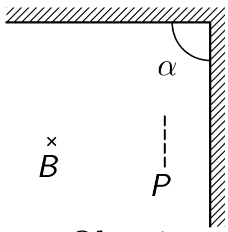
Zadání II. série

Termín odeslání: 16. prosince 1996

Úloha II . 1 ... *rohové zrcadlo*

Představte si, že stojíte v bodě B na obr. 1 před dvěma zrcadlovými plochami, které jsou na sebe kolmé ($\alpha = 90°$). Kolikrát uvidíte svůj obraz v zrcadlech? Co se stane, dáme-li před jednu stěnu překážku P (např. skříň)?

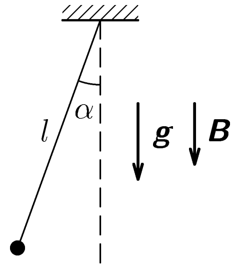
Jak se situace změní, budou-li zrcadla měnit svůj úhel ($\alpha < 90°$, resp. $\alpha > 90°$)?



Obr. 1

Úloha II . 2 ... *magnetické kyvadlo*

V homogenním tíhovém poli (tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}$) je na závěsu zanedbatelné hmotnosti délky $l = 1{,}00\,\mathrm{m}$ umístěna malá kovová kulička o hmotnosti $m = 10{,}0\,\mathrm{g}$. Na kuličku byl přiveden náboj o velikosti $Q = 5{,}0\,\mu\mathrm{C}$. Celá tato aparatura se nachází ve svislém homogenním magnetickém poli, jehož vektor magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ o velikosti $B = 0{,}5\,\mathrm{T}$ má stejný směr jako tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$. Vnější magnetická pole jsou vůči tomuto magnetickému poli zanedbatelná. Celá soustava se nachází v klidu. Závěs vychýlíme o úhel $\alpha = 7°$ a uvolníme. Popište pohyb kuličky po uvolnění.



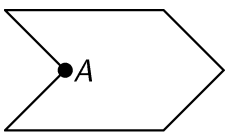
Obr. 2

Úloha II . 3 ... *jarový tryskáč*

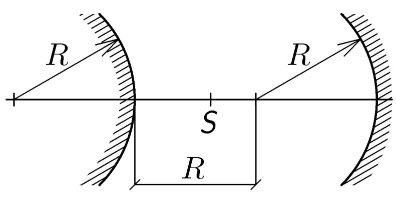
Matouš si vystřihl z tvrdého papíru lodičku, která je nakreslena na obr. 3 při pohledu shora. Do místa A pak kápl kapičku jaru a „loď" spustil na vodní hladinu. Nemálo se podivil, když loď „sama od sebe" vyrazila prudce vpřed. Umíte pohyb lodi vysvětlit? Platí pro něj zákon zachování energie?

Úloha II . 4 ... *zrcadla, aneb kdo je nejkrásnější*

Vypuklé a duté zrcadlo mají stejný poloměr křivosti R. Vzdálenost mezi vrcholy zrcadel je $2R$. V jakém bodě na optické ose zrcadel musíme umístit zdroj světla S, aby po odraze od vypuklého a dutého zrcadla splýval obraz bodu S se svým vzorem?



Obr. 3

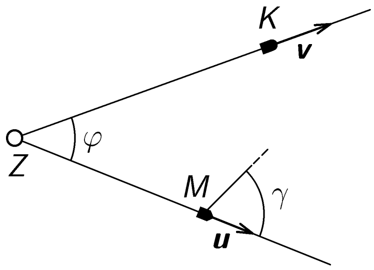


Obr. 4

Úloha II . 5 ... *dvojčata ve vesmíru*

Michal a Karel jsou dvojčata. V zájmu vyššího vědeckého poznání je posadíme každého do jiné kosmické lodi v týž čas $t = 0$ a vystřelíme ze Země Z rychlostmi $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ vstříc hvězdným dálavám. Abychom jim život co nejvíce znepříjemnili, jejich rychlosti svírají úhel φ, jak je to vidět na obr. 5. Po čas hvězdného putování se jejich rychlosti nemění. V čase t_0 se Michal, který se zrovna nachází v bodě M, rozhodne vyslat zprávu – rádiový signál svému sourozenci. Pod jakým úhlem γ vůči svému směru pohybu musí zaměřit signál, aby Karel zprávu obdržel?

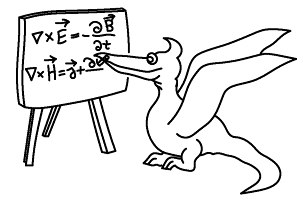
Vliv ostatních těles na dráhu lodí a paprsku zanedbejte. Diskutujte též případ, kdy vesmírné lodě nejsou vypuštěny ve stejný čas, ale Michal se vydá do vesmíru o dobu T dříve. Jak se změní výpočet budou-li velikosti rychlostí $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ blízké rychlosti světla c?



Obr. 5

Úloha II . 6 ... *kostka cukru*

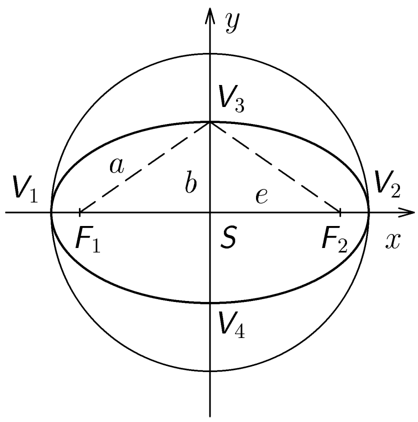
Zjistěte, jaký tlak vydrží kostka cukru, tj. jaká je její mez pevnosti v tlaku. V řešení nezapomeňte uvést parametry použitých kostek (rozměry kostky, značku cukru apod.). Vhodnou metodou proveďte tolik měření, aby vaše výsledky byly průkazné (nejméně deset měření na jeden druh kostky). Z výsledků zkuste vyvodit nějaké závěry, můžete např. odhadnout práci potřebnou na rozdrcení kostky cukru na „cukr krystal“.



Seriál na pokračování

Kapitola 2

V této kapitole se naučíme počítat polohy planet pomocí Keplerových zákonů (KZ). První KZ říká, že se planety pohybují po elipsách, v jejichž jednom ohnisku se nachází Slunce. V následujícím odstavci jsou proto shrnuty základní poznatky o elipse.

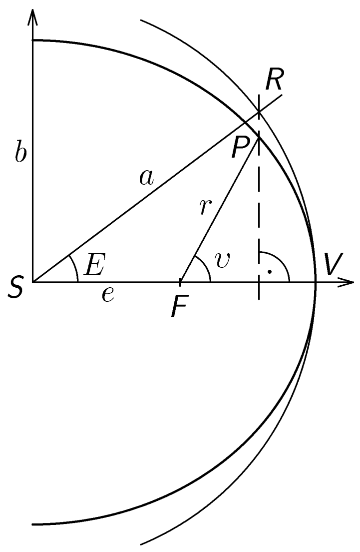


Obr. 6

Elipsa je útvar, který vznikne projekcí kružnice do roviny. V rovině existuje právě jedna přímka (tzv. **hlavní osa**) procházející středem elipsy S, která vytne na elipse úsek délky $2a$, kde a značí poloměr původní kružnice. Na obr. 6 jsme ji ztotožnili s osou x. Naopak osa y ze všech výše zmíněných přímek vytne na elipse úsek nejmenší (tzv. **vedlejší osa**). Délku tohoto úseku označme $2b$. Protože elipsa vznikla projekcí, jsou všechny vzdálenosti oproti původním ve směru osy x nezměněny a ve směru osy y zmenšeny v poměru b/a. Z tohoto faktu plynou dvě důležité věci: rovnice elipsy a vztah pro plochu elipsy S_E. Rovnice kružnice vypadá takto: $x^2 + y^2 = a^2$, což vyjadřuje, že kružnice je množina bodů, které mají od středu (umístěného v počátku souřadného systému) stejnou vzdálenost a. Tuto rovnici přepíšeme do tvaru $y^2 = a^2 - x^2$. Protože jsou všechny rozměry ve směru osy y zmenšeny, bude mít rovnice elipsy na obr. 6 tvar $y^2 = (b/a)^2(a^2 - x^2)$, neboli

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Kružnici si můžeme přestavit jakoby složenou ze spousty obdélníků namířených ve směru osy y. Po projekci se plocha těchto obdélníků (a tím i plocha kružnice S_O) zmenší v poměru b/a, takže $S_E = (b/a)S_O = \pi ab$.



Obr. 7

Zavedeme některé důležité pojmy. Vzdálenost a nazýváme **délkou hlavní poloosy** a b **délkou vedlejší poloosy**. Body F_1 a F_2 nalézající se na hlavní ose ve vzdálenosti a od vedlejších vrcholů V_3 a V_4 se nazývají **ohniska** elipsy. Můžete si zkusit dokázat, že body ležící na elipse mají součet vzdáleností od obou ohnisek konstantní a rovný právě $2a$. **Excentricita** elipsy e je definována vztahem

$$e = |SF_1|/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a \tag{2}$$

a charakterizuje míru zploštění elipsy (na obrázcích je vyznačena délková hodnota excentricity $|SF_1|$, pro potřeby výpočtů se používá bezrozměrné e). Pro kružnici je $e = 0$ a čím je elipsa protáhlejší, tím víc se e blíží k jedničce.

Pusťme se do počítání poloh planet. Zákon popisující rychlost oběhu planet kolem Slunce je právě druhý KZ. Podle něj opíše průvodič, což je úsečka spojující Slunce a planetu, za jednotku času vždy stejnou plochu. Nechť se planeta nejprve nachází v periheliu (tj. nejblíže Slunci – na obr. 7 bod V). Za dobu t se posune do místa P. Předpovědět polohu planety znamená pro dané t určit úhel $\angle VFP$ (tzv. **pravá anomálie** υ – *ypsilon*). Za dobu jednoho oběhu T opíše průvodič plochu $S_E = \pi ab$. Z druhého KZ pak plyne, že za dobu t opíše plochu

$$S_{VFP} = t(S_E/T) = \pi ab(t/T)\,. \tag{3}$$

Pokud by se planeta pohybovala po kružnici, otočila by se za čas t o úhel M (tzv. **střední anomálie**) vyjádřený v radiánech

$$M = 2\pi(t/T). \tag{4}$$

Plochu opsanou průvodičem za dobu t tak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$S_{VFP} = \frac{1}{2}abM. \tag{5}$$

Zbývá nám už jenom určit velikost plochy S_{VFP} jako funkci úhlu υ. Útvar VFP vznikne projekcí útvaru VFR. Plochu tohoto útvaru vyjádříme jednoduše pomocí úhlu $\angle VSR$ (tzv. **excentrická anomálie** E):

$$S_{VFR} = S_{VSR} - S_{\Delta RSF} = \pi a^2 \frac{E}{2\pi} - \frac{1}{2}a(ae\sin E), \tag{6}$$

kde excentrickou anomálii E udáváme v radiánech! Protože $S_{VFP} = (b/a)S_{VFR}$ bude pro E po dosazení do (5) platit

$$\pi ab\frac{E}{2\pi} - \frac{1}{2}abe\sin E = \frac{1}{2}abM. \tag{7}$$

Po vykrácení výrazem $\frac{1}{2}ab$ tak dostáváme slavnou **Keplerovu rovnici**

$$E - e\sin E = M. \tag{8}$$

Bohužel z této rovnice nemůžeme vyjádřit E přímo jako funkci M a e. Abychom ji vyřešili, budeme muset použít nějakou numerickou metodu. V tomto případě je snad nejjednodušší iterační metoda. V prvním kroku zvolíme $E_1 = M$. Posloupnost čísel E_k, která se pro rostoucí k blíží k řešení Keplerovy rovnice je pak dána rekurentním vztahem

$$E_{k+1} = M + e\sin E_k. \tag{9}$$

Teď už stačí jen najít vztah mezi pravou a excentrickou anomálií. Z obr. 7 plyne

$$r\sin v = \frac{b}{a} a \sin E, \quad r\cos v = a\cos E - ae, \tag{10}$$

kde r je délka průvodiče. Sečtením kvadrátů předchozí dvojice rovnic obdržíme

$$r^2 = r^2\sin^2 v + r^2\cos^2 v = b^2\sin^2 E + a^2\cos^2 E - 2a^2 e\cos E + a^2e^2. \tag{11}$$

Vedlejší poloosu vyjádříme ze vztahu (2)

$$r = a\sqrt{(1-e^2)\sin^2 E + \cos^2 E - 2e\cos E + e^2} = a\sqrt{1 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E}, \tag{12}$$

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{13}$$

Pro $\mathrm{tg}(v/2)$ dostaneme užitím goniometrických vzorců z (10) a (13)

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}} = \pm\sqrt{\frac{r - a\cos E + ae}{r + a\cos E - ae}}, \tag{14}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - e\cos E - \cos E + e}{1 - e\cos E + \cos E - e}} = \pm\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sqrt{\frac{1-\cos E}{1+\cos E}}, \tag{15}$$

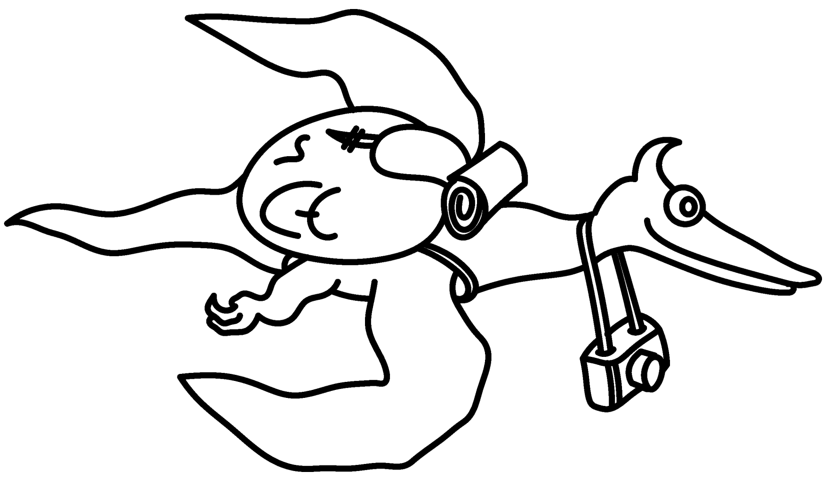
neboli

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{E}{2}. \tag{16}$$

Zrekapitulujme si celý postup ještě jednou. Parametry popisující dráhu planety jsou: velká poloosa elipsy a, excentricita e elipsy a doba oběhu planety T. Pro daný čas t vypočteme z (4) střední anomálii M. Vyřešením Keplerovy rovnice (8) získáme excentrickou anomálii E a ze vztahů (13) a (16) konečně vypočteme vzdálenost planety od Slunce r a pravou anomálii v. Samozřejmě, že nevíme nic o poloze planety na obloze. Abychom to dokázali, musíme specifikovat umístění roviny oběhu planety v prostoru (např. vzhledem k jarnímu bodu), ale o tom až příště.

Úloha S . II ... ***oběžná dráha Země kolem Slunce***

Určete pravou anomálii a vzdálenost Země od Slunce po $1/4$ oběžné doby Země kolem Slunce od průchodu Země periheliem. Velká poloosa je $a = 1\,\mathrm{AU}$ a excentricita $e = 0{,}0167$.



Naše adresa: FKS, KTF MFF UK
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha