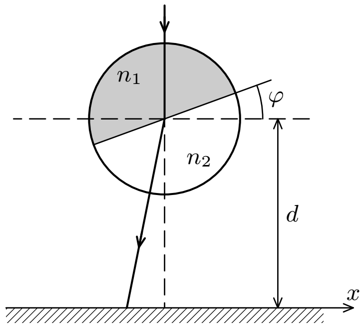
11. ročník, úloha I . 1 ... *skleněný schizofrenní válec* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 60 studentů)*

Mějme válec, který je slepený ze dvou skleněných polovin o indexech lomu n_1 a n_2. Válec se otáčí rovnoměrně kolem své osy. Na válec svítíme světelným paprskem kolmo na jeho osu rotace (viz obr. 1). Jak se bude pohybovat stopa paprsku po podložce v závislosti na úhlu natočení φ válce, jestliže je vzdálenost podložky od osy rotace $d = 1$ m?



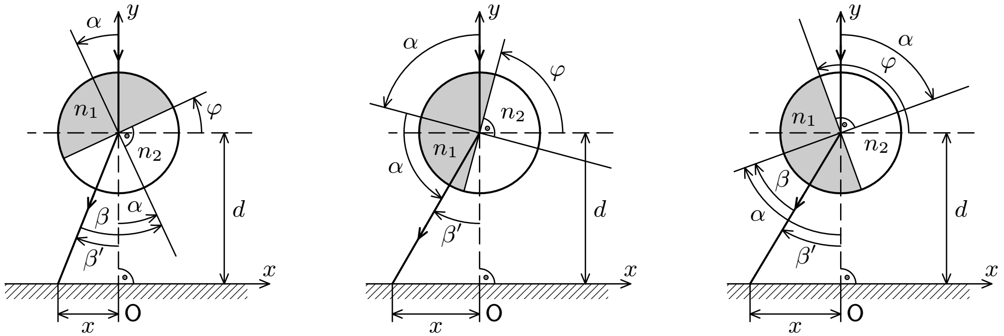
Obr. 1

Nechť $n_1 > n_2$ (lze zvolit bez újmy na obecnosti). Válec rotuje, poloviny se periodicky střídají nahoře a dole.

Ze zadání vyplývá, že k lomu nebo odrazu bude docházet pouze na rozhraní dvou prostředí ve válci. Pro popis lomu použijeme Snellův zákon

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta\,,$$

kde α je úhel dopadu a β úhel lomu (viz obrázky). Všechny úhly jsou orientované (tzn. mohou mít kladné i záporné znaménko). Kladný směr uvažujme ve směru otáčení válce.



Obr. 2. φ — úhel natočení válce, α — úhel dopadu paprsku, β — úhel lomu, β' — úhel od osy y

Protože $n_1 > n_2$, při jistém mezním úhlu $\alpha_m = \arcsin\,(n_2/n_1)$ nastane na rozhraní úplný odraz. Když se bude úhel φ přibližovat k meznímu úhlu α_m, budou se po podložce pohybovat stopy dvou paprsků — odraženého a lomeného. Intenzita lomeného paprsku bude slábnout (při $\varphi = \alpha_m$ zmizí úplně) a intenzita odraženého paprsku se bude zvyšovat, při $\varphi = \alpha_m$ dosáhne intenzity dopadajícího paprsku.

Rozdělme tedy řešení na několik částí

a) *Lom od kolmice.* Pro $0 < \varphi < \alpha_m$ je situace znázorněna na obr. 2. Dále je $\alpha = \varphi$ a ze Snellova zákona dostáváme

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right) = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\right)\,.$$

Z obrázku $\beta' = \varphi - \beta$. Potom platí $\operatorname{tg}\beta' = x/d$ a z toho snadnou úpravou vychází vztah pro x

$$x = d\operatorname{tg}\beta' = d\operatorname{tg}\left[\varphi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\right)\right]\,.$$

Z obrázku vidíme, že $x < 0$.

b) *Úplný odraz.* Pro $\alpha_m \le \varphi \le \frac{1}{2}\pi$ nebude docházet k lomu, ale k úplnému odrazu, jak je znázorněno na obr. 2. Úhel dopadu α je roven úhlu odrazu. Je-li $\alpha_m \le \pi/4$, tak pro úhel $\alpha_m \le \varphi \le \pi/4$ se paprsek odráží tak, že nedopadá na podložku. V ostatních případech platí $\alpha = \varphi$, $\beta' = 2\varphi - \pi$ a

$$x = d\,\mathrm{tg}\,\beta' = d\,\mathrm{tg}(2\varphi - \pi) = d\,\mathrm{tg}(2\varphi)\,.$$

V tomto případě $x < 0$.

c) *Lom ke kolmici.* Pokud $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, paprsek nejdřív vstupuje do prostředí s indexem lomu n_2 a pak se láme ke kolmici do prostředí s indexem lomu n_1. Situace je znázorněna na obr. 2. Protože úhel dopadu $\alpha = \varphi - \pi$, pro úhel lomu β ze Snellova zákona dostáváme

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin(\varphi - \pi)\right) = -\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\varphi\right)\,.$$

Z obrázku 3 $\beta' = \varphi - \pi - \beta$, dostáváme pro polohu stopy paprsku

$$x = d\,\mathrm{tg}\,\beta' = d\,\mathrm{tg}(\varphi - \pi - \beta) = d\,\mathrm{tg}(\varphi - \beta) = d\,\mathrm{tg}\left[\varphi + \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\varphi\right)\right]\,.$$

Pro $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$ bude $x < 0$. V případě, že $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, bude $x > 0$.

d) *Úplný odraz.* Pro $\frac{3}{2}\pi \le \varphi \le 2\pi - \alpha_m$ je situace podobná jako na obr. 2 v případě b). Pro $\alpha_m \le \varphi \le \frac{1}{4}\pi$, když $\alpha_m \le \frac{1}{4}\pi$, paprsek na podložku nedopadne. Pro ostatní případy je úhel dopadu $\alpha = 2\pi - \varphi$ a $\beta' = \pi - 2\alpha = 2\varphi - 3\pi$. Pro polohu stopy paprsku dostáváme

$$x = d\,\mathrm{tg}\,\beta' = d\,\mathrm{tg}(2\varphi - 3\pi) = d\,\mathrm{tg}(2\varphi)\,.$$

e) *Lom od kolmice.* Pro $2\pi - \alpha_m < \varphi < 2\pi$ nastává podobná situace jako na obr. 2 v případě a). Úhel dopadu je $\alpha = \varphi - 2\pi$ a úhel od osy y $\beta' = \varphi - 2\pi - \beta$. Ze Snellova zákona

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right) = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\varphi - 2\pi)\right) = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\right)\,.$$

Pro polohu stopy paprsku dostáváme

$$x = d\,\mathrm{tg}\,\beta' = d\,\mathrm{tg}(\varphi - \beta) = \mathrm{tg}\left[\varphi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\right)\right]; \qquad x > 0\,.$$

Vidíme, že tentokrát, na rozdíl od případu a), je $x > 0$.

Tibor Zavadil

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.