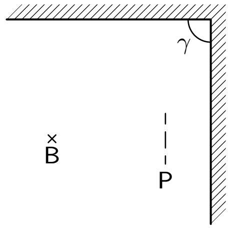
10. ročník, úloha II . 1 ... *rohové zrcadlo* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 107 studentů)*

Představte si, že stojíte v bodě B *na obr. 1 před dvěma zrcadlovými plochami, které jsou na sebe kolmé ($\gamma = 90°$). Kolikrát uvidíte svůj obraz v zrcadlech? Co se stane, dáme-li před jednu stěnu překážku* P *(např. skříň)?*

Jak se situace změní, budou-li zrcadla měnit svůj úhel ($\gamma < 90°$, resp. $\gamma > 90°$)?



Obr. 1

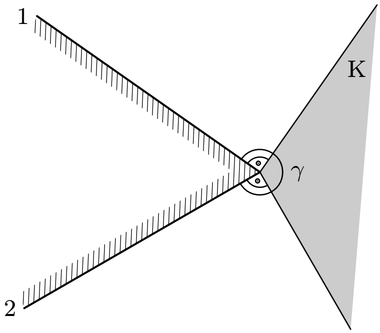
Nejprve několik vět úvodem. Úloha zněla: „Kolikrát uvidíte svůj obraz v zrcadlech?“ Měli bychom tedy uvažovat reálný případ (lidské tělo, dvě oči). Samozřejmě, že to přináší problémy. Pokud totiž máte oči dvě, uvidíte se obecně (tj. v některých polohách) vícekrát, nežli jednooký. Vzhledem k tomu, že by se úloha v případě dvou očí stala komplikovanou (vzdálenost očí, dominance jednoho z nich . . .), uvažujme proto následující formulaci úlohy „Kolikrát uvidí zornička sama sebe?“

Uvědomme si, co vlastně znamená, že se zornička uvidí v zrcadle. Znamená to, že paprsek, který „z ní“ vyšel, na ni zpět dopadne.

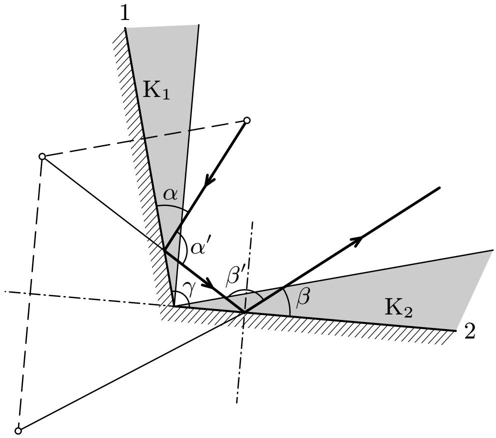
Úlohu budeme řešit bez překážky (v případě překážky se postupuje obdobně, ale je to zdlouhavé) pro obecný úhel γ a budeme diskutovat tři případy.

a) ($180° \leq \gamma < 360°$)
Je zřejmé, že pokud se paprsek odrazí od jednoho ze zrcadel, nikdy se neodrazí od toho druhého. To znamená, že maximální počet odrazů paprsku, vycházejícího ze zorničky tak, aby na ni dopadl zpět, je roven jedné. Zornička se tedy uvidí 1krát.

Nemusí se ale vidět ani jednou a to v tom případě, že je v oblasti K, ze které neexistuje ani jedna kolmice na jedno ze zrcadel (viz obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

b) ($90° < \gamma < 180°$)
Uvažujme případ, že se paprsek vycházející ze zorničky odrazil nejprve od jednoho zrcadla, pak od druhého a dopadl zpět na zorničku (viz obr. 3). Je dobré si také uvědomit, že pokud se paprsek pohybuje směrem do vrcholu úhlu svíraného zrcadly, pak se každý následující úhel odrazu liší od předchozího o úhel γ, a pokud se paprsek vrací, liší se o úhel $-\gamma$.

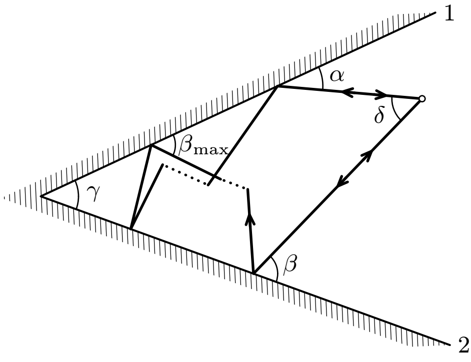
Pokud paprsek dopadá pod úhlem α na zrcadlo 1, dopadne na zrcadlo 2 pod úhlem $180^\circ - (\alpha + \gamma)$. Aby se paprsek mohl vrátit do zorničky, musel by být úhel $\alpha' + \beta'$ menší než 180°, tj. $\gamma \leq 90^\circ$. To však není v tomto případě splněno. Zároveň je zřejmé, že žádný z paprsků, které se jednou odrazily od každého ze zrcadel, se nikdy neodrazí potřetí.

Zbývá možnost, že se paprsek odrazí právě jednou od jednoho ze zrcadel. Paprsek vycházející ze zorničky se může odrazit jednak od zrcadla 1 a vrátit se zpět, jednak od zrcadla 2 a vrátit se zpět. To znamená, že paprsek pokaždé dopadá kolmo na dané zrcadlo. Vždy nastane alespoň jedna z těchto možností. Může se ale stát, že opět neexistuje kolmice vedená ze zorničky na jedno ze zrcadel, a pak se uvidí jen jednou (viz obr. 3, oblasti K_1 a K_2).

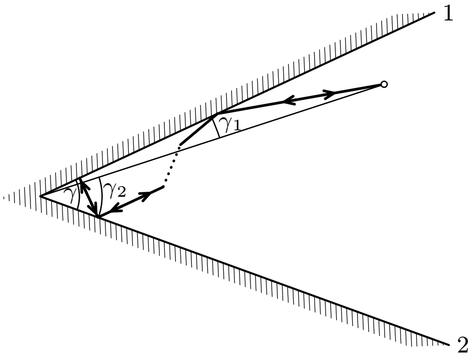
Tedy maximálně se zornička v případě b) uvidí 2krát, minimálně jednou.

c) $(0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ)$
Budeme uvažovat dvě varianty. Paprsek jdoucí ze zorničky se odrazí, nežli na ni dopadne zpět (viz obr. 4 a 5)

i) sudý počet krát,
ii) lichý počet krát.



Obr. 4



Obr. 5

Rozebereme nejprve „sudou“ variantu. Jak již bylo řečeno, pokud paprsek dopadne na zrcadlo 1, potom 2, potom 1, …, po každém odrazu se velikost následujícího úhlu dopadu zvětší o γ. To platí samozřejmě pouze tehdy, pokud paprsek postupuje směrem do vrcholu úhlu, který zrcadla svírají. Označme jako $\beta_{\max}$ úhel, pod kterým paprsek začíná z úhlu „vystupovat“ (viz schematicky obr. 4).

Platí, že

$$\beta_{\max} = 180^\circ - \alpha - (k-1)\gamma\,,$$

kde k je polovina celkového počtu odrazů. Nežli paprsek dopadne zpět na zorničku, odrazí se $(k-1)$-krát. Označme úhel, který při dopadu do zorničky paprsek svírá se zrcadlem 2, jako β a úhel, který svírá tento paprsek s paprskem vycházejícím ze zorničky, jako δ. Vzhledem k tomu, že

$$\beta = \beta_{\max} - (k-1)\gamma$$

a také

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + \gamma + \delta = 360^\circ,$$

dostáváme pro úhel δ rovnici

$$\delta = 180^\circ - (2k - 1)\gamma\,.$$

Očividně $0^\circ \le \delta \le 90^\circ$. Odtud plyne pro $k_{\max}$ nerovnost

$$k_{\max} \le \frac{90^\circ}{\gamma} + \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

Zornička se v „sudé“ variantě c) uvidí

$$n_{\mathrm{S}} = 2\left\lfloor \frac{90^\circ}{\gamma} + \frac{1}{2} \right\rfloor\text{-krát}$$

($\lfloor x \rfloor$ znamená celou část, dvojka je tam proto, že pokud se uvidím v jednom zrcadle, uvidím se i ve druhém; viz v obr. 4 dva druhy šipek, tj. směru cesty pro paprsek).

Přejděme k „liché“ variantě. Při ní, po určitém počtu odrazů, dojde k situaci, že paprsek dopadne na jedno ze zrcadel pod pravým úhlem a vrací se po stejné dráze zpět. To znamená, že platí $\alpha + k\gamma = 90^\circ$.

Nicméně zde je nutno si uvědomit, že existuje omezení pro úhel α. (to je rozdíl od „sudé“ varianty, kde úhel α v rovnici pro $k_{\max}$ nevystupoval). Pokud se paprsek ze zorničky odrazí nejprve od zrcadla 1 (viz obr. 5), je zřejmé, že $\alpha_{1\min} = \gamma_1$. Tedy

$$k_{1\max} = \left\lfloor \frac{90^\circ - \gamma_1}{\gamma} \right\rfloor\,.$$

V případě, že se paprsek nejprve odrazí od zrcadla 2, je

$$k_{2\max} = \left\lfloor \frac{90^\circ - \gamma_2}{\gamma} \right\rfloor\,.$$

(Snadno se dá např. ukázat, že rozdíl $|k_{1\max} - k_{2\max}| \le 1$). Celkový počet obrazů v liché variantě je tedy

$$n_{\mathrm{L}} = k_{1\max} + k_{2\max} + 2$$

(dvojka znamená přímý odraz v zrcadlech).

Celkový počet svých obrazů, které tak zornička uvidí, bude roven

$$n = n_{\mathrm{S}} + n_{\mathrm{L}}\,.$$

Speciálně pro $\gamma = 90^\circ$ bude $n_{\mathrm{S}} = 2$. Nicméně se zornička „sudou“ variantou uvidí jen jednou. To proto, že paprsek z ní vycházející bude rovnoběžný s paprskem vcházejícím, tj. přicházejí ze stejného (pro zorničku!) místa, a ona je nemůže rozlišit. (Pokud bychom zorničku nahradili bodem, vracející se paprsek by jej minul. Zde hraje roli konečná velikost zorničky.)

Tento případ nastane pro všechny úhly γ, pro něž nastává v nerovnici (1) rovnost. V daných případech je tedy nutno odečíst jedničku od celkového počtu obrazů. (Je užitečné si to nakreslit, aby bylo vidět, že vlastně uvidíte všechny blízké body zobrazovaného bodu, jen tento bod ne.)

A tak se zornička pro $\gamma = 90^\circ$ uvidí 3krát.

Pokud je v místnosti překážka ($\gamma = 90^\circ$), uvidí se zornička pouze dvakrát, protože překážka ze zadání stojí v cestě jednomu paprsku. Pokud by tato překážka byla posunutá nevhodněji, viděla by se zornička pouze jednou, případně ani jednou.

Nakonec bych ještě rád zdůraznil, že vztah pro n se liší od vzorce

$$n = \left\lfloor \frac{360^\circ}{\gamma} \right\rfloor - 1\,,$$

který bychom „vydedukovali“ bez hlubšího rozboru. Jako příklad bych uvedl $\gamma = 72^\circ$. V tomto úhlu existují dvě oblasti, ve kterých se zornička uvidí 5krát, a jedna oblast, ze které se uvidí jen 4krát.

Tomáš Sýkora

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.