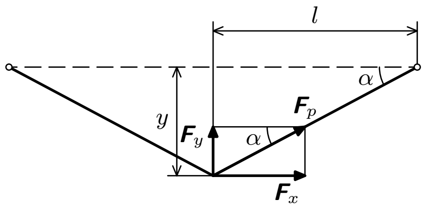
10. ročník, úloha III . 4 ... cirkus *(5 bodů; průměr ?; řešilo 51 studentů)*

Artista padá na silně napnutou plachtu z výšky $h = 1\,\mathrm{m}$. Jaký bude maximální průhyb plachty, je-li průhyb s artistou v klidu $\Delta y = 2\,\mathrm{cm}$? Považujte všechny výchylky za malé.

V zadání je napsáno, že plachta, na kterou artista padá, je silně napjatá. Co to znamená? Pnutí uvnitř plachty je natolik velké, že jeho přírůstek příslušející dalšímu malému protažení plachty je oproti původní hodnotě zanedbatelný. Dále uvažme, že zmíněná protažení jsou dostatečně malá právě v tomto smyslu.

Z předchozího odstavce plyne, že síla $\boldsymbol{F}_p$ (viz obr. 1), působící ve směru plachty, má konstantní velikost. Pro další výpočet je zajímavá pouze její složka $\boldsymbol{F}_y$. Složka $\boldsymbol{F}_x$ musí být nulová, jinak by se nám artista začal pohybovat ve vodorovném směru. To však není možné, protože situace je dostatečně symetrická, jak plyne ze zadání.



Obr. 1

Pro velikost síly F_y platí (použijeme $\sin\alpha \doteq \operatorname{tg}\alpha$ platné pro malé úhly α)

$$F_y = F_p \sin\alpha \doteq F_p \frac{y}{l} = ky\,.$$

Konstantu k určíme ze silové rovnováhy v poloze, v níž je artista v klidu (prohnutí o Δy). Síla plachty musí být kompenzována gravitační silou.

$$mg = k\Delta y \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta y}\,,$$

kde m je hmotnost artisty.

Maximální průhyb plachty vypočteme ze zákona zachování energie. Během pádu se nejprve mění potenciální energie artisty na kinetickou energii a na energii pružnosti plachty. Nejhlouběji bude artista zřejmě v místě, kde se zastaví, tedy kde jeho kinetická energie bude nulová. Jelikož pružné síle $F = ky$ odpovídá energie $W = \frac{1}{2}ky^2$, máme

$$mg(h + y_{\max}) = \frac{1}{2}ky_{\max}^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{\Delta y}y_{\max}^2\,.$$

Toto je kvadratická rovnice, jejímž jediným fyzikálně smysluplným řešením je

$$y_{\max} = \Delta y + \sqrt{(\Delta y)^2 + 2h\Delta y} \doteq 22{,}1\,\mathrm{cm}\,.$$

Nakonec se zmíníme o výsledku, které vychází ze zcela jiných předpokladů, totiž že plachta bez artisty má právě klidovou „délku“ (zde se asi není možné vyhnout nějaké úvaze o struktuře plachty, aby se vyjasnil význam té „délky“). Pak je z Hookova zákona $F_p = \tilde{k}\Delta l$, kde Δl je změna délky plachty. V tomto případě, pokud zanedbáme $y_{\max}$ vůči h v potenciální energii, získáme

$$y_{\max} = \sqrt[4]{4h(\Delta y)^3}\,.$$

Důležitá poznámka. Řešení úlohy, jak bylo popsáno výše, odpovídá spíše dopadu akrobata na provaz, protože plachta byla uvažována více méně jednorozměrně. Pokud řešíme problém pro skutečně dvourozměrnou plachtu, nelze již brát rozměry artisty nekonečně malé. I v dvourozměrném případě však vychází maximální průhyb plachty přímo úměrný působící síle za předpokladu, že se plachta pod artistou příliš neroztáhne.

Číselně tedy dostaneme stejně velký průhyb jako v jednorozměrném případě. Tvar plachty ale bude jiný. Aproximujeme-li místo, v němž se artista dotýká plachty, kruhem o poloměru a a má-li nezatížená plachta tvar kruhu o poloměru b, bude z-ová souřadnice bodů plachty v závislosti na vzdálenosti od osy z

$$
\begin{aligned}
z &= -h \frac{\ln r/b}{\ln a/b}\,, \quad r > a\,,\\
z &= -h\,, \quad r \leq a\,,
\end{aligned}
$$

kde h je maximální průhyb plachty.

Jindřich Kolorenč

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.