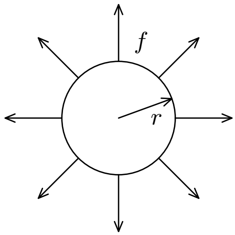
10. ročník, úloha I . P ... *balónek* *(6 bodů; průměr ?; řešilo 92 studentů)*

Jak moc můžete nafouknout pouťový balónek, dokud nepraskne?

Předpokládejte, že balónek má tvar koule. Nenafouknutý nechť má poloměr r_0. Je z gumové blány, která má v jistém přiblížení tyto elastické vlastnosti: roztahujeme-li kruh vyříznutý z této blány na okraji tak, že síla na jednotku délky obvodu je f, bude poloměr kruhu r přímo úměrný f, $r = r_0(1+af)$; a je konstanta úměrnosti (viz obr. 1). Materiál praskne při maximální síle na jednotku délky f_{max}.

Na jedno nadechnutí naberete do plic objem V_{fuk} vzduchu a ten pak fouknete do balónku. Kolikrát můžete do balónku fouknout, než praskne, a jaký bude mít rozměr?



Obr. 1

Před samotným řešením příkladu je třeba si důkladně přečíst zadání a povšimnout si, že v zadání úlohy je popsáno chování kruhu z uvažované gumové blány, zatímco úloha požaduje vyšetřit chování kulového povrchu, které by mohlo být zcela odlišné. Pro správné pochopení celé situace je dobré si také povšimnout, že pro $r = r_0$ je $f = 0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ – „pnutí je v počátečním stavu nulové“.

Prvním krokem k úspěšnému vyřešení příkladu je najít závislost poloměru balónku R na f. Nechť je balónek, jehož počáteční poloměr byl R_0, nafouknut na poloměr R. Uvážíme kulový vrchlík o poloměru ϱ. Jelikož povrch koule má v každém bodě stejné vlastnosti, platí $\varrho/\varrho_0 = R/R_0$. Je-li vrchlík dostatečně malý, platí v označení dle obr. 2 $\varphi = \varrho/R$ a pro jeho výšku platí

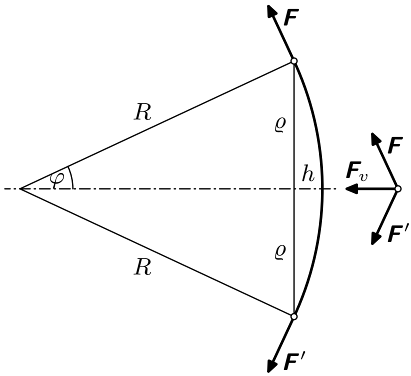
$$h = R(1-\cos\varphi) = R\left[1-\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\right] = R\frac{\varphi^2}{2}\,.$$

Odtud získáme $h/\varrho = \varphi/2$, což znamená, že pro malé φ je vrchlík mnohem „plošší než širší“ a lze tudíž pro něj použít vztahy platné pro kruh. Odtud již přímo plyne

$$(1+af) = \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{R}{R_0}\,.$$

Tento vztah lze také získat porovnáním poměru obsahů dvou kruhů z uvažovaného materiálu s poměrem povrchů dvou koulí

$$(1+af)^2 = \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R_0^2}\,.$$



Obr. 2

Platí tedy $R = R_0(1+af)$. Odtud již snadno odvodíme, že maximální objem balónku je

$$V_{\max} = \frac{4}{3}\pi R_{\max}^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3(1+af_{\max})^3\,.$$

V případě, že zanedbáme přetlak v balónku vzniklý pnutím v gumové bláně, lze do balónku fouknout celkem

$$n = \left[\frac{V_{\max}-V_0}{V_{\text{fuk}}}\right] \text{krát} \ \ ([x] \text{ znamená dolní celou část čísla } x)\,,$$

kde $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$.

K dosažení přesnějšího výsledku je třeba uvážit přetlak v balónku. Uvážíme opět kulový vrchlík o poloměru ϱ. Pro dostatečně malý kulový vrchlík platí $\varphi = \varrho/R$. Součet velikostí elastických sil působících po jeho obvodu je $F = 2\pi\varrho f$, velikost jejich výslednice, která směřuje do středu balónku, je

$$F_v = F\varphi = 2\pi\varrho f\frac{\varrho}{R} = \frac{2\pi\varrho^2 f}{R}\,.$$

Tato výslednice způsobuje přetlak

$$\Delta p = \frac{F_v}{\pi\varrho^2} = \frac{2f}{R}\,.$$

Tento vztah lze také odvodit následovně: Představíme si kouli jako dvě polokoule, délka jejich spoje je $2\pi R$ a působí tedy na něm síla $2\pi Rf$. Tato síla odpovídá síle způsobené tlakem, která se snaží obě polokoule odtrhnout. Získáváme tedy

$$\Delta p\pi R^2 = 2\pi Rf \quad \text{a tedy} \quad \Delta p = \frac{2f}{R}\,.$$

Protože teplota v balónku je stejná jako teplota v okolí balónku platí

$$(p_a + \Delta p)V_{\max} = p_a(V_0 + nV_{\text{fuk}})\,,$$

$$n = \left[\frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3}{V_{\text{fuk}}p_a}\left(p_a + \frac{2f_{\max}}{R_0 + R_0 af_{\max}}\right)(1 + af_{\max})^3 - \frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3}{V_{\text{fuk}}}\right]\,.$$

Za předpokladu, že teplota v balónku nedosáhne teploty v okolí balónku, lze pro přepočet objemu použít vztahů platných pro adiabatický děj.

K řešení lze přidat ještě jeden zajímavý postřeh k úloze. Vypočteme práci potřebnou k roztažení gumovému kruhu o počátečním poloměru r_0 na poloměr r. Platí

$$W = \int_{r_0}^{r} 2\pi\varrho\frac{\varrho - r_0}{r_0 a}\,\mathrm{d}\varrho = \pi\,\frac{2r^3 + r_0^3 - 3r^2 r_0}{3r_0 a}\,.$$

V některých řešeních se pracovalo s pojmem energie blány, který lze definovat pouze na základě tohoto vztahu. V žádném případě neplatí pro energii vztah obdobný vztahu pro energii povrchu kapaliny ($E = \sigma S$). Dále ukážeme, že vztah pro vykonanou práci neodporuje zákonu zachování energie. Vypočítáme plošnou hustotu energie

$$\varepsilon = \frac{E}{S} = \frac{2r}{3ar_0} + \frac{r_0^2}{3ar^2} - \frac{1}{a}\,.$$

Plošná hustota energie je tedy funkcí závislou pouze na poměru r a r_0 a tedy pro energii jakékoliv části blány, jejíž obsah je S, platí $E = \varepsilon S$. Rozdělili bychom původní blánu na n částí, každou bychom roztáhli samostatně ve stejném poměru a znovu je spojili. Vykonali bychom stejnou práci, jako kdybychom roztahovali přímo původní blánu. Platí tedy zákon zachování energie.

Daniel Král' & Jirka Franta

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.