

10. ročník, úloha IV. 2 ... Pepek námořník (3 body; průměr ?; řešilo 86 studentů)

Spočtete práci, kterou musí vykonat námořník na to, aby svinul plachtu o hmotnosti M , která má šířku a a výšku b . Plachta visí celá svisle dolů z ráhna a námořník ji navíjí na ráhno konstantní rychlostí.

Ukážeme si dvě řešení této úlohy.

- 1) Výslednou práci vypočítáme ze změny potenciální energie plachty v tíhovém poli. Pro účely tohoto výpočtu si plachtu nahradíme hmotným bodem o hmotnosti M (hmotnost plachty) umístěným v těžišti plachty. Že je možné takovouto aproximaci provést, o tom nás nejlépe přesvědčí jedna z definic těžiště. Těžiště je působíště výsledné tíhové síly. Těžiště nesmotané plachty leží ve vzdálenosti $b/2$ od ráhna, těžiště smotané plachty leží přímo na ose ráhna. Smotaná plachta zvětšila svoji potenciální energii o

$$E_p = Mg \frac{b}{2}.$$

Stejnou práci musel vykonat Pepek, proto

$$W = Mg \frac{b}{2}.$$

- 2) Užitím integrálního počtu. Práci vypočítáme podle definice jako dráhový integrál síly.

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1)$$

Síla, kterou musí Pepek působit, je rovna tíhové síle dosud nenamotané části plachty (větší síla by způsobila zrychlený pohyb plachty). Vzdálenost nenamotané části plachty od ráhna označím x (viz obr. 1) a bude se měnit od $-b$ do 0. Snadno odvodíme, že tíhová síla působící na nenamotanou část plachty je

$$\mathbf{F} = M \frac{x}{b} \mathbf{g}.$$

Dosazením do vztahu (1) dostaneme

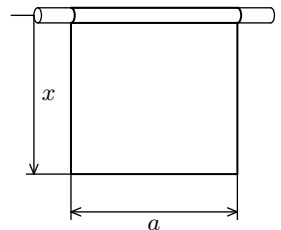
$$W = - \int_{-b}^0 Mg \frac{x}{b} dx = Mg \frac{b}{2},$$

což je hledaná práce. Při dosazování do skalárního součinu jsme zohlednili to, že Pepek působí silou opačnou než je síla tíhová (znaménko mínus před integrálem).

K tomuto výsledku bychom při přesnějším výpočtu museli ještě přidat další práce, které musel Pepek vykonat.

- a) Kinetická energie soustavy na konci děje. Pokud bude námořník navíjet konstantní rychlostí až do úplného konce, bude se pak s touto obvodovou rychlostí otáčet ráhno i s plachtou. Kinetická energie takovéto otáčející se soustavy je

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \frac{v^2}{R^2},$$



Obr. 1

kde J je moment setrvačnosti soustavy ráhno + namotaná plachta, v rychlost vytažení plachty, R poloměr soustavy ráhno + namotaná plachta. Dosazením nějakých rozumných hodnot ($v = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $b = 10 \text{ m}$) zjistíme, že v případě, kdy je hmotnost ráhna s hmotností plachty srovnatelná, je tato kinetická energie minimálně o řád menší než W . V opačném případě bychom tuto energii neměli opomíjet. Pepek může zabránit konání této nadbytečné práce tím, že přestane těsně před koncem točit a plachta sama „dojede“.

- b) Ztráty způsobené třením a jinými odporovými silami. Budou pravděpodobně srovnatelné s W a budou záviset na mnoha faktorech (kvalita navíjecího systému, povětrnostní podmínky, ...). Práce jim odpovídající se přemění na teplo.

Poznámka na závěr. Snad na žádné lodi se plachty na ráhno nenamotávají, všude se k němu pouze přivazují.

Jirka Franta