10. ročník, úloha I . S ... *na procvičení pojmu hvězdné velikosti* *(7 bodů; průměr ?; řešilo 65 studentů)*

a) Jaká je absolutní magnituda Slunce M, je-li jeho zdánlivá magnituda $m = -26{,}74$?
b) Složky dvojhvězdy Castor v souhvězdí Blíženců jsou v dalekohledu jasné $m_A = 2{,}0$ a $m_B = 2{,}9$. Neozbrojené lidské oko však tyto hvězdy nerozliší. Jak jasná se jeví tato dvojhvězda při pozorování pouhým okem?
c) V jaké poloze na své dráze se jeví Venuše ze Země nejjasnější? Předpokládejte, že Venuše obíhá kolem Slunce přibližně po kružnici s poloměrem $r = 0{,}7233$ AU a že jasnost v celé viditelné a osvětlené části povrchu Venuše je konstantní. U těch, co neumějí derivovat, se spokojíme s numerickou hodnotou vzdálenosti Venuše od Země; nakreslete si graf závislosti jasnosti Venuše na vzdálenosti a odečtěte z něj polohu největší jasnosti.
d) Pokuste se odhadnout jasnost Venuše v poloze, kdy je na obloze od Slunce úhlově nejdál. Albedo Venuše (tj. poměr odražené ku dopadající intenzitě záření) je 0,76 a její poloměr $R_V = 6\,052$ km. Předpokládejte, že záření odražené od Venuše se rovnoměrně rozptýlí do celého poloprostoru a že jasnost každého světlého místa viditelného povrchu bude, jako by Slunce bylo právě nad ním.
e) Určete, v jaké největší a nejmenší výšce nad obzorem se v naší zeměpisné šířce nachází Slunce během roku. Rovina ekliptiky s rovinou zemského rovníku svírá úhel 23,5°.

a) Budeme-li se na Slunce dívat ze vzdálenosti 10 pc, bude poměr světelného toku Φ_{10} k světelnému toku Φ z normální vzdálenosti r roven poměru druhých mocnin vzdáleností

$$\frac{\Phi_{10}}{\Phi} = \left(\frac{r}{10}\right)^2 ,$$

kde r je vyjádřeno v parsecích. Dosazením do Pogsonovy rovnice dostaneme

$$M - m = -2{,}5 \log \left(\frac{r}{10}\right)^2 = -5 \log \frac{r}{10} = 5 - 5 \log r \,. \tag{1}$$

Číselně pak $M = 4{,}83$.

b) Protože oko dvojhvězdu nerozliší, vnímá ji jako jeden objekt o celkovém světelném toku

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B ,$$

kde toky Φ_A,Φ_B odpovídají jednotlivým složkám dvojhvězdy. Z Pogsonovy rovnice obdržíme pro celkovou jasnost objektu m vztah

$$m - m_A = -2{,}5 \log \frac{\Phi}{\Phi_A} = -2{,}5 \log \left(1 + \frac{\Phi_B}{\Phi_A}\right) .$$

Poměr Φ_B/Φ_A získáme opět z Pogsonovy rovnice

$$m_B - m_A = -2{,}5 \log \frac{\Phi_B}{\Phi_A} , \qquad \text{neboli} \qquad \frac{\Phi_B}{\Phi_A} = 10^{0{,}4(m_A - m_B)} .$$

Pro celkovou jasnost dvojhvězdy tak dostáváme

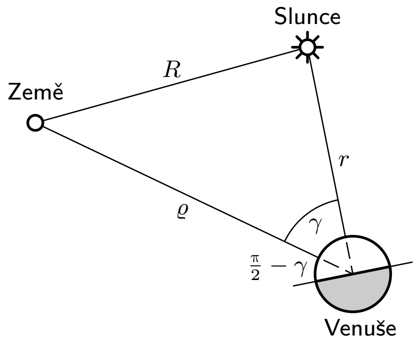
$$m = m_A - 2{,}5 \log \left(1 + 10^{0{,}4(m_A - m_B)}\right) = -2{,}5 \log \left(10^{-0{,}4 m_A} + 10^{-0{,}4 m_B}\right) .$$

Číselně $m = 1{,}6$.

c) Prostým okem vnímáme na obloze Venuši jako bodový objekt. Jeho jasnost je určena celkovým zářivým tokem Φ dopadajícím na Zem od všech částí viditelného osvětleného povrchu Venuše. Podle návodu k úloze budeme předpokládat jasnost viditelného povrchu za konstantní, tj.

$$\Phi \sim \frac{S}{\varrho^2}\,,$$

kde S je plocha viditelné osvětlené části Venuše (přesněji její projekce při pohledu ze Země) a ϱ je vzdálenost Venuše od Země. Tento předpoklad nemusí být zase tak špatný, při pohledu dalekohledem vypadá osvětlená část Venuše skutečně stejně jasná.



Obr. 1

Hranice světla a stínu vymezuje na povrchu Venuše kružnici. Tu vidíme ze Země pod úhlem $\frac{\pi}{2} - \gamma$, kde γ je úhel Slunce–Venuše–Země (viz obr. 1). Proto jsou rozměry kružnice v jednom směru zkráceny

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\right| = |\cos\gamma| \text{ krát.}$$

Její plocha pak je

$$S_O = |\cos\gamma|\pi R_V^2\,,$$

kde R_V představuje poloměr Venuše. Můžeme tak psát

$$S = \frac{1}{2}\pi R_V^2 + \frac{1}{2}S_O\,, \qquad \text{pro } \gamma < \frac{\pi}{2}\,,$$

$$S = \frac{1}{2}\pi R_V^2 - \frac{1}{2}S_O\,, \qquad \text{pro } \gamma > \frac{\pi}{2}\,.$$

Celkově tedy

$$S = \frac{1}{2}\pi R_V^2(1 + \cos\gamma)\,.$$

Velikost úhlu γ vyjádříme z kosinové věty

$$\cos\gamma = \frac{\varrho^2 + r^2 - R^2}{2\varrho r}\,.$$

Pro celkový tok Φ dopadající na Zem tak dostáváme

$$\Phi \sim \frac{1 + \cos\gamma}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{\varrho^2 + r^2 - R^2}{2\varrho^3 r}\,.$$

Vzdálenost ϱ_0, ve které je Venuše nejjasnější, teď můžeme určit buď z grafu a nebo pomocí diferenciálního počtu. Derivace toku Φ podle vzdálenosti ϱ musí být v místě maxima nulová

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{3R^2 - \varrho^2 - 3r^2 - 4\varrho r}{2\varrho^4 r}\,, \qquad \text{takže} \qquad 3R^2 - \varrho_0^2 - 3r^2 - 4\varrho_0 r = 0\,.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice (a po zamítnutí záporného kořenu) nakonec dostáváme

$$\varrho_0 = \sqrt{3R^2 + r^2} - 2r\,.$$

Ještě bychom pomocí druhé derivace měli ověřit, že se jedná skutečně o maximum. To už ale necháme na vás.

Číselná hodnota $\varrho_0 = 0{,}43\,\mathrm{AU}$ kupodivu docela přesně odpovídá skutečnosti.

d) Je-li Venuše na obloze od Slunce úhlově nejvzdálenější, jeví se na obloze v 1. nebo 3. čtvrti, neboli úhel Slunce–Venuše–Země je pravý. Tok Φ_V dopadající na Zemi bude úměrný albedu a, slunečnímu toku $W(r)$ ve vzdálenosti r od Slunce, osvětlené, ze Země viditelné, ploše S a nepřímo úměrný povrchu polokoule $2\pi\varrho^2$ o poloměru ϱ rovném vzdálenosti Venuše od Země (což odpovídá předpokladu, že se odražené sluneční světlo rovnoměrně rozptýlí do celého poloprostoru).

Osvětlená, ze Země viditelná, část povrchu má z pohledu Slunce plochu

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi R_V^2\,.$$

Podle návodu k úloze bychom naopak měli za plochu S dosadit

$$S_2 = \frac{1}{4}4\pi R_V^2 = \pi R_V^2\,.$$

Z hlediska reality je první model přesnější, neboť $S_1 W(r)$ představuje energii, která dopadne na viditelnou část Venuše. Ani tento model však není dokonalý, protože se záření rozptyluje do většího prostorového úhlu než 2π. Samozřejmě i řešení s $S = S_2$ jsme ohodnotili plným počtem bodů.

Celkově máme pro tok dopadající na Zemi z Venuše

$$\Phi_V = \frac{SaW(r)}{2\pi\varrho^2}\,,$$

přičemž z Pythagorovy věty je $\varrho^2 = R^2 - r^2$. Použitím Pogsonovy rovnice pro jasnost Venuše m_V a Slunce $m_\odot$ dostáváme

$$m_V - m_\odot = -2{,}5\log\frac{\Phi_V}{W(R)}\,,$$

kde $W(R)$ je sluneční světelný tok dopadající na Zem, takže

$$\frac{W(r)}{W(R)} = \left(\frac{R}{r}\right)^2\,.$$

Po dosazení do Pogsonovy rovnice nakonec obdržíme

$$m_V = m_\odot - 2{,}5\log\frac{1}{2\pi}\frac{S}{R^2 - r^2}\frac{R^2}{r^2}a\,.$$

Číselná hodnota pro $S = S_1$ vyjde $m_V = -4{,}5$, což zase kupodivu skoro koresponduje se skutečností.

e) Rovina rovníku svírá s rovinou horizontu úhel $90^\circ - \varphi$, kde φ je zeměpisná šířka. Rovina ekliptiky svírá s rovníkem úhel $\varepsilon = 23{,}5^\circ$. Na obloze se tedy jeví jako kružnice, která s rovníkem svírá tentýž úhel ε. Slunce během roku opíše na obloze celou ekliptiku. V den letního slunovratu je nad rovníkem právě ve výšce ε, takže se v pravé poledne nachází nad horizontem nejvýše a to v

$$h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \varepsilon$$

(číselně pro $\varphi = 50^\circ$ je $h_{\max} = 63{,}5^\circ$). Druhá část úlohy je chyták. Nejmenší možná výška Slunce *nad* obzorem je 0° (v této poloze se alespoň v našich zeměpisných šířkách nachází během dne hned dvakrát). Nejníže pod obzorem se Slunce nachází o půlnoci zimního slunovratu a to je $h_{min} = -63{,}5^\circ$.

Alexander Kupčo