10. ročník, úloha V . S ... hvězdy *(7 bodů; průměr ?; řešilo 16 studentů)*

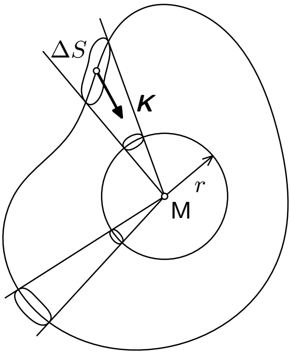
a) *Zkuste jednoduše zdůvodnit, proč je gravitační síla působící na těleso o hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu izotropní koule o poloměru $R > r$ daná pouze hmotou $M(r)$ obsaženou v kouli o poloměru r a proč je rovna*

$$F_g = \frac{\varkappa m M(r)}{r^2} \, ,$$

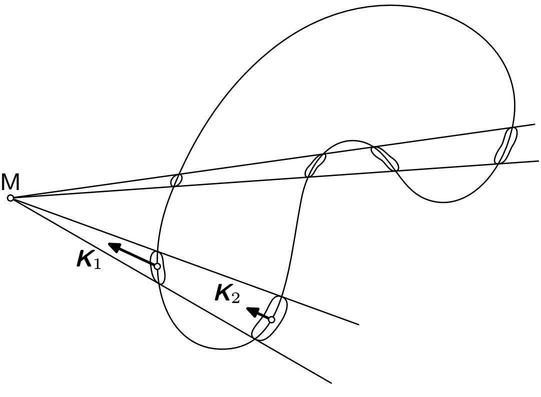
tj. jakoby byla celá hmota $M(r)$ soustředěna v centru.

b) *Existuje jistá skupina tzv. polytropních modelů hvězd, které jsme již schopni počítat. V těchto modelech se předpokládá závislost tlaku p na hustotě ϱ ve tvaru $p = C\varrho^\gamma$ (tzv. rovnice polytropy, C je libovolná konstanta). Speciálním případem polytropy je adiabata (pro $\gamma = 5/3$), izoterma (pro $\gamma = 1$) a izobara (pro $\gamma = 0$). Pro funkce $p(r)$ a $\varrho(r)$ tak máme, spolu s rovnicí hydrostatické rovnováhy, rovnice dvě a můžeme z našich úvah vyloučit teplotu. Odhadněte, stejným způsobem jako v seriálu, vztah mezi hmotností hvězdy M a jejím poloměrem R. Určete, pro které hodnoty parametru polytropy γ je hvězda stabilní.*

a) Gravitační (a stejně i elektrostatická síla) se vyznačuje tím, že klesá se čtvercem vzdálenosti. Velikost intenzity gravitačního pole K (což je síla, která by v daném místě působila na těleso s jednotkovou hmotností) ve vzdálenosti r od hmotného bodu o hmotnosti M je tedy rovna $K = \varkappa M/r^2$. Představme si úzký kužel s vrcholem umístěným do polohy hmotného bodu M. Plocha S jeho podstavy je úměrná čtverci jeho výšky r (z podobnosti plyne, že poloměr podstavy je úměrný výšce r). Odtud tedy dostáváme, že součin velikosti intenzity K a plochy podstavy kužele S je pořád stejný a nezávisí na výšce kužele. Tento výsledek nezávisí na tvaru podstavy kužele, může to být třeba čtverec (pak je to vlastně jehlan).



Obr. 1



Obr. 2

Zkusme nějak využít náš zajímavý výsledek. Umístěme hmotný bod M do nějakého prostoru ohraničeného uzavřenou plochou S (viz obr 1). Vyplňme celý prostor velkým množstvím úzkých kuželů. Budeme se snažit zjistit, jaká je suma přes všechny kužely ze součinu velikosti intenzity pole na povrchu plochy vymezené kuželem a velikosti průmětu této plochy do směru intenzity pole $\boldsymbol{K}$. Průmět této plochy odpovídá podstavě kužele. Obecně se součin velikosti intenzity K a průmětu $\Delta S'$ malé plochy ΔS do směru intenzity nazývá tok vektoru intenzity $\boldsymbol{K}$ plochou ΔS $\Phi = K\Delta S'$. Námi zjištěný fakt lze v řeči toku přeformulovat takto: tok plochou podstavy kužele je pořád stejný. Vraťme se zpět k situaci na obrázku 1. Díky tomuto výsledku je tok celkovou plochou Φ_S stejný jako tok přes kouli o poloměru r. Jelikož je intenzita pole kolmá na povrch koule, je tok přes plochu koule jednoduše $\Phi_k = 4\pi r^2 K = 4\pi\varkappa M = \Phi_S$.

Co se stane, umístíme-li hmotný bod mimo naši uzavřenou plochu? Každý kužel ji protne dvakrát nebo čtyřikrát ($6\times, \ldots$), viz obr. 2. Jak víme, tok přes každou plošku bude stejný. Jednou však do daného objemu vektor $\boldsymbol{K}$ vtéká a jednou vytéká. Celkový tok bude tedy nulový.

Bude-li ve hře více hmotných bodů, budou do celkového toku přes plochu přispívat pouze ty z nich, které se nacházejí uvnitř plochy. Jelikož je intenzita pole $\boldsymbol{K}$ součtem intenzit pocházejících od jednotlivých hmotných bodů, bude celkový tok roven

$$\Phi_S = 4\pi\varkappa M_{\mathrm{uvnitř}} \,, \tag{1}$$

kde $M_{\mathrm{uvnitř}}$ je hmotnost objektů, které jsou uzavřeny danou plochou. Tento vztah se nazývá *Gaussova věta*.

Teď už můžeme zjistit, jak vypadá gravitační pole izotropní koule o poloměru R. Ze symetrie plyne, že velikost intenzity může záviset pouze na vzdálenosti r od středu koule a že intenzita bude směřovat vždy do tohoto středu. Jako plochu, přes kterou budeme počítat tok intenzity Φ, si zvolme kouli o poloměru r se středem stejným jako naše izotropní koule. Protože je intenzita v každém bodě této plochy stejná, a navíc k ní kolmá, bude $\Phi = 4\pi r^2 K$. Tento tok jsme však schopni vypočítat i ze vztahu (1). Pro $r > R$ tato plocha obklopuje celou kouli, takže tento tok musí být roven $\Phi = 4\pi\varkappa M_k$, kde M_k je celková hmotnost koule. Pro $r > R$ tak dostáváme známý vztah

$$K = \frac{\varkappa M_k}{r^2} \,.$$

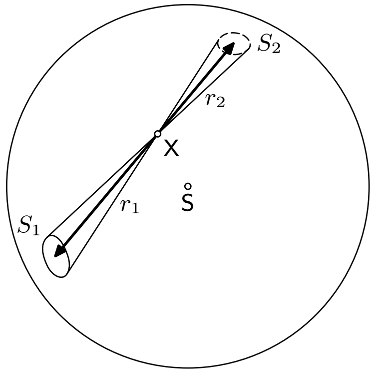
Gravitační pole vně koule je tedy stejné jako pole hmotného bodu o hmotnosti rovné hmotnosti koule umístěného do jejího středu.

Zvolíme-li $r < R$, pak je tok přes plochu určen pouze hmotností $M(r)$, která je soustředěna v kouli o poloměru r: $\Phi = 4\pi\varkappa M(r)$. Intenzita gravitačního pole se rovná $K = \varkappa M(r)/r^2$. Na gravitační pole ve vzdálenosti r uvnitř koule tedy nemá vliv hmota, která se nachází ve vzdálenosti větší než je r.

Příklad šel řešit i bez znalosti Gaussovy věty. Mějme hmotnou kulovou plochu. Dokážeme nejprve, že intenzita gravitačního pole je uvnitř této plochy nulová. Vnitřním bodem X veďme opět úzký kužel, tentokrát protažený na obě strany (viz obr. 3). Tento kužel vytkne na povrchu koule dvě plochy S_1 a S_2. Opět díky podobnosti útvarů je jejich poměr roven

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \,.$$

Gravitační síly, kterými působí obě plochy v daném místě, mají stejnou velikost, ale opačný směr, takže se jejich účinek vyruší.



Obr. 3

b) V rovnici hydrostatické rovnováhy položíme za Δr celý poloměr hvězdy R. Tlak v centru hvězdy se pak vyjádří z rovnice polytropy $p = C\varrho^{\gamma}$. Z rovnice hydrostatické rovnováhy tedy dostaneme

$$C\varrho^\gamma \approx \varkappa M \frac{\varrho}{R}\,,$$

kde M je celková hmotnost hvězdy. Hustotu hvězdy aproximujeme její střední hustotou $\bar{\varrho} \approx M/R^3$. Jednoduchými úpravami nakonec dospějeme ke vztahu

$$R \approx \left(\frac{C}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}} M^{\frac{\gamma-2}{3\gamma-4}} \qquad \text{pro}\,\gamma \neq \frac{4}{3}\,.$$

V případě $\gamma = 4/3$ se R vykrátí a dostaneme vztah pro hmotnost hvězdy. Rovnovážný stav zde existuje jen pro určitou hmotnost, pro jiné hmotnosti se hvězda buď zhroutí nebo rozplyne.

Pusťme se do rozboru stability hvězdy. Rozlišujeme tři druhy rovnovážných poloh: poloha stabilní (při malé výchylce má systém tendenci vracet se do rovnovážného stavu), indiferentní (při malé výchylce systém zůstává v rovnovážném stavu) a labilní (při malé výchylce má systém tendenci vzdalovat se od rovnovážného stavu). V našem případě indiferentnímu rovnovážnému stavu odpovídá hvězda s $\gamma = 4/3$. Ať měníme její poloměr, jak chceme, vždy je v hydrostatické rovnováze.

Víme, že gravitační síla (například ve vzdálenosti $r = R/2$) je $F_g \approx \mathrm{konst}/R^2$. Naopak tlaková síla je $F_t \approx pR^2 \approx \mathrm{konst}/R^{3\gamma-2}$, kde jsme použili pro vyjádření tlaku rovnici polytropy. V rovnovážném stavu jsou si gravitační a tlaková síla rovny. Pro $\gamma > 4/3$ je mocnina u R ve vztahu pro tlakovou sílu větší než 2. Zmenšíme-li tedy poloměr hvězdy v rovnovážném stavu, bude tlaková síla větší než gravitační a hvězda bude mít tendenci se rozpínat. Naopak pro poloměry hvězdy větší než rovnovážný převáží gravitační síla nad tlakovou a hvězda se začne smršťovat, neboli opět se navracet do rovnovážné polohy. V případě $\gamma > 4/3$ se tedy jedná o rovnovážnou polohu stabilní. Pro $\gamma < 4/3$ je naopak mocnina u R ve vztahu pro tlakovou sílu menší než 2. Zmenšíme-li poloměr hvězdy, začne gravitační síla převažovat nad tlakovou a hvězda se bude čím dál více smršťovat. Zvětšíme-li poloměr hvězdy, převáží tlaková síla nad gravitační a hvězda se rozplyne. V případě $\gamma < 4/3$ se jedná tedy o hvězdu nestabilní.

Alexander Kupčo

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.