

10. ročník, úloha V. 1 ... rozmazaný šroub (4 body; průměr ?; řešilo 46 studentů)

Po nakloněné rovině se sklonem β se z klidové pozice valí válec, na kterém je předkreslen závit. Válec se stále zrychluje a postupně se nám jednotlivé závity „rozmažou“, až není poznat, že tam jednotlivé závity byly. Měříme čas od puštění válce do chvíle, kdy nerozeznáme jednotlivé závity. Jak tento čas závisí na úhlu β ? Předpokládejte, že oko má snímkovací frekvenci f , válec má průměr R , stoupání závitů je s .

Oko si představíme jako kameru, která po dobu $1/f$ exponuje, a vše, co se stane, zachytí do jednoho obrázku. Aby se šroub jevil zcela rozmazaný, musí jeho závity za dobu $1/f$ projít všemi polohami, což nastane, pokud se otočí alespoň jednou dokola (nakreslete si obrázek). To znamená, že potřebujeme spočítat, v jakém okamžiku dosáhne válec frekvence otáčení f .

Podle známých vzorců platí $f = \omega/2\pi = v/\pi R$, a tedy $v = \pi Rf$. Dále pro pohyb válce po nakloněné rovině musí platit zákon zachování energie $E_p = E_k + E_r$, čili

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2,$$

neboť pro válec je $J = \frac{1}{2}m(R/2)^2$ a $\omega = 2v/R$. Z toho plyne

$$h = \frac{3v^2}{4g}.$$

Protože jde o pohyb rovnoměrně zrychlený s nulovou počáteční rychlostí, platí snadno odvoditelný vztah $d = \frac{1}{2}vt$, kde d je uražená dráha, což v našem případě (nakloněná rovina) znamená $d = h/\sin\beta$, kde h je výškový rozdíl. Dostáváme tak třetí důležitý vztah

$$t = \frac{2h}{v \sin\beta}.$$

Z výše uvedených vztahů pro t , h a v , obdržíme řešení

$$t = \frac{3\pi Rf}{2g \sin\beta}.$$

Můžeme tedy konstatovat, že čas, po kterém se šroub rozmaže, závisí nepřímo úměrně na sinu sklonu nakloněné roviny.

David Stanovský