10. ročník, úloha IV . 1 ... sever *(8 bodů; průměr ?; řešilo 80 studentů)*

Je to už dávno, co jsme my, organizátoři, chodili na své základní školy. Nicméně si všichni dobře pamatujeme, že jsme se učili, jak pomocí ručičkových hodinek a polohy Slunce na obloze přibližně stanovit sever. Po vás bychom chtěli, abyste nám vysvětlili, jak to funguje, proč to funguje a s jakou přesností (přibližně).

Cílem úlohy bylo, abychom si vyjasnili, jak funguje známá to poučka ze školy o určení severu pomocí ručičkových hodinek

Jsme-li na severní polokouli a namíříme-li malou ručičku na Slunce, pak osa úhlu β, určeného malou ručičkou, středem ciferníku (vrchol úhlu) a dvanáctkou, určuje severojižní směr a jih je před námi. Po otočení se o 180° *se bude náš pohled upírat na sever.*

Toť tedy poučka. Zbývá říci, proč platí a hlavně, jak přesně. Následující řešení čerpá z myšlenek Tomáše Braunera.

Výše zmíněné pravidlo připouští dvě interpretace:

a) hodinová ručička míří ke Slunci,
b) hodinová ručička míří k průmětu Slunce do tečné roviny k Zemi v místě pozorovatele, ciferník hodinek také leží v tečné rovině. Jinak řečeno, rovina určená Sluncem a hodinovou ručičkou je vertikální, tj. kolmá na horizont.

První z variant je nejednoznačná, protože umožňuje rotaci kolem osy určené ručičkou. Proto budeme vyšetřovat druhou interpretaci a zvláště pak její přesnost.

Měříme-li čas od poledne (tj. od doby, kdy Slunce vrcholí), pak za dobu t se Země otočí o úhel $\alpha = \Omega t$, kde Ω je úhlová rychlost rotace Země. Hodinky mají ciferník, na kterém 12 hodinám odpovídá otočení ručiček o 360°. Země se za tuto dobu otočí ale jen o 180°, tj. hodinová ručička rotuje dvakrát rychleji nežli Země kolem své osy.

Představme si nyní, že jsme se podívali na hodinky, zjistili úhel β a z něj úhel $\alpha = \beta/2$, o který se pootočila Země (viz obr. 1). Určeme, o jaký skutečný úhel γ bychom se měli otočit od Slunce, abychom došli na jih (naší metodou nejdříve určujeme jih).

Protože osa rotace Země je skloněna k rovině ekliptiky o $23{,}5^\circ$, budeme popisovat naši polohu pomocí tří úhlů $-$ α, φ a ε, jejichž význam je patrný z obr. 1. Poznamenejme jen, že úhel ε nabývá hodnot z intervalu $\langle -23{,}5^\circ, +23{,}5^\circ \rangle$, podle polohy Země na ekliptice. Dále budeme předpokládat, že se Země pohybuje po kružnici.

Sluneční paprsek jdoucí rovnoběžně s osou x a procházející bodem $\mathsf{A}[x, y, z]$ na Zemi, bude povrch Země protínat ještě v bodě $\mathsf{A}'[-x, y, z]$. Body A, A' určují na povrchu Země hlavní kružnici k_1 (což je kružnice se středem ve středu koule, ležící na zadané sféře). Touto kružnicí je zadaná rovina, v níž leží průmět slunečního paprsku do tečné roviny (toto tvrzení, které by se mohlo zdát ne zcela zřejmým, lze ověřit přímým výpočtem). Směr k jihu určuje poledník v daném místě, který je částí jiné hlavní kružnice k_2. Úhel γ je pak roven úhlu, který spolu svírají tečné vektory $\boldsymbol{t}_1$ a $\boldsymbol{t}_2$ obou kružnic v bodě A.

Bod A má v čárkované souřadné soustavě (jejíž osa je totožná s osou rotace Země) souřadnice

$$\mathsf{A}[\cos\varphi\cos\alpha, \cos\varphi\sin\alpha, \sin\varphi]\,.$$

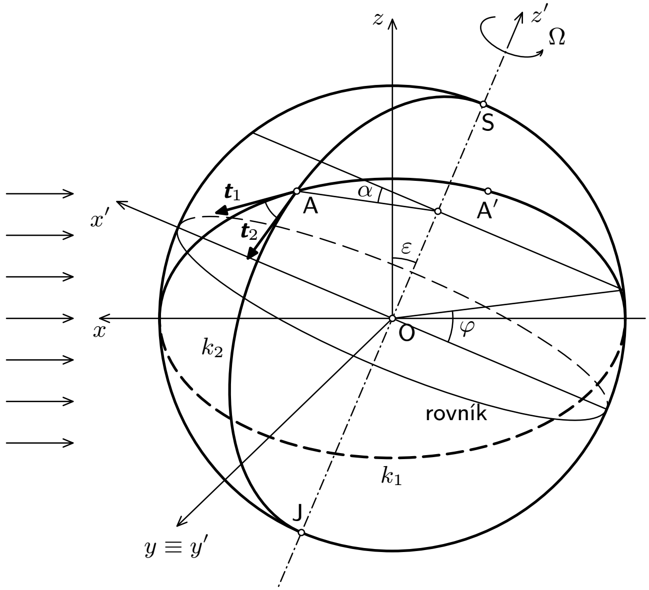
Protože řešení úlohy nezávisí na zvoleném měřítku, zvolili jsme za poloměr Země jedničku.

Jestliže chceme vyjádřit souřadnice bodu A v nečárkované souřadné soustavě, musíme čárkovanou souřadnou soustavu otočit o úhel $-\varepsilon$ (viz obr. 1) kolem osy $y = y'$

$$x = x'\cos\varepsilon + z'\sin\varepsilon = \cos\varphi\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\varphi\sin\varepsilon\,,$$

$$y = y' = \cos\varphi \sin\alpha\,,$$

$$z = -x' \sin\varepsilon + z' \cos\varepsilon = -\cos\varphi\cos\alpha\sin\varepsilon + \sin\varphi\cos\varepsilon\,.$$



Obr. 1

Normálový vektor k rovině, v níž leží kružnice k_1, je

$$\boldsymbol{n}_1 = \mathsf{OA} \times \mathsf{OA}' = (0, -z, y) = (0, \cos\varphi\cos\alpha\sin\varepsilon - \sin\varphi\cos\varepsilon, \cos\varphi\sin\alpha)\,.$$

Normálový vektor $\boldsymbol{n}_2$ k rovině, v níž leží kružnice k_2, je rovnoběžný s rovinou $x'y'$ a můžeme jej zvolit jako $\boldsymbol{n}_2(x', y', z') = (\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)$.

Po aplikaci rotace o úhel ε dostáváme

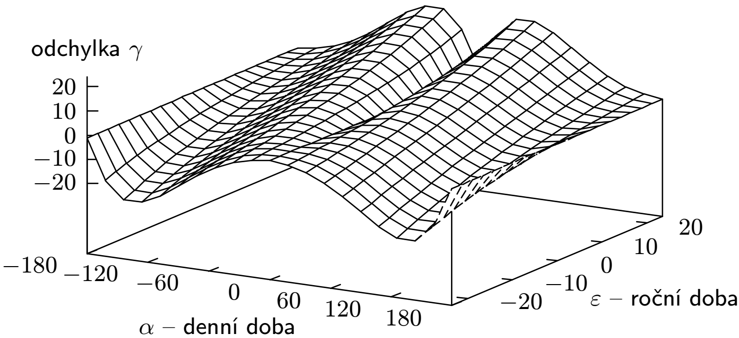
$$\boldsymbol{n}_2(x, y, z) = (\sin\alpha\cos\varepsilon, -\cos\alpha, -\sin\alpha\sin\varepsilon)\,.$$

Snadno nahlédneme, že úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$, je shodný s úhlem, který svírají vektory $\boldsymbol{n}_1$ a $\boldsymbol{n}_2$. Proto

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\,.$$

Další výpočet je ryze technický, a proto jej ponecháváme na vás a uvedeme jen konečný výsledek pro $\cos\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{\sin\varphi\cos\alpha\cos\varepsilon - \cos\varphi\sin\varepsilon}{\sqrt{(\cos\varphi\sin\alpha)^2 + (\cos\varphi\cos\alpha\sin\varepsilon - \sin\varphi\cos\varepsilon)^2}}\,. \tag{1}$$



Obr. 2

Chyba δ, jíž se dopustíme užitím naší poučky, tedy bude $\delta = \gamma - \alpha$. Speciálně pro zeměpisnou šířku $\varphi = 50^\circ$ (na ní se zhruba nachází náš stát), z obr. 2 zjistíme, že největší chyby se dopustíte v létě přibližně v osm hodin ráno nebo ve čtyři hodiny odpoledne a její velikost bude přibližně $24{,}6^\circ$.

V zimě to bude ve čtyři ráno a v osm večer, což se ale, protože v daných dobách Slunce pro samou tmu neuvidíme, ve skutečnosti nestane. Největší chyby se tak dopustíme při východu a západu Slunce.

S výše uvedenou rovnicí (1) pro úhel γ si můžete ještě vyhrát a najít místa na Zemi a časy, ve kterých je chyba největší.

Ještě je nutno uvážit ostatní relevantní chyby.

Samozřejmě by nám měly jít správně hodinky (± 5 minut). Potom je tu chyba vznikající z faktu, že Země je rozdělena do časových pásem, maximální chyba tak vznikající v určení času je půl hodiny (pokud je čas v pásmu určen poledníkem, půlícím pásmo), čemuž odpovídá na ciferníku 15°, ale chyba bude poloviční, tj. $7{,}5^\circ$.

Dále se díky eliptické dráze objeví chyba, která má maximální velikost přibližně 15 minut v určení poledne podle Slunce (Slunce totiž nebude ve 12 hodin ležet přesně jižním směrem), tj. $3{,}75^\circ$ v určení severu. Tato chyba je největší na začátku listopadu či v polovině února.

Je možné (spíše jisté), že jednotlivé chyby jsou na sobě závislé, a proto je není možno jen naivně sečíst. Nicméně z obrázků vidíme, že velikost maximální chyby bude v naší zeměpisné šířce $24{,}6^\circ + 7{,}5^\circ \doteq 32^\circ$ právě v létě a speciálně pro Prahu, přes niž prochází patnáctý poledník, kolem $24{,}6^\circ$, protože se neobjeví „pásmová“ chyba. (Zde neuvažujeme „eliptickou“ chybu, která během roku kolísá.

Poznámka. Rád bych upozornil také na to, že výše uvedená metoda nebude pracovat na jižní polokouli tak, že bude určovat sever. Jak si totiž snadno uvědomíte, hodinky by vám musely jít pozpátku aneb metodu můžete použít s tím, že zrcadlíte malou ručičku vůči ose 6–12.

Tomáš Sýkora

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.