10. ročník, úloha IV . E ... *hustota vody* *(7 bodů; průměr ?; řešilo 47 studentů)*

Tentokrát je vaším experimentálním úkolem změřit další fyzikální vlastnost vody, totiž její hustotu. Aby nevznikaly velké zmatky, vymysleli jsme pro vás tento postup měření. Do vody ponoříme nádobu dnem vzhůru, původně celou naplněnou vzduchem o atmosférickém tlaku. Jak se nádoba ponořuje, tak se do nádoby postupně dostává voda. Vymyslete, jak tímto postupem zjistíte hustotu vody a pokuste se navrhnout takové experimentální uspořádání, abyste dosáhli maximální přesnosti. Znáte atmosférický tlak a tíhové zrychlení.

Teorie

Upřesníme nejprve trochu zadání úlohy. Sklenici plnou atmosférického vzduchu obrátíme vzhůru dnem a ponoříme částečně nebo úplně do vody v nějaké větší nádobě. Vlivem hydrostatického tlaku vody dojde ke stlačení vzduchu ve sklenici. Nejjednodušší způsob, jak pomocí takto ponořené sklenice změřit hustotu vody, vychází z měření změny objemu vzduchu ve sklenici při jeho stlačování. Pro toto měření je třeba navrhnout (a pochopitelně i sestavit) co nejpřesnější experimentální uspořádání.

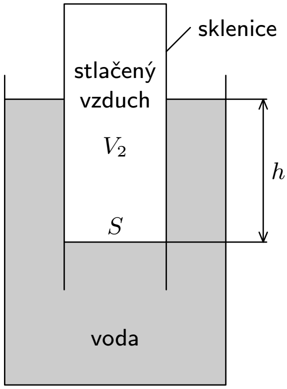
Na obr. 1 vidíte ponořenou skleničku. Sklenku ve vodě upevníme. Před ponořením je ve sklenici vzduch o objemu V_1, teplotě T_1 a tlaku p_1, který je roven atmosférickému tlaku p_A. Po ponoření bude mít vzduch ve sklenici objem V_2, teplotu T_2 a tlak p_2. Při ponořování skleničky proběhne ve vzduchu nějaký děj, pro který platí stavová rovnice

$$\frac{p_A V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}\,,$$

neboť při této stavové změně se hmotnost vzduchu nemění.

Ze stavové rovnice víme, že po ponoření je tlak vzduchu ve sklenici

$$p_2 = \frac{p_A V_1 T_2}{T_1 V_2}\,.$$



Obr. 1

Na vodní hladinu ve sklenici působí shora dolů tlaková síla vzduchu $F_p = Sp_2$, kde S je povrch hladiny (vnitřní průřez sklenice ve výšce hladiny uvnitř sklenice). Proti této síle působí směrem vzhůru tlaková síla vody F_t a aerostatická tlaková síla F_{p_A}. Platí $F_t = Sh\varrho g$, kde h je rozdíl výšek hladin vně a uvnitř sklenice, ϱ je hustota vody a g je velikost tíhového zrychlení. Zřejmě též platí $F_{p_A} = Sp_A$, kde p_A je atmosférický tlak.

Hladinu vody ve skleničce budeme pozorovat, až když se ustálí, tj. v rovnovážném stavu. Tehdy bude platit

$$F_p = F_t + F_{p_A}\,,$$

jestliže zanedbáme všechny ostatní síly (povrchové jevy apod.). Z této rovnosti sil plyne

$$S\frac{p_A V_1 T_2}{T_1 V_2} = Sh\varrho g + Sp_A\,.$$

Z tohoto vztahu snadno dostaneme hustotu vody

$$\varrho = \frac{p_A}{hg}\left(\frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} - 1\right)\,.$$

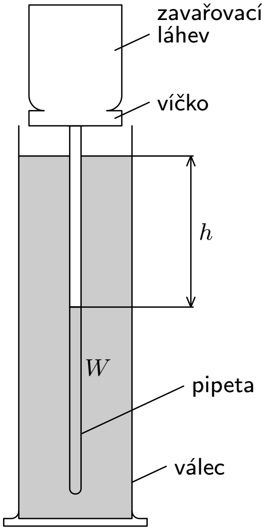
Pokud bude možno považovat stlačování vzduchu za izotermické, pak se předchozí vztah redukuje na

$$\varrho = \frac{p_A}{hg}\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) . \tag{1}$$

Abychom mohli použít tento redukovaný vztah, bude nutné zajistit, aby rozdíl $|T_1 - T_2|$ byl velice malý. Významem slovíčka „velice" se budeme podrobněji zabývat v diskusi.

Objem vody ve sklenici po ponoření označme W. Snadno nahlédneme, že $V_2 = V_1 - W$. Dosazením do (1) máme

$$\varrho = \frac{p_A}{hg}\left(\frac{V_1}{V_1 - W} - 1\right) = \frac{p_A}{hg}\frac{W}{V_1 - W} . \tag{2}$$



Obr. 2

Měřit budeme hloubku h, objem W a objem celé sklenice V_1.

Přistupme nyní ke druhé části úlohy, totiž jak uspořádat pokus, aby naše měření hýřilo přesností. Velkou přesnost budeme potřebovat u veličin h_1, W a $V_1 - W$, neboť relativní odchylky těchto veličin se při výpočtu systematické chyby sčítají (díky tomu že jsou v součinu, resp. v podílu – viz vzorce (1) a (2). Lze očekávat, že W bude poměrně malé. Naše sklenice by tedy měla mít malý průřez, aby se malý rozdíl objemů projevil velkým rozdílem h hladin, a též kvůli přesnějšímu změření objemu W. Výhodné bude ponořovat sklenici hodně hluboko, protože tím se W zvětší a způsobí menší relativní chybu. Aby bylo přesnější měření $V_1 - W$, bude třeba zvětšit objem celé sklenice.

Všechny tyto žádoucí vlastnosti se snoubí ve „sklenici" znázorněné na obr. 2. Tato „sklenice" vznikne např. z láhve od sirupu, nebo jako v našem experimentu, když k zavařovací lahvi o objemu asi 1 litr připevníme vzduchotěsně pipetu o průměru aspoň 5 mm (abychom mohli zanedbat kapilaritu). Tuto umně zhotovenou „sklenici" budeme v dalším textu označovat jako „láhev".

Zavařovací sklenice splňuje požadavek velkého objemu, na stupnici pipety lze zase velmi přesně odečítat změnu objemu W a hloubku h. Hloubka, ve které budeme láhev topit, závisí na hloubce naší domácí vany nebo jiné vhodné nádoby.

Pomůcky

Výše popsaná láhev, velká nádoba (vana nebo např. větší odměrný válec), skládací metr nebo pravítko, rukavice, noviny s aktuálním údajem o atmosférickém tlaku.

Výsledky měření

Veličiny společné všem metodám

Při všech měřeních byl atmosférický tlak $p_A = (1{,}015 \pm 0{,}005) \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$. Údaj jsme získali z meteorologické mapy v Lidových novinách.

Tíhové zrychlení uvažujme $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Objem celé lahve jsme změřili tak, že jsme ji celou včetně pipety naplnili vodou a vodu přelili do odměrného válce. Obdrželi jsme objem $V_1 = (765 \pm 4)\,\mathrm{ml}$.

Při všech následujících měřeních jsme délku h měřili metrem s přesností 1 mm. Objem W jsme odečítali ze stupnice pipety s přesností 0,1 ml.

Měření 1 – odstrašující

Teorie

Aparaturu sestavíme dle obr. 2. Do většího odměrného válce ponořujeme část lahve tvořenou pipetou.

Naměřené hodnoty

Měření	W/ml	h/cm	ϱ/kg·m^{-3}	$\Delta\varrho$/kg·m^{-3}
1	10,0	15,7	870	−70
2	9,4	14,5	890	−50
3	9,9	14,3	950	10
4	10,4	14,8	960	20
5	10,3	15,0	940	0
6	9,2	14,5	870	−70
7	9,7	14,5	920	−20
8	10,8	14,3	1040	100
9	10,4	14,8	960	20
10	10,6	14,2	1020	80

Průměrná hodnota hustoty vody $\overline{\varrho} = 940\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.
Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(\varrho) = 60\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, k hrubé chybě nedošlo.
Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\overline{\varrho}) = 20\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.
Pro hustoty vody jsme tak obdrželi $\varrho = (940 \pm (60 + \delta_{\mathrm{sys}}))\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Diskuse

Po deseti měřeních jsme shledali, že jsme si vyrobili velmi citlivý plynový teploměr. Během pokusu stačilo položit teplou ruku na dno zavařovačky, načež hladina v pipetě značně poklesla. Rozdíl teplot $|T_1 - T_2|$ byl sice malý, avšak zdaleka ne zanedbatelný. Způsobil chybu přes 10 %. Ostatní chyby měření (měření h(1 %), měření W(1 %), chyba tlaku p_A(1 %) apod.) lze vzhledem k této chybě zanedbat. Jelikož při tomto měření byla láhev držena ručně, přecházelo teplo vesele z rukou do útrob lahve. Aproximace izotermickým dějem je zde proto oprávněná jen v rámci velké chyby. Povšimněte si, že hustota vody vychází menší než skutečná. Vzduch ohřívaný našimi dlaněmi se totiž rozpíná a vytlačuje více vody z pipety.

Měření 2 – předchlazení

Teorie

Abychom mohli stlačení považovat za izotermické, pozměnili jsme trochu metodu. Chtěli jsme se vyhnout měření teploty, neboť k tomu by bylo třeba použít citlivého teploměru (desetiny °C) a uvážit teplotní rozdíly mezi různými body láhve.

První minimalizace teplotního rozdílu Do velkého válce nebo vany nalijeme studenou vodu. Stejně studenou vodu nalijeme do kýblu. Láhev se vzduchem pak v kýblu předchladíme. Pokojová teplota je vyšší než teplota vody. Rukavicí uchopíme láhev a ponoříme ji pipetou do válce (vany). Stlačení vzduchu proběhne poměrně rychle. Díky tepelné výměně se vzduchem v pokoji se však vzduch v láhvi začne pomalu rozpínat. Proto objem W měříme ihned, jakmile skončí stlačování.

Naměřené hodnoty

Měření	W/ml	h/cm	ϱ/kg·m^{-3}	$\Delta\varrho$/kg·m^{-3}
1	9,2	13,8	910	−50
2	9,1	13,7	910	−50
3	9,2	13,6	930	−30
4	9,3	13,4	950	−10
5	10,4	13,9	1030	70
6	10,0	14,3	960	0
7	8,0	11,2	980	20
8	9,1	13,0	960	0
9	9,8	13,9	970	10
10	10,4	13,7	1040	80

Průměrná hodnota hustoty vody $\overline{\varrho} = 970\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(\varrho) = 40\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\overline{\varrho}) = 10\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Relativní systematická chyba je $\delta_{\mathrm{sys}} = 10\,\%$, odtud $\sigma_{\mathrm{sys}} = 100\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. (Zdůvodnění je v celkové diskusi.)

Tedy celková chyba $\sigma_{\mathrm{celk}} = 130\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Skutečná hodnota hustoty vody $\varrho = (970 \pm 130)\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Měření 3

Teorie

Druhý způsob minimalizace teplotních rozdílů Zajistíme stejnou teplotu vzduchu v lahvi, vody ve válci (vaně) i vzduchu v pokoji. Objem W měříme, když skončí stlačování.

Naměřené hodnoty

Měření	W/ml	h/cm	ϱ/kg·m^{-3}	$\Delta\varrho$/kg·m^{-3}
1	10,8	13,9	1070	40
2	9,5	14,8	880	−150
3	9,2	11,7	1080	50
4	8,7	12,0	990	−40
5	8,5	11,3	1030	0
6	10,3	13,1	1080	50
7	10,1	13,0	1060	30
8	8,6	10,9	1080	50
9	10,0	13,5	1020	−10
10	9,2	12,0	1050	20

Průměrná hodnota hustoty vody $\overline{\varrho} = 1020\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(\varrho) = 60\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\overline{\varrho}) = 20\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Relativní systematická chyba je $\delta_{\mathrm{sys}} = 10\,\%$. (Zdůvodnění je v celkové diskusi.)

Absolutní systematická chyba $\sigma_{\mathrm{sys}} = 100\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Celková chyba $\sigma_{\mathrm{celk}} = 160\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.
Skutečná hodnota $\varrho = (1020 \pm 160)\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Měření 4

Teorie

Odměrný válec, do něhož jsme dosud láhev ponořovali, nahraďme podstatně větší nádobou – např. velkým sudem nebo rybníkem. Kapacita velkého vodního tělesa zaručuje, že voda svoji teplotu měnit nebude. Aby se co nejméně měnila teplota vzduchu v lahvi, tuto opět předchladíme. Ponoříme ji pak celou (nejen pipetu) a několik minut počkáme. Pokud dojde při stlačení k ohřátí vzduchu, popřípadě teplotním výkyvům způsobených výskytem vodních par, po jisté době se díky tepelné výměně teplotní rozdíly zmírní.

Naměřené hodnoty

Pro náročnost provedení jsme získali jen jednu hodnotu. Náročnost měření spočívala v lovení láhve ze sudu plného studené vody (o teplotě 5°C) v nevlídném jarním počasí.

$$h = (31{,}1 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}\,, \qquad W = (23{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{ml}\,,$$
$$p_A = (1{,}015 \pm 0{,}010) \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\,, \qquad V_1 = (765 \pm 4)\,\mathrm{ml}\,.$$

Určili jsme tedy hustotu vody $\varrho = (1030 \pm 30)\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Diskuse

Soubor obsahující jednu hodnotu mnoho nevypovídá. Přesto si myslíme, že děj byl ze všech měření nejvíce izotermický – díky desetiminutovému předchlazení ve velkém množství vody byly splněny všechny předpoklady pro to, aby děj byl téměř ideálně izotermický. Systematickou chybu jsme brali s jistou rezervou, neboť jsme měření provedli pouze jednou a nemá smysl počítat chybu statistickou.

Diskuse společná pro všechna měření

Při měření délky h jsme se dopustili chyby 1 mm, což odpovídá relativní odchylce $\delta_h = 0{,}01$.
Chyba měření objemu W byla 0,1 ml, tedy relativní chyba $\delta_W = 0{,}01$.
Chyba při měření celkového objemu V_1 byla 4 ml.
Tedy relativní chyba rozdílu $(V_1 - W)$ je $\delta_{(V_1-W)} = 0{,}005$.
Relativní chyba použité hodnoty pro atmosférický tlak byla $\delta_{p_A} = 0{,}010$.
Relativní systematická chyba měření je tedy $\delta_{\mathrm{sys}} = \delta_h + \delta_W + \delta_{(V_1-W)} + \delta_{p_A} + \delta_X = 4\,\% + \delta_X$, kde δ_X je chyba způsobená ostatními vlivy.

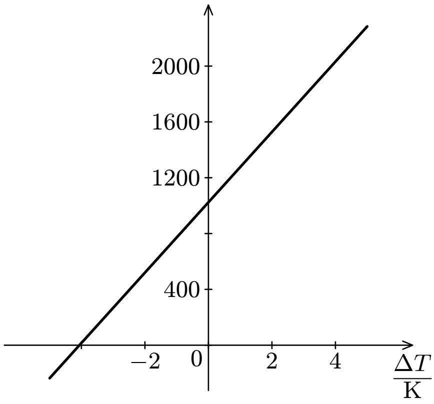
Protože jsme velmi účinně minimalizovali chyby plynoucí z měření délek a objemů, způsobí nám největší chybu změny teploty (s výjimkou měření 4). Uvažme jedno z provedených měření, ve kterém jsme obdrželi výsledky $h = 14{,}2\,\mathrm{cm}$ a $W = 10{,}6\,\mathrm{ml}$, z nichž spočteme hustotu $\varrho = 1020\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, ale za předpokladu izotermičnosti stlačování. Posuďte, jakou hustotu vody bychom z týchž údajů vypočetli, kdyby se všechen vzduch v lahvi stačil ohřát nebo ochladit o teplotu ΔT. Vidíme, že velmi malá změna teploty mohla proměnit měření ve zdrcující neúspěch. Teprve teď vidíme, jak malý teplotní rozdíl nastal během měření – maximálně 0,5°C, jelikož skoro všechny hodnoty ϱ ve všech měřeních nám vyšly v intervalu $\langle 850; 1100\rangle\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Chybu způsobenou neizotermičností děje můžeme pouze odhadnout z výsledků měření. U prvního měření (kdy jsme láhev ohřívali rukama) bude tato chyba činit 10 % až 15 %. U zbylých měření byla tato chyba většinou pod 10 %. U měření 4 nebude rozhodně tato odchylka větší než 2 %.

Na měření měly vliv ještě další jevy a skutečnosti:

- uvnitř láhve docházelo k vypařování vody (odtud mohlo plynout jisté ochlazování a vzestup hladiny v pipetě);
- v pipetě došlo k malé kapilární elevaci;
- láhev nebyla jistě ideálně vzduchotěsná;
- vzduch není ideální plyn;
- vzduch uvnitř lahve má také nějakou hmotnost, kterou zanedbáváme.

Všechny tyto jevy však v našem uspořádání pokusu hrály vskutku zanedbatelnou roli v růstu chyby, vzniklé teplotním rozdílem.



Obr. 3

Závěr

V rámci chyby potvrzují všechna měření tabulkovou hustotu vody $996\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Největší chyba byla způsobena neizotermičností děje. Její odstranění a pořízení většího souboru hodnot by patrně vyžadovalo laboratorní podmínky. Zpřesnění bychom mohli dosáhnout např. potápěním se s lahví do dvou různých hloubek, ve kterých má voda stejnou teplotu.

Matouš Jirák

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.