10. ročník, úloha VI . 3 ... kulečník *(5 bodů; průměr ?; řešilo 26 studentů)*

Máme N identických kulečníkových koulí, které leží na nekonečně velkém, ideálně rovném a vodorovném kulečníkovém stole. Jednu kouli uvedeme do pohybu. Po jistém počtu nárazů se koule vrátí zpět a zůstane stát. Jaký je minimální počet koulí, aby to bylo možné. Všechny rázy jsou dokonale elastické.

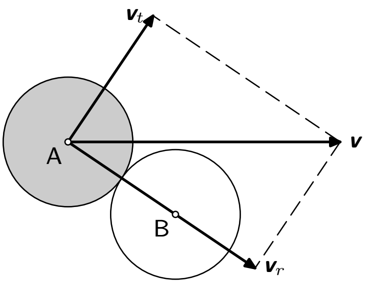
Řešení úlohy započneme tvrzením, které si snadno dokážete sami.

Pokud se srazí dvě stejné koule dokonale pružným středovým rázem, pak si vzájemně vymění rychlosti. Vypadá to tedy, jako by proletěly skrz sebe. (Ale jen vypadá!)

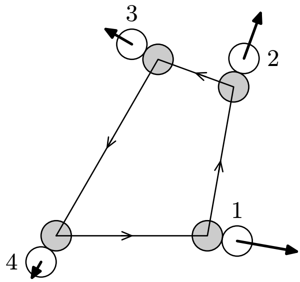
Ve speciálním případě, kdy koule B stála a koule A do ní vrazila, se koule A zastaví (v ideálním případě na místě) a koule B se začne pohybovat stejným směrem a stejnou rychlostí jako se pohybovala koule A.

Pokud dojde k necentrálnímu rázu, můžeme k řešení úlohy o dalším pohybu koulí využít výše uvedeného tvrzení. Protože v naší úloze bude při srážkách vždy jedna z koulí v klidu, budeme řešit jednodušší variantu, než kdyby se obě koule mohly pohybovat.

Rozložíme vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ nalétávající koule A na dvě komponenty. Jedna ($\boldsymbol{v}_r$) bude namířena na střed koule B, druhá ($\boldsymbol{v}_t$) bude tečná k povrchu koule B (viz obr. 1). Protože neuvažujeme tření, dojde prakticky ke středovému rázu koule A pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}_r$ s koulí B. Koule B se začne pohybovat rychlostí $\boldsymbol{v}_r$ a koule A bude mít rychlost $\boldsymbol{v}_t$. Snadno se přesvědčíte, že úhlová odchylka vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v}_t$ může být maximálně 90°, což však ve skutečnosti odpovídá středovému rázu, tj. nalétávající koule by se zastavila.

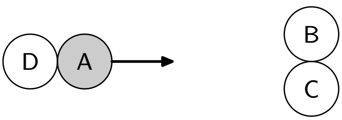


Obr. 1

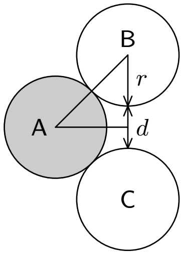


Obr. 2

Z výše uvedeného vyplývá, že nejmenší počet koulí v případě, že uvažujeme pouze „dvoukoulové“ srážky je 4 (to jsou ty rozmístěné) + 1 (to je ta, co do ní na začátku strčíme) = 5, přičemž schematické rozmístění koulí je zachyceno na obr. 2.



Obr. 3



Obr. 4

Nicméně existuje uspořádání, při němž dojde k požadovanému efektu za účasti pouhých čtyř koulí (viz obr. 3). Zde dochází k zajímavé situaci. Použitím pouze dvou rovnic (zákonů zachování (ZZ) hybnosti a energie) úlohu o dalším pohybu koulí po srážce nevyřešíme. Získáme na závěr dvě rovnice o třech neznámých (např. tři rychlosti). Proto musíme použít předpoklad o dokonale tvrdých koulích k tomu, abychom mohli říci, že koule B a C se rozletí pod úhlem 60°, tj. že koule se začnou pohybovat ve směru síly, jež na ně při srážce působila. Tak zjistíme, že koule A se odrazí zpět s nenulovou rychlostí a po nárazu do koule D se zastaví.

Pro zajímavost si to spočtěme s tím, že koule B a C se nemusejí dotýkat (viz obr. 4). Pak platí (užitím ZZ), že

$$v = w + \frac{\sqrt{12r^2 - 4rd - d^2}}{2r}u \quad \text{a} \quad v^2 = w^2 + 2u^2\,,$$

kde v, resp. w je velikost rychlosti koule A před srážkou, resp. po srážce a u je velikost rychlosti, kterou bude mít po srážce koule B i C.

Nás zajímá situace, kdy se koule A zastaví, tj. $w = 0$. To nastane pro

$$d = 2r(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}82\,r\,.$$

Vidíme, že rezerva pro to, aby došlo k odrazu koule A při nedotýkajících se koulích B a C, je značná.

Tomáš Sýkora

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.