10. ročník, úloha VI . 4 ... lanovka *(4 body; průměr ?; řešilo 28 studentů)*

Na Šumavě se v současnosti buduje zajímavé zařízení na přepravu dřeva. Protože se do močálu normální traktor nedostane, pokoušejí se lesníci použít pro přepravu dřeva vzducholodě. Vzducholoď bude mít nosnost 5000 kg a bude upevněna ke dvěma stanovištím vzdálených od sebe 3 km. Vzducholoď nemá žádný pohon a je tahána mezi kotvícími stanovišti. Jednu cestu absolvuje s nákladem dřeva a druhou jede prázdná, občas nese vaky s vodou.

Jakou maximální silou bude vzducholoď působit na upevňovací lana, bude-li prázdná a nesmí-li její výška nad terénem přesáhnout 300 m (aby nenarušila vzdušný prostor) na celé tříkilometrové trase?

Pro jednoznačnost předpokládejme následující dopravní režim prázdné vzducholodi. Nejprve vzducholoď vystoupá do výšky h (zde 300 m) a pak se prodlužuje lano z místa, kde vzducholoď startovala, současně se přitahuje lano vedoucí z místa, kam směřuje, tak, aby vzducholoď zůstala v konstantní výšce. Přistání nechť je opět kolmé.

Zanedbáme též změny hustoty vzduchu s výškou. Nechť je tedy rozdíl vztlakové a gravitační síly pro prázdnou vzducholoď konstantní $F_0 = Mg = 49\,050\,\mathrm{N}$, kde M je nosnost vzducholodi.

Zavedeme označení: $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ nechť jsou síly působící na jednotlivá lana, délka základny je $l = 3\,\mathrm{km}$, vzducholoď nechť je ve vodorovné vzdálenosti x od bodu, kde je upevněno první lano ($0 \leq x \leq l$).

Pro složky těchto sil platí

$$F_{1x} = F_{2x}\,, \qquad F_{1y} + F_{2y} = F_0\,.$$

Z geometrických úvah lze dále odvodit další rovnice, svazující jednotlivé složky sil. Například můžeme vzít tyto dvě rovnice vyjadřující poměry x-ových a y-ových složek.

$$\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{h}{x}\,, \qquad \frac{F_{2y}}{F_{2x}} = \frac{h}{l-x}\,,$$

Jiné vztahy určené z geometrie by již nebyly nezávislé. Máme tak čtyři rovnice pro čtyři neznámé, jejichž řešením jsou

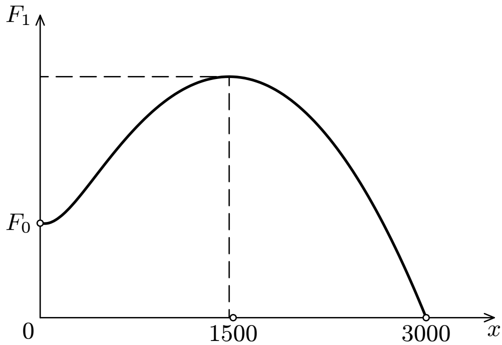
$$F_{1x} = F_0\frac{(l-x)x}{lh}\,, \quad F_{1y} = F_0\frac{l-x}{l}\,,$$

$$F_{2x} = F_0\frac{(l-x)x}{lh}\,, \quad F_{2y} = F_0\frac{x}{l}\,.$$

Pro velikost síly působící na první lano nakonec obdržíme

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{2x}^2} = F_0\frac{\sqrt{x^2+h^2}(l-x)}{lh}\,.$$

Pro F_2 by to bylo díky symetrii podobné, jen je nutné vzájemně zaměnit výrazy x a $(l-x)$.



Obr. 1

Maximum funkce lze zjišťovat různými způsoby. Kdo neumí derivovat, může hledat pomocí vypočítaných hodnot a nakresleného grafu (viz obr. 1). Je nicméně žádoucí extrém najít přesně, třeba metodou postupného půlení intervalů (za chvíli ukážeme proč).

Exaktní hodnoty x, v nichž se může nacházet extrém, jsou dány rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}x} = F_0 \frac{(l-2x)x - h^2}{\sqrt{x^2+h^2}lh} = 0\,.$$

Čitatel tvoří kvadratickou rovnici, jejíž kořeny snadno spočteme

$$x_{\text{extrém}1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 8h^2}}{4}\,. \tag{1}$$

Pro dané hodnoty se na intervalu nacházejí extrémy dva. Jak ukazuje graf (viz obr. 1), jedná se o mělké lokální minimum ve vzdálenosti cca 30 m a maximum pro $x = 1\,470\,\mathrm{m}$. Kdo si vypsal hodnoty po 100 metrech, nabyl dojmu, že maximum leží uprostřed, což číselně nedává velkou chybu, ale pro jiné vstupní hodnoty už to vliv mít může.

Pokud měníme poměr h/l, mění se i poloha, v níž dochází k extrémům. Zvyšujeme-li výšku h, maximum se posunuje stále více ke kraji, zatímco minimum mu „jde naproti“. Existuje určitá kritická výška, kdy je pod odmocninou v rovnici (1) nula, tj.

$$h = \frac{\sqrt{2}}{4}l = 1\,060\,\mathrm{m}\,, \qquad x_{\text{extrém}1,2} = \frac{l}{4} = 750\,\mathrm{m}\,.$$

Oba extrémy zde splynou a funkce $F_1(x)$ zde má tzv. inflexní bod. Pokud dále zvětšujeme poměr, derivací již žádné extrémy nenalezneme, funkce je zde monotónní a extrémní hodnoty budou na kraji intervalu.

Číselně vyjde

$$F_1(x = 1\,500\,\mathrm{m}) = 125\,050\,\mathrm{N}\,,$$
$$F_1(x = 1\,470\,\mathrm{m}) = 125\,100\,\mathrm{N}\,,$$
$$F_1(x = 30\,\mathrm{m}) = 48\,800\,\mathrm{N}\,.$$

Honza Mocek

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.