU}. \end{aligned}$$

Souřadnice Venuše vzhledem k Zemi pak jsou

$$X_0 = -0,1913032 \text{ AU}, \quad Y_0 = 0,6924260 \text{ AU}, \quad Z_0 = -0,0372959 \text{ AU}.$$

Nyní už můžeme určit vzdálenost Venuše od Země,

$$R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} = 0,71933 \text{ AU}.$$

Ze vztahů pro $\sin \beta$, $\cos \lambda$ a $\sin \lambda$ (S.14) určíme úhly β , λ . Je třeba si uvědomit, že rovnice typu $\sin \lambda = 0,5$ má dvě řešení v intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ ($\lambda = 30^\circ$ a $\lambda = 150^\circ$). Abychom mohli jedno z nich vybrat (a tím určit ekliptikální délku), je nutné znát i hodnotu $\cos \lambda$, resp. její znaménko. Výsledné hodnoty ekliptikálních souřadnic Venuše jsou $\lambda = 105^\circ 26' 40''$ a $\beta = -2^\circ 58' 19''$.

Základní rovinou rovníkového souřadného systému je rovina zemského rovníku (viz 1. kapitola). Proto musíme určit kartézské souřadnice Venuše vzhledem k soustavě, kde X -ová osa leží ve směru k jarnímu bodu a rovina rovníku splývá s rovinou XZ . Tyto souřadnice (X_0^R, Y_0^R, Z_0^R) dostaneme z (X_0, Y_0, Z_0) pootočením kolem osy X o úhel $-\varepsilon$ (viz 3. kapitola)

$$\begin{aligned} X_0^R &= X_0, \\ Y_0^R &= Y_0 \cos \varepsilon - Z_0 \sin \varepsilon, \\ Z_0^R &= Y_0 \sin \varepsilon + Z_0 \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Výsledné rovníkové souřadnice rektascenze α a deklinace δ se z těchto souřadnic obdrží naprosto stejným způsobem, jako λ a β z (X_0, Y_0, Z_0) . Číselné hodnoty jsou: $\alpha = 7^h 05^m 37^s$ a $\delta = 19^\circ 39' 03''$. Souřadnice na hvězdných mapách jsou právě rovníkové. Venuše se v tuto dobu nacházela v souhvězdí Blíženců.

Kapitola 4: Zdroje energie hvězd

Každé svítící těleso musí mít nějaký zdroj, ze kterého čerpá energii. Energie uvolněná z tohoto zdroje se přenáší z vnitřku hvězdy směrem k povrchu, kde se mění na energii záření vysílaného do okolí. Povrchová vrstva hvězdy tedy sice svítí vlastním světlem, ale zdroj tohoto záření je mimo tuto vrstvu. Názory na zdroj této energie se v minulosti často měnily.

Jako první se otázkou zdroje energie zabýval německý lékař, jeden z objevitelů zákona zachování energie, Julius Robert von Mayer (1814–1878). Jeho názor, že povrch Slunce ohřívají meteoroidy, které na něj neustále dopadají, si můžete ověřit v naší úloze.

Další objevitel zákona zachování energie, německý fyzik a fyziolog Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894), přišel s domněnkou, že hvězdy svítí díky stálému gravitačnímu smršťování. Důsledkem této teorie by byl podstatně rychlejší vývoj hvězdy, než je pozorován. Význačným zastáncem této hypotézy byl i anglický fyzik William Thomson (1824–1907), pozdější lord Kelvin of Largs. Smršťování hvězdy, provázené uvolňováním energie, se proto nazývá *Helmholtz–Kelvinova kontrakce*.

Jak dlouho vydrží hvězda s energií získanou smršťováním? Potenciální energie v bodě a je $E_p(a)$, v bodě b je $E_p(b)$ a práce vykonaná přemístěním částice z a do b proti působení pole je W

$$E_p(b) - E_p(a) = W.$$

Když se bude částice pohybovat ve směru působení pole, bude práce záporná. V nekonečné vzdálenosti od zdroje pole nepůsobí a potenciální energie je nulová. Tedy platí

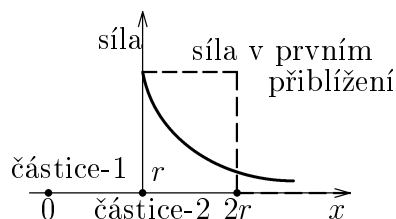
$$E_p(a) = -W.$$

Máme-li dvojici částic o hmotnostech m_1 a m_2 , je gravitační potenciální energie podle předchozího vztahu záporná a v absolutní hodnotě se rovná práci vykonané při přemístění jedné z částic do nekonečna. Na částice působí gravitační síla. Jakou práci tedy vykonáme proti působení této síly? Abychom si to trochu zjednodušili, budeme předpokládat, že síla je do vzdálenosti $2r$ konstantní a dále pak nulová (viz obr. 83 – přerušovaná čára). Práce se rovná součinu síly a posunutí

$$\frac{\kappa m_1 m_2}{r^2} (2r - r) = \frac{\kappa m_1 m_2}{r}.$$

Gravitační potenciální energie je tedy

$$E_g = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r}.$$



Obr. 83

Tento vztah, i když je počítán pro sílu v prvním přiblížení, je přesný, a to i v případě, bude-li se jednat o izotropní kouli.

Gravitační energie hvězdy se rovná součtu gravitačních energií všech dvojic částic uvnitř hvězdy. Bude-li se hvězda o hmotnosti M a poloměru R skládat z N částic s hmotnostmi m , bude počet dvojic roven $N(N-1)/2$ a typická vzdálenost bude R . Gravitační energie se pak dá přibližně napsat jako

$$U_g \approx \frac{1}{2} N(N-1) \left(-\frac{\kappa m^2}{R} \right) \approx -\frac{\kappa N^2 m^2}{R}.$$

Využijeme-li vztah $Nm = M$, máme

$$U_g \approx -\frac{\kappa M^2}{R}.$$

Při zmenšení poloměru hvězdy z nekonečna na R se uvolní energie

$$U_g(\infty) - U_g(R) = |U_g(R)|.$$

Část této energie přispívá na ohřev látky uvnitř hvězdy a část se vyzáří. Známe-li zásoby energie ve hvězdě U a výkon L , můžeme odhadnout čas, za který je hvězda spotřebuje (zářivý výkon hvězdy předpokládáme konstantní). Platí tedy

$$t = \frac{U}{L}.$$

Dosadíme-li do této rovnice zásobu gravitační energie Slunce, dostaneme čas 40 miliónů let, což by mělo být stáří Slunce. Geologové v 19. století odhadli stáří několika usazenin na stamilióny let, což je značně v rozporu s právě určeným stářím Slunce. Nikdo však tehdy nedokázal, že údaje geologů jsou chybné, a tak otázka této kontrakce zůstala otevřená.

Obrat při hledání zdroje hvězdné energie nastal roku 1905, kdy Albertu Einsteinovi vyšel v časopise *Annalen der Physik* článek o elektrodynamice pohybujícího se tělesa a krátká poznámka o závislosti setrvačnosti tělesa na energii. Zde byly položeny základy speciální teorie relativity a důkaz toho, že při změně energie kteréhokoli fyzikálního systému o ΔE se jeho hmotnost změní o $\Delta E/c^2$.

Kousek látky tedy obsahuje velké množství energie. Vznikla myšlenka, že hvězdy čerpají energii z anihilace – přeměny látky na záření. Kdyby hvězdy čerpaly energii z anihilace, jejich typický věk by byl asi 20 biliónů let. Představa, že se látka uvnitř hvězd mění v záření, se setkala zprvu s nedůvěrou, jelikož stáří hvězd bylo příliš velké – většina dvojhvězd by se musela rozpadnout díky rušivým vlivům sousedních hvězd. Konečným argumentem proti anihilaci byla až model anihilace na mikroskopické úrovni. Anihilace nemůže být zdrojem energie, jelikož nastává prakticky okamžitě po srážce částic s antičásticemi, takže energie takto získaná by se musela uvolnit v jednom okamžiku obrovským výbuchem.

Správnou odpověď uhádl roku 1920 anglický astronom, jeden ze zakladatelů astrofyziky, sir Arthur Stanley Eddington (1882–1944). Vyslovil názor, že Slunce čerpá energii z jaderných reakcí. V úvahu přicházela především syntéza jader. Jeho odpůrci však tvrdili, že teplota látky ve hvězdách na to nestačí. Důkaz podali roku 1929 Atkinson a Houtermans, kteří dokázali, že termojaderné reakce mohou probíhat uvnitř hvězd. Roku 1938 popsal reakce uvnitř Slunce německý fyzik Hans Bethe a nezávisle na něm i Carl von Weizsäcker. Bethe pak za práci o uvolňování energie ve hvězdách dostal Nobelovu cenu. Odhad stáří Slunce a hvězd na hlavní posloupnosti získaný na základě termojaderných reakcí vychází přibližně 10 miliard let.

Když Slunce spotřebuje svoji zásobu energie za omezený čas, vzniká otázka, kolik ho už uplynulo a kolik ho ještě zbývá. Všeobecně se usuzuje, že celá sluneční soustava vznikla najednou. Stáří Slunce by tedy mělo být stejné jako stáří Země. Dnes je určení stáří Země založeno na radioaktivní přeměně prvků na jejím povrchu a rozbořením chemického složení meteoritů. Řádový odhad stáří je asi 5 miliard let. Tento odhad vyvrací kontrakci a naopak potvrzuje současný názor, že zdrojem energie Slunce je syntéza hélia z vodíku.

Úloha S.IV ... *Slunce a meteoroidy*

Ověřte hypotézu, že zdrojem energie Slunce jsou meteoroidy dopadající na jeho povrch. Určete, kolik meteoroidů (jejich hmotnost) by muselo dopadnout na Slunce za 1 rok, aby se energeticky pokryl zářivý výkon Slunce $L_{\odot} = 3,83 \cdot 10^{26}$ W.

Předpokládejte, že se vyzáří veškerá kinetická energie meteoroidů (ve skutečnosti se část této energie spotřebuje na ohřev Slunce a na změnu celkové potenciální energie Slunce). Poloměr Slunce je $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8$ m, hmotnost $1,99 \cdot 10^{30}$ kg.

Určete, o kolik by se za rok změnila velká poloosa a doba oběhu Země díky nárůstu hmotnosti Slunce. Předpokládejte, že se hmotnost Slunce mění skokově a že před touto změnou obíhala Země kolem Slunce po kružnici o poloměru $a = 1$ AU = $1,496 \cdot 10^{11}$ m s dobou oběhu $T = 1$ rok. Při výpočtu použijte přibližný vztah $(1+x)^k \approx 1+kx$, který platí pro $0 \leq x \ll 1, k \in \mathbb{N}$. Dnes je známa astronomická jednotka s přesností na 2 metry. Bylo by možné tuto změnu naměřit?

Řešení:

Abychom mohli odhadnout kinetickou energii E_k meteoroidů dopadajících na povrch Slunce, musíme si uvědomit, odkud tyto meteoroidy pocházejí. Vzhledem k tomu, že Slunce svítí dlouhou dobu, nemohou být z vnitřní části Sluneční soustavy. Jejich dráha bude podobná dráze komet. Ta je, u komet z okraje Sluneční soustavy, téměř parabolická. Budeme předpokládat, že meteoroidy dopadají na Slunce z velké vzdálenosti (nekonečna) a že na začátku měly velmi malou rychlost. Tomu odpovídá nulová celková energie E (parabolická dráha). Pro kinetickou a potenciální energii E_p meteoroidu na povrchu Slunce tak dostáváme $E = E_k + E_p = 0$, neboli

$$E_k = -E_p = \frac{\kappa m M_{\odot}}{R_{\odot}},$$

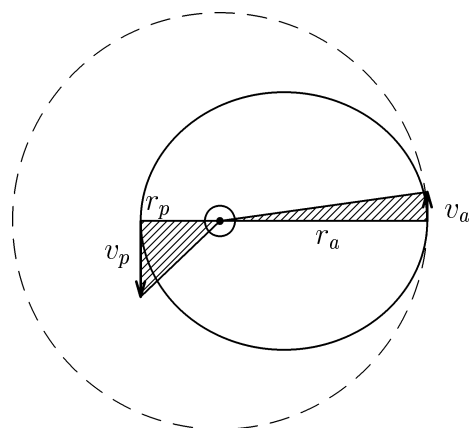
kde jsme využili vztah pro potenciální energii uvedený ve 4. kapitole a kde m je hmot-

nost meteoroidu. Pokud jsou meteoroidy jediným zdrojem energie Slunce, musí příliv jejich kinetické energie odpovídat vyzářenému výkonu L_{\odot} (má-li být Slunce stabilním zdrojem):

$$L_{\odot} = \frac{\kappa M_{\odot}}{R_{\odot}} \frac{\Delta m}{\Delta t},$$

kde Δm je hmotnost meteoroidů spadlých na Slunce za čas Δt . Uvažujeme-li jeden rok (tedy $\Delta t = 3,156 \cdot 10^7$ s), dělá to $\Delta m = 6,3 \cdot 10^{22}$ kg.

Nyní se zabýváme tím, co se stane se Zemí, změní-li se hmotnost Slunce skokově o tuto hodnotu. Na začátku obíhá Země kolem Slunce po kružnici o poloměru a kruhovou rychlostí $v_k = \sqrt{\kappa M_{\odot}/a}$. Zvětší-li se hmotnost Slunce, pak tato rychlost už nebude dostatečná k tomu, aby Země dále obíhala po kružnici. Země se začne pohybovat po elipse, v jejímž ohnisku bude Slunce. V místě, kde se nachází Země v okamžiku změny hmotnosti Slunce, se pak bude nacházet afélium (jediné dva body na eliptické dráze, ve kterých je průvodič kolmý na směr rychlosti planety, odpovídají perihéliu a aféliu, viz obr. 84). Známe tedy polohu r_a a rychlost v_a Země v aféliu: $r_a = a$, $v_a = v_k$. Abychom určili velkou poloosu a' nové elipsy, stačí najít vzdálenost r_p perihélia od Slunce. Tu určíme ze zákona zachování energie a z II. Keplerova zákona



Obr. 84

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_p^2 - \kappa \frac{M_{\odot} + \Delta m}{r_p} &= \frac{1}{2}v_a^2 - \kappa \frac{M_{\odot} + \Delta m}{r_a}, \\ r_p v_p &= r_a v_a. \end{aligned}$$

Poslední vztah opravdu představuje II. Keplerův zákon, neboť, jak již bylo řečeno, jsou rychlosti v_a , v_p v aféliu a perihéliu kolmé na průvodič. Za malý čas dt tedy průvodič opíše malý pravoúhlý trojúhelník o ploše $S_a = r_a v_a dt/2$ a $S_p = r_p v_p dt/2$. Z těchto dvou rovnic vyloučíme v_p , pro r_p tak dostaneme kvadratickou rovnici. Jedno její řešení je $r_p = r_a = a$. To však není zajímavé, neboť odpovídá počáteční poloze. Druhé řešení má tvar: $r_p = a M_{\odot}/(M_{\odot} + 2\Delta m)$. Pro změnu velké poloosy tak dostáváme

$$\Delta a = a' - a = \frac{1}{2}(r_p + r_a) - a = \frac{1}{2}(r_p - a) = -a \frac{\Delta m}{M_{\odot} + 2\Delta m} \approx -a \frac{\Delta m}{M_{\odot}}.$$

Číselně pak $\Delta a = -4,8$ km, což je změna, které bychom si určitě všimli.

Pro výpočet změny oběžné doby použijeme III. Keplerův zákon. Protože se však mění hmotnost centrálního tělesa, musíme použít jeho obecnější verzi: $\kappa M T^2 = 4\pi^2 a^3$. V našem případě

$$\begin{aligned} \kappa(M_{\odot} + \Delta m)(T + \Delta T)^2 &= \kappa M_{\odot} \left(1 + \frac{\Delta m}{M_{\odot}}\right) T^2 \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2 \approx \\ &\approx \kappa M_{\odot} T^2 \left(1 + \frac{\Delta m}{M_{\odot}} + 2\frac{\Delta T}{T}\right) = 4\pi^2(a + \Delta a)^3 \approx 4\pi^2 a^3 \left(1 + 3\frac{\Delta a}{a}\right), \end{aligned} \quad (\text{S.15})$$

kde jsme použili přibližný vztah uvedený v zadání a zanedbali člen s $\Delta m \Delta T$, neboť obsahuje součin dvou relativně malých čísel (vůči M_{\odot} a T). Samozřejmě toto zjednodušení není nutné

provádět, výsledný vztah však bude o trochu složitější. Nyní už není těžké vyjádřit změnu oběžné doby Země kolem Slunce

$$\Delta T \approx \frac{T}{2} \left(3 \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta m}{M_{\odot}} \right) \approx -2 \frac{\Delta m}{M_{\odot}} T,$$

číselně $\Delta T = -2,0$ s.

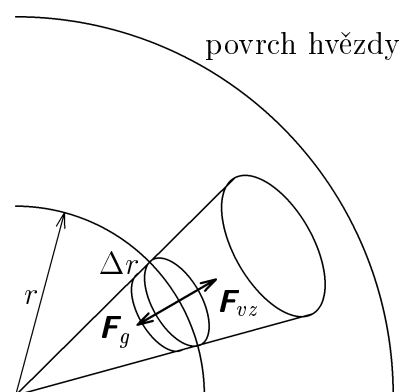
Kapitola 5: Modely hvězd I

V této kapitole si povíme něco o modelech hvězd. Omezíme se jen na ty hvězdy, a těch je většina, které se nacházejí v klidném období svého života, mají slabé magnetické pole, nerotují rychle a nemění svoje rozměry. Naše úvahy budou s dostatečnou přesností platit i pro hvězdy s pomalými změnami vnitřní stavby.

Při vysokých teplotách, které panují ve hvězdách, není možné jiné skupenství látky než částečně nebo zcela ionizovaný plyn – plazma. Fyzikální podmínky v nitru hvězd, teplota, tlak, hustota apod. budou za vyslovených předpokladů záviset jen na vzdálenosti r od středu hvězdy. Soubor funkcí $T(r)$, $p(r)$, $\rho(r)$ určuje model hvězdy. Řešením soustavy diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami můžeme zjistit tvar těchto funkcí. My se zde omezíme pouze na kvalitativní odhady, pomocí kterých si můžeme vytvořit představu o zákonitostech, které určují vnitřní stavbu hvězd. V praxi to znamená, že budeme zanedbávat faktory řádu jednotek (jako například faktor $4\pi/3$ ve vztahu (S.18)) a že rovnice, které platí jen pro malé změny vzdálenosti Δr , budeme aplikovat na případy, kdy Δr položíme rovno poloměru Slunce R_{\odot} . Znaménko \approx znamená řádový odhad.

Ve stabilní hvězdě musí být v každém místě jejího nitra rovnováha mezi gravitační a vztlakovou silou. Na vztlakové síle se podílí hlavně tlak plynu, teprve při teplotách uvnitř velmi žhavých hvězd se uplatní tlak záření. Uvažujme malý objem v nitru hvězdy (viz obr. 85), který je vzdálen r od jejího středu, s podstavou o obsahu ΔS a výškou Δr . Plyn v něm obsažený má hustotu $\rho(r)$ a hmotnost $\rho(r)\Delta S\Delta r$. Tento váleček je do středu hvězdy přitahován pouze látkou o hmotnosti $M(r)$ v kouli o poloměru r (viz příklad S. V). Velikost gravitační síly působící na váleček vyjádříme jako

$$F_g = \kappa \frac{M(r)\rho(r)\Delta S\Delta r}{r^2}.$$



Obr. 85

Příčinou vztlakové síly je ta skutečnost, že tlak roste se zmenšující se vzdáleností od středu. Na spodní podstavu válečku pak působí větší tlaková síla než na podstavu horní. Ve stavu rovnováhy gravitační síla zvýší tlak na spodní podstavu o Δp , kde

$$\Delta p = -\kappa \frac{M(r)\rho(r)\Delta r}{r^2}. \quad (\text{S.16})$$

Znaménko minus vyznačuje opačnou orientaci sil. Vztah (S.16) se nazývá **rovnice hydrostatické rovnováhy**. Hmotnost koule $M(r)$ obdržíme sečtením hmotností všech kulových slupek (přesněji integrací rovnice (S.17)). Hmotnost takovéto slupky $\Delta M(r)$ je dána jako

$$\Delta M(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \Delta r. \quad (\text{S.17})$$

Podle rovnice hydrostatické rovnováhy můžeme odhadnout tlak p_c ve středu Slunce tak, že položíme Δr rovno poloměru Slunce R_{\odot} . Hustotu $\rho(r)$ nahradíme střední hustotou

$$\bar{\rho} \approx \frac{M_{\odot}}{R_{\odot}^3}. \quad (\text{S.18})$$

Potom $\Delta p = p(R_\odot) - p(0) = -p_c$, protože tlak $p(R_\odot)$ na povrchu Slunce je nulový

$$p_c \approx \kappa \frac{M_\odot^2}{R_\odot^4} = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ Pa} \quad (\text{S.19})$$

Ve skutečnosti se tlak ve středu Slunce rovná $2,2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$ (poloměr Slunce $R_\odot = 700 \cdot 10^3 \text{ km}$).

Plazma v námi uvažovaných hvězdách má vlastnosti ideálního plynu. Její stavová rovnice je $p = nkT$, kde k je Boltzmannova konstanta a n je hustota částic, přičemž za částice považujeme volné elektrony a kladné ionty. Předpokládejme, že látka uvnitř hvězdy se skládá jen z ionizovaných atomů vodíku, tj. elektronů a protonů. V této látce na dvě částice připadá hmotnost protonu m_p , tudíž platí

$$n = \frac{2\rho}{m_p}.$$

Po dosazení za průměrnou hustotu látky ze vztahu (S.18) získáme

$$\bar{n} \approx M_\odot / (m_p R_\odot^3).$$

Tlak v centru Slunce vyjádřený ze stavové rovnice je pak

$$p_c \approx \frac{M_\odot}{m_p R_\odot^3} k T_c. \quad (\text{S.20})$$

Z porovnání výrazů (S.19) a (S.20) plyne pro teplotu T_c uvnitř Slunce

$$T_c \approx \frac{\kappa M_\odot m_p}{R_\odot k} = 23 \cdot 10^6 \text{ K}. \quad (\text{S.21})$$

Skutečná hodnota je $15 \cdot 10^6 \text{ K}$.

Zatím máme pro tři neznámé funkce $p(r)$, $T(r)$ a $\rho(r)$ pouze dvě rovnice: rovnici hydrostatické rovnováhy (S.16) a stavovou rovnici plazmy. Ještě tedy nemůžeme počítat modely hvězd. O dalším chybějícím článku si povíme v další kapitole.

Úloha S. V ... hvězdy

a) Zkuste jednoduše zdůvodnit, proč je gravitační síla působící na těleso o hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu izotropní koule o poloměru $R > r$ daná pouze hmotou $M(r)$ obsaženou v kouli o poloměru r a proč je rovna

$$F_g = \frac{\kappa m M(r)}{r^2},$$

tj. jakoby byla celá hmota $M(r)$ soustředěna v centru.

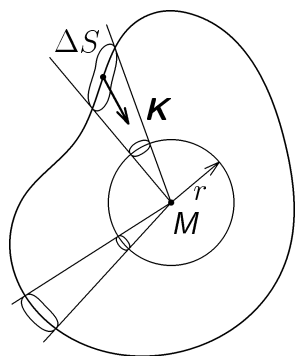
b) Existuje jistá skupina tzv. **polytropních** modelů hvězd, které jsme již schopni počítat. V těchto modelech se předpokládá závislost tlaku p na hustotě ρ ve tvaru $p = C\rho^\gamma$ (tzv. rovnice polytropy, C je libovolná konstanta). Speciálním případem polytropy je adiabata (pro $\gamma = 5/3$), izoterma (pro $\gamma = 1$) a izobara (pro $\gamma = 0$). Pro funkce $p(r)$ a $\rho(r)$ tak máme, spolu s rovnicí hydrostatické rovnováhy, rovnice dvě a můžeme z našich úvah vyloučit teplotu. Odhadněte, stejným způsobem jako v seriálu, vztah mezi hmotností hvězdy M a jejím poloměrem R . Určete, pro které hodnoty parametru polytropy γ je hvězda stabilní.

Řešení:

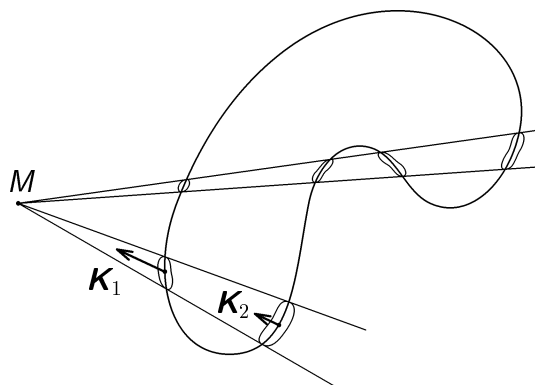
a) Gravitační (a stejně i elektrostatická síla) se vyznačuje tím, že klesá se čtvercem vzdálenosti. Velikost intenzity gravitačního pole K (což je síla, která by v daném místě působila na těleso s jednotkovou hmotností) ve vzdálenosti r od hmotného bodu o hmotnosti

M je tedy rovna $K = \kappa M/r^2$. Představme si úzký kužel s vrcholem umístěným do polohy hmotného bodu M . Plocha S jeho podstavy je úměrná čtverci jeho výšky r (z podobnosti plyne, že poloměr podstavy je úměrný výšce r). Odtud tedy dostáváme, že součin velikosti intenzity K a plochy podstavy kužele S je pořád stejný a nezávisí na výšce kužele. Tento výsledek nezávisí na tvaru podstavy kužele, může to být třeba čtverec (pak je to vlastně jehlan).

Zkusme nějak využít náš zajímavý výsledek. Umístěme hmotný bod M do nějakého prostoru ohraničeného uzavřenou plochou S (viz obr 86a). Vyplníme celý prostor velkým množstvím úzkých kuželů. Budeme se snažit zjistit, jaká je suma přes všechny kužely ze součinu velikosti intenzity pole na povrchu plochy vymezené kuželem a velikosti průmětu této plochy do směru intenzity pole \mathbf{K} . Průmět této plochy odpovídá podstavě kužele. Obecně se součin velikosti intenzity K a průmětu $\Delta S'$ malé plochy ΔS do směru intenzity nazývá tok vektoru intenzity \mathbf{K} plochou ΔS : $\Phi = K \Delta S'$. Námí zjištěný fakt lze v řeči toku přeformulovat takto: tok plochou podstavy kužele je pořád stejný. Vraťme se zpět k situaci na obrázku 86a. Díky tomuto výsledku je tok celkovou plochou Φ_S stejný jako tok přes kouli o poloměru r . Jelikož je intenzita pole kolmá na povrch koule, je tok přes plochu koule jednoduše $\Phi_k = 4\pi r^2 K = 4\pi \kappa M = \Phi_S$.



Obr. 86a



Obr. 86b

Co se stane, umístíme-li hmotný bod mimo naši uzavřenou plochu? Každý kužel ji protne dvakrát nebo čtyřikrát ($6\times, \dots$), viz obr. 86b. Jak víme, tok přes každou plošku bude stejný. Jednou však do daného objemu vektor \mathbf{K} vtéká a jednou vytéká. Celkový tok bude tedy nulový.

Bude-li ve hře více hmotných bodů, budou do celkového toku přes plochu přispívat pouze ty z nich, které se nacházejí uvnitř plochy. Jelikož je intenzita pole \mathbf{K} součtem intenzit pocházejících od jednotlivých hmotných bodů, bude celkový tok roven

$$\Phi_S = 4\pi \kappa M_{\text{uvnitř}}, \quad (\text{S.22})$$

kde $M_{\text{uvnitř}}$ je hmotnost objektů, které jsou uzavřeny danou plochou. Tento vztah se nazývá **Gaussova věta**.

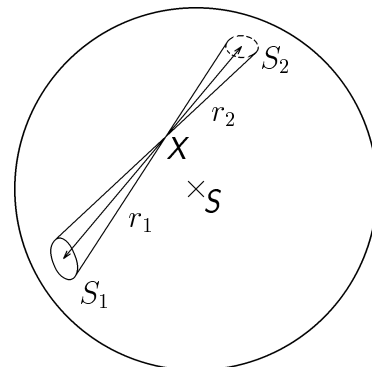
Teď už můžeme zjistit, jak vypadá gravitační pole izotropní koule o poloměru R . Ze symetrie plyne, že velikost intenzity může záviset pouze na vzdálenosti r od středu koule a že intenzita bude směřovat vždy do tohoto středu. Jako plochu, přes kterou budeme počítat tok intenzity Φ , si zvolme kouli o poloměru r se středem stejným jako naše izotropní koule. Protože je intenzita v každém bodě této plochy stejná, a navíc k ní kolmá, bude $\Phi = 4\pi r^2 K$. Tento tok jsme však schopni vypočítat i ze vztahu (S.22). Pro $r > R$ tato plocha obklopuje celou kouli, takže tento tok musí být roven $\Phi = 4\pi \kappa M_k$, kde M_k je celková hmotnost koule. Pro $r > R$ tak dostáváme známý vztah

$$K = \frac{\kappa M_k}{r^2}.$$

Gravitační pole vně koule je tedy stejné jako pole hmotného bodu o hmotnosti rovné hmotnosti koule umístěného do jejího středu.

Zvolíme-li $r < R$, pak je tok přes plochu určen pouze hmotností $M(r)$, která je soustředěna v kouli o poloměru r : $\Phi = 4\pi\kappa M(r)$. Intenzita gravitačního pole se rovná $K = \kappa M(r)/r^2$. Na gravitační pole ve vzdálenosti r uvnitř koule tedy nemá vliv hmota, která se nachází ve vzdálenosti větší než je r .

Příklad šel řešit i bez znalosti Gaussovy věty. Mějme hmotnou kulovou plochu. Dokážeme nejprve, že intenzita gravitačního pole je uvnitř této plochy nulová. Vnitřním bodem X vedme opět úzký kužel, tentokrát protažený na obě strany (viz obr. 87). Tento kužel vytkne na povrchu koule dvě plochy S_1 a S_2 . Opět díky podobnosti útvarů je jejich poměr roven $\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Gravitační síly, kterými působí obě plochy v daném místě, mají stejnou velikost, ale opačný směr, takže se jejich účinek vyruší.



Obr. 87

b) V rovnici hydrostatické rovnováhy (S.16) položíme za Δr celý poloměr hvězdy R . Tlak v centru hvězdy se pak vyjádří z rovnice polytropy $p = C\rho^\gamma$. Z rovnice hydrostatické rovnováhy tedy dostaneme

$$C\rho^\gamma \approx \kappa M \frac{\rho}{R},$$

kde M je celková hmotnost hvězdy. Hustotu hvězdy aproximujeme její střední hustotou $\bar{\rho} \approx M/R^3$. Jednoduchými úpravami nakonec dospějeme ke vztahu

$$R \approx \left(\frac{C}{\kappa}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}} M^{\frac{\gamma-2}{3\gamma-4}} \quad \text{pro } \gamma \neq \frac{4}{3}.$$

V případě $\gamma = 4/3$ se R vykrátí a dostaneme vztah pro hmotnost hvězdy. Rovnovážný stav zde existuje jen pro určitou hmotnost, pro jiné hmotnosti se hvězda buď zhroutí nebo rozplyne.

Pusťme se do rozboru stability hvězdy. Rozlišujeme tři druhy rovnovážných poloh: poloha stabilní (při malé výchylce má systém tendenci vracet se do rovnovážného stavu), indiferentní (při malé výchylce systém zůstává v rovnovážném stavu) a labilní (při malé výchylce má systém tendenci vzdalovat se od rovnovážného stavu). V našem případě indiferentnímu rovnovážnému stavu odpovídá hvězda s $\gamma = 4/3$. Ať měníme její poloměr, jak chceme, vždy je v hydrostatické rovnováze.

Víme, že gravitační síla (například ve vzdálenosti $r = R/2$) je: $F_g \approx \text{konst}/R^2$. Naopak tlaková síla je: $F_t \approx pR^2 \approx \text{konst}/R^{3\gamma-2}$, kde jsme použili pro vyjádření tlaku rovnici polytropy. V rovnovážném stavu jsou si gravitační a tlaková síla rovny. Pro $\gamma > 4/3$ je mocnina u R ve vztahu pro tlakovou sílu větší než 2. Zmenšíme-li tedy poloměr hvězdy v rovnovážném stavu, bude tlaková síla větší než gravitační a hvězda bude mít tendenci se rozpínat. Naopak pro poloměry hvězdy větší než rovnovážný převáží gravitační síla nad tlakovou a hvězda se začne smršťovat, neboli opět se navracet do rovnovážné polohy. V případě $\gamma > 4/3$ se tedy jedná o rovnovážnou polohu stabilní. Pro $\gamma < 4/3$ je naopak mocnina u R ve vztahu pro tlakovou sílu menší než 2. Zmenšíme-li poloměr hvězdy, začne gravitační síla převažovat nad tlakovou a hvězda se bude čím dál více smršťovat. Zvětšíme-li poloměr hvězdy, převáží tlaková síla nad gravitační a hvězda se rozplyne. V případě $\gamma < 4/3$ se jedná tedy o hvězdu nestabilní.

Kapitola 6: Modely hvězd II

Hvězdy čerpají energii z termojaderných reakcí. Aby hvězda svítila dostatečně dlouho beze změny, musí platit **podmínka energetické rovnováhy**. Ta vyjadřuje rovnost výkonu uvolněného při jaderných reakcích a výkonu přeneseného od středu k povrchu hvězdy. Potřebujeme tedy znát způsob přenosu energie uvnitř hvězdy. V dostatečně horké a husté látce probíhá tzv. **zářivý přenos energie**, při kterém se každý foton mnohokrát pohltí a znovu vyzáří, než se dostane z oblasti s vysokou teplotou do oblasti s nízkou teplotou. Energie se šíří prostřednictvím fotonů. Předpokládejme, že foton projde v látce mezi vyzářením a pohlcením průměrnou vzdálenost d (tzv. střední volná dráha fotonu).

Každá vrstva látky září jako absolutně černé těleso, tj. podle Stefan-Boltzmannova zákona se z jednotkové plochy za jednotku času vyzáří energie

$$I = \sigma T^4,$$

kde $\sigma = 5,68032 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefan-Boltzmannova konstanta. Nechť teplota látky klesne na úseku délky l v radiálním směru z T_1 na T_2 a hustota zářivého výkonu z I_1 na I_2 . Zkusme zjistit, jaký je tok energie H přes jednotkovou plochu postavenou uprostřed tohoto úseku (viz obr. 88). Přes tuto plochu prochází záření jakoby z vrstev, které jsou od ní ve vzdálenosti d , takže výsledný tok energie bude $H = I'_1 - I'_2$, kde I'_1 a I'_2 jsou hustoty zářivého výkonu těchto vrstev. Na malých vzdálenostech (a délku l budeme považovat za malou) můžeme pokles zářivého výkonu považovat za lineární, takže

$$I'_1 - I'_2 = 2d(I_1 - I_2)/l \approx d(I_1 - I_2)/l.$$

Pro výkon pak platí

$$H \approx \sigma \frac{d}{l} (T_1^4 - T_2^4). \quad (\text{S.23})$$

Nechť je v jednotce objemu n_0 částic, které pohlcují fotony. Každá částice se jeví jako terčík s plochou σ_f (tzv. účinný průřez). Představme si hranol hvězdné látky s čelní plochou S a s délkou x . Tento hranol obsahuje $Sx n_0$ částic. Při čelním pohledu je plocha S_t , kterou pro fotony zakrývají částice v hranolu, rovna $S_t = Sx n_0 \sigma_f$. Střední volná dráha fotonu pak odpovídá takové délce hranolu, při které částice vyplní celou čelní plochu ($S_t = S$), neboli

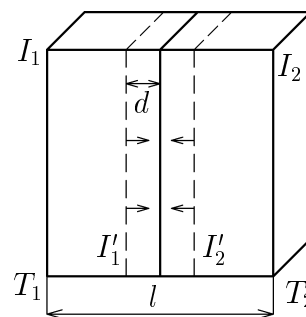
$$d = \frac{1}{\sigma_f n_0}. \quad (\text{S.24})$$

Zanedbáme, že uvnitř Slunce ve vrstvě těsně pod povrchem probíhá přenos energie prouděním. Pak za l ve vztahu (S.23) dosadíme R_\odot a zanedbáme povrchovou teplotu $T_2 = 6000 \text{ K}$ vůči teplotě $T_1 = T_c$ ve středu. Zářivý výkon L_\odot se rovná součinu přeneseného výkonu a povrchu hvězdy

$$L_\odot \approx 4\pi R_\odot^2 H \approx R_\odot^2 \sigma \frac{d}{R_\odot} T_c^4 = \sigma d R_\odot T_c^4.$$

Teplota Slunce je přibližně $T_c = 10^7 \text{ K}$ a při střední hustotě Slunce (S.18) se pak střední volná dráha fotonu rovná asi $d = 4 \text{ mm}$. Po dosazení získáme výkon $L_\odot = 2 \cdot 10^{27} \text{ W}$, což se zase až tak moc od skutečného výkonu $L_\odot = 3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$ neliší.

Předpokládejme, že částicemi, které pohlcují fotony jsou volné elektrony. Hustota těchto terčíků se řádově shoduje s celkovou hustotou částic $\bar{n} \approx M_\odot / (m_p R_\odot^3)$, kde m_p je hmotnost protonu (což je ionizovaný vodík, který tvoří většinu hmoty Slunce). Po dosazení tohoto



Obr. 88

vztahu do (S.24) dostaneme $d \approx m_p R_\odot^3 / (\sigma_f M_\odot)$. Předpokládejme navíc, že účinný průřez je konstantní. Použijeme-li ještě vztah pro centrální teplotu (S.21) z minulé kapitoly seriálu, máme pro celkový zářivý výkon Slunce vztah

$$L_\odot \approx \sigma \frac{m_p R_\odot^3}{\sigma_f M_\odot} R_\odot \left(\frac{\kappa M_\odot}{R_\odot} \frac{m_p}{k} \right)^4 = \frac{\sigma \kappa^4 m_p^5}{\sigma_f k^4} M_\odot^3 = \text{konst } M_\odot^3. \quad (\text{S.25})$$

Tato závislost zářivého výkonu na hmotnosti vyplývá taktéž z pozorování. Je tedy vidět, že i kvalitativní úvahy nás dovedly ke správným výsledkům.

Podívejme se teď, co nám (S.25) říká o vztahu mezi absolutní magnitudou M_a a hmotností hvězdy M . Použijeme-li Pogsonovu rovnici (viz 1. kapitola) pro naši hvězdu posunutou do vzdálenosti $r = 10$ pc (světelný tok $\Phi = L/(4\pi r^2)$) a pro nějakou referenční hvězdu o jasnosti m_0 (tok Φ_0), obdržíme $M_a - m_0 = 2,5 \log(4\pi r^2 \Phi_0 / L)$. Po úpravě získáme $M_a = A - 2,5 \log L$, kde A je konstanta, kterou určíme z pozorování. Využijeme-li (S.25) dostaneme $M_a = A - 7,5 \log M$, neboli

$$\log M = A' - 0,13 M_a.$$

Úměrnost zářivého výkonu hvězdy třetí mocnině její hmotnosti vede ke koeficientu $-0,13$. Skutečně, experimentálně zjištěná závislost

$$\log(M/M_\odot) = 0,56 - 0,12 M_a. \quad (\text{S.26})$$

tomu odpovídá.

Úloha S . VI ... *hmotnost hvězd*

- Určete, jak závisí doba života hvězdy na její hmotnosti.
- Vztah (S.26) nám dovoluje určovat vzdálenosti dvojhvězd a hmotnosti jejich složek. Jako příklad může sloužit dvojhvězda 70 Oph. Měřením bylo zjištěno, že oběžná doba složek dvojhvězdy je $T = 87,85$ roku, velká poloosa jejich dráhy má na obloze úhlovou délku $a = 4,551''$. Zdánlivé magnitudy složek jsou $m_A = 3,93$, $m_B = 5,29$. Z těchto údajů vypočítejte vzdálenost systému a hmotnosti jednotlivých složek.

Řešení:

a) V poslední kapitole jsme si ukázali, že svítivost hvězdy L je úměrná třetí mocnině její hmotnosti M : $L \sim M^3$. Pro energii E , kterou vyzáří za dobu t , pak můžeme psát $E \sim M^3 t$. Hvězda během svého života získává energii převážně z přeměny jader vodíku na hélium. Zásoba energie E_z je tedy úměrná počtu protonů ve hvězdě, a tím i celkové hmotnosti hvězdy: $E_z \sim M$. Tato zásoba, za předpokladu, že se svítivost hvězdy s časem moc nemění, vystačí na dobu

$$T = E_z / L \sim M / M^3 \sim M^{-2},$$

neboli doba života hvězdy je nepřímo úměrná druhé mocnině její hmoty.

b) V této úloze se vyskytuje celkem pět neznámých: hmotnosti složek dvojhvězdy M_A , M_B , jejich absolutní magnitudy M_A , M_B a vzdálenost dvojhvězdy od Země r . Znalost poslední veličiny nám umožňuje jednoduše určit hodnoty zbývajících čtyř. Absolutní magnitudy složek spočteme z Pogsonovy rovnice (S.2) (viz úloha S . I) ze známých vizuálních magnitud m_A a m_B

$$M = m + 5 - 5 \log r,$$

kde vzdálenost dosazujeme v parsecích. Hmotnosti složek určíme z empirické formule (S.26),

$$\log \mathcal{M} = 0,56 - 0,12 M,$$

zde je hmotnost hvězdy vyjádřena v násobcích hmotnosti Slunce \mathcal{M}_\odot . Kombinací obou rovnic obdržíme pro hmotnost hvězdy

$$\mathcal{M} = 10^{-0,04-0,12m} r^{0,6}. \quad (\text{S.27})$$

Další vztah mezi vzdáleností dvojhvězdy a hmotnostmi složek plyne ze známého zobecněného III. Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{T^2(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)} = \text{konst.}, \quad (\text{S.28})$$

kde a je velká poloosa oběžné dráhy a T oběžná doba systému. Hodnotu konstanty určíme ze známých veličin a_Z a T_Z pro systém Země–Slunce. Budeme-li dosazovat velkou poloosu v astronomických jednotkách, oběžnou dobu v rocích a hmotnosti složek v násobcích hmotnosti Slunce, je tato konstanta rovna jedné ($a_Z = 1 \text{ AU}$, $T_Z = 1 \text{ rok}$, $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_\odot$, $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}_Z \approx 0$).

Velká poloosa dráhy dvojhvězdy 70 Oph má na obloze úhlovou délku $A = 4,551''$. Její skutečnou velikost v astronomických jednotkách dostaneme ze vztahu $a = Ar$, kde za r dosazujeme vzdálenost v parsecích. Tento vztah plyne z definice parseku. (Jeden parsek je vzdálenost, ze které se jeví úsečka délky jedné astronomické jednotky jako úsečka s úhlovou délkou $1''$.) Dosazením do (S.28) obdržíme hledaný druhý vztah mezi r , \mathcal{M}_A a \mathcal{M}_B

$$\frac{(rA)^3}{T^2} = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B.$$

Hmotnosti složek vyjádříme z (S.27) a po úpravě nalezneme

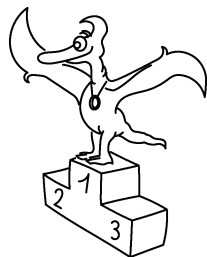
$$r^{2,4} = \frac{T^2}{A^3} 10^{-0,04} \left[10^{-0,12m_A} + 10^{-0,12m_B} \right].$$

Číselná hodnota vzdálenosti dvojhvězdy 70 Oph je $r = 4,77 \text{ pc}$. Hmotnosti složek vypočtené z (S.27) jsou pak $\mathcal{M}_A = 0,79 \mathcal{M}_\odot$ a $\mathcal{M}_B = 0,54 \mathcal{M}_\odot$.

Pokud vás astronomie a astrofyzika zaujala, určitě si nenechte ujít tyto knížky:

M. ŠOLC, J. ŠVESTKA, V. VANÝSEK: *Fyzika hvězd a vesmíru*, SPN, Praha 1991;

V. BALEK: *Prečo svietia hviezdy?* Alfa, Bratislava 1986.



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie čtvrtých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Škola	Třída	Body
	Student	Pilný	MFF UK		200
1	Miroslav	Šimurda	Gymnázium Karlovy Vary	4.D	152,5
2	Vlastimil	Kulda	Gymnázium Plzeň	4.A	149,5
3	Karol	Gregor	Gymnázium Prešov	4.B	136,5
4	Tomáš	Brauner	Gymnázium Moravský Krumlov	4.B	125
5	Jiří	Hofman	Gymnázium Lovosice	4.B	124
6	Tomáš	Tichý	Gymnázium Žďár nad Sázavou	4.A	101
7	Jiří	Houška	Gymnázium Plzeň	4.A	100
8	Václav	Porod	Gymnázium Týn nad Vltavou	4.	99
9	Daniel	Klír	Gymnázium Poděbrady	4.B	95
10	Aleš	Přívětivý	Gymnázium Pardubice	4.K	90

Kategorie třetích ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Škola	Třída	Body
	Student	Pilný	MFF UK		200
1	Martin	Ondráček	Gymnázium Kyjov	3.C	158,5
2	Peter	Svrček	Gymnázium Žilina	3.	157
3	Matúš	Medo	Gymnázium Košice	3.	145,5
4	Jiří	Štěpán	Gymnázium Praha 5	3.B	125
5	Karel	Kolář	Gymnázium Sušice	3.A	120
6	Juraj	Fedor	Gymnázium Povážská Bystrica	3.D	110
7	Filip	Drsek	Gymnázium Cheb	3.C	106
8	Štěpánka	Kučková	Gymnázium Praha 6	3.E	104
9	Jiří	Kvita	Gymnázium Hranice na Moravě	3.A	92
10	Pavol	Habuda	Gymnázium Žilina	3.B	89,5

Kategorie druhých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Škola	Třída	Body
	Student	Pilný	MFF UK		200
1	Miroslav	Černý	Gymnázium Kutná Hora	2.	108,5
2	Lenka	Zdeborová	Gymnázium Plzeň	2.A	100
3	Petr	Klenka	Gymnázium Praha 10	2.A	89,5
4	Daniel	Sprinzl	Gymnázium Dačice	2.	81,5
5	Miroslav	Kašpar	Gymnázium Pardubice	2.D	61
6	Jan	Myslivoček	Gymnázium Brno	2.A	59,5
7	Jan	Holeček	Gymnázium Brno	2.A	57
8	Karel	Honzl	Gymnázium Podbořany	2.	46,5
9	Karel	Kyrián	Gymnázium České Budějovice	2.A	42
10	Jan	Tejkal	Gymnázium Blansko	2.A	39,5

Kategorie prvních ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Škola	Třída	Body
	Student	Pilný	MFF UK		200
1	Daniel	Fiala	Gymnázium Sušice	1.G	90
2	Andrzej	Pavlík	Gymnázium Trenčín	1.D	68,5
3	Martin	Rosol	Gymnázium Slaný	1.A	11,5
4	David	Kofroň	Gymnázium Rokycany	1.B	10
5	Jakub	Holovský	Gymnázium Beroun	1.B	9,5

Obsah

Úvod	3
Zadání úloh	4
Řešení teoretických úloh	10
Řešení experimentálních úloh	51
Seriál o astronomii	75
Pořadí nejlepších řešitelů	96
Obsah	98

JAN HRADIL A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

X. ročník – 1996/97

Předmluva: Jan Hradil

Autoři řešení úloh:

Miroslav Beláň (I.4, II.2), Pavel Bubák (I.2),
Andrea Budovičová (I.6, VI.6), Tomáš Drbohlav (V.2),
Michal Fabinger (I.3), Jiří Franta (I.5, II.4, III.2, IV.2, V.4),
Jana Gřondilová (I.1, III.3), Karel Houfek (VI.2), Jan Hradil (IV.5),
Michal Hvězda (III.1), Matouš Jirák (I.6, II.6, III.6, IV.6, V.5),
Jindřich Koloreň (III.4), Daniel Kráľ (I.5, II.2, III.5, IV.4, V.3, VI.1),
Martin Krsek (II.5, III.6, V.5), Jan Mocek (I.2, II.3, IV.5, V.6, VI.4),
Vladimír Slavík (VI.5), David Stanovský (I.4, IV.3, V.1),
Tomáš Sýkora (II.1, IV.1, VI.3), Veronika Štulíková (I.1, III.3)

Seriál na pokračování: Alexander Kupčo, Jana Kašparová, Andrea Budovičová

Sazba: Karel Houfek

Vydala Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Oddělení vnějších vztahů a propagace

Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2

Praha 1997

Vytisklo Reprografické středisko MFF UK

Malostranské nám. 25, 118 00 Praha

100 stran, 88 obrázků

Sazba písmem Computer Modern v programu L^AT_EX

Vydání první

Náklad 400 výtisků

Jen pro potřeby fakulty