11. ročník, úloha I . 2 ... *zlaté sloupy* *(4 body; průměr ?; řešilo 60 studentů)*

Dva identické zlaté sloupy výšky 200 m a průřezu 1 dm^2 *jsou umístěny vedle sebe. Jeden z nich je zavěšený a druhý stojí na podložce, oba mají stejnou teplotu 0 °C. Oběma dodáme teplo 5 · 10*^{6} *kJ. Budou mít potom stejnou teplotu? Jestliže ne, odhadněte, o kolik se jejich teplota bude lišit. Potřebné údaje si najděte v tabulkách, tepelnou výměnu s okolím zanedbejte.*

Řešení tohoto příkladu se mírně zkomplikovalo již v zadání zavedením ne zcela smysluplného pojmu *identity* sloupů.

Někteří z vás považovali sloupy za identické před zavěšením, resp. postavením (a tudíž za stejně hmotné), a rozdíl teplot vysvětlovali pouze pomocí změny potenciální energie (jako důsledek teplotní roztažnosti). Jiní je považovali za identické až po zavěšení resp. postavení (a identitu brali jako vizuální — stejně jako to mysleli zadavatelé). Tato část řešitelů však opomněla teplotní roztažnost a rozdíl teplot vysvětlili pouze pomocí rozdílu hmotností sloupů. Je zajímavé, že až na jednoho se nenašel nikdo, kdo by oba tyto postupy zkombinoval.

Málokdo diskutoval změnu materiálových konstant s teplotou, stejně jako možnost přetržení/zhroucení sloupu vlastní vahou (porovnání napětí s mezí pevnosti; v našem případě se sloup nepřetrhne $\sigma_{\mathrm{mez}} = 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa} > 3{,}9 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa}$, což je největší tah/tlak vyskytující se ve sloupech) a nebo roztátí sloupu (teplota tání zlata je asi 1064 °C, teplota sloupů asi 1000 °C). Pro jednoduchost jsme i my považovali všechny materiálové konstanty za neměnné.

Předkládáme tedy následující řešení

Sloupy vizuálně shodné po zavěšení resp. postavení byly původně jinak dlouhé a tudíž se jejich hmotnosti liší. Dodáním stejného tepla se jejich teplota zvýší různě. Sloupy se dále tepelně roztáhnou a změní tak polohu svého těžiště (u visícího sloupu těžiště klesne, u stojícího se zvedne), na což připadá jistá změna potenciální energie a teplo zbylé na ohřátí se bude u obou sloupů lišit.

Nejprve si spočteme hmotnostní rozdíl mezi sloupy. To je vcelku jednoduché, pokud dokážeme spočítat rozdíl délek sloupů, kdybychom je položili vedle sebe na vodorovnou podložku — tj. bez tíhové deformace. Označme tento rozdíl H. Rozdíl hmotností je pak

$$\Delta m = S\varrho H\,.$$

Nyní, pro výpočet H, potřebujeme popsat deformaci způsobenou tíhou. Je zřejmé, že sloup, který je zavěšen, se po hypotetickém položení na vodorovnou podložku trochu zkrátí, tj. bude mít délku $(l - \Delta L)$, zatímco sloup, který stál se prodlouží na $(l + \Delta L)$.[1] Zde nám to trochu usnadní práci, protože pokud spočteme deformaci jen např. visícího sloupu, tak víme, že deformace stojícího sloupu bude stejná až na znaménko a H se tak bude rovnat $2\Delta L$. Dále se tedy zabývejme jen visícím sloupem.

Velikost ΔL (v souladu se zavedením bude ΔL kladné) spočteme s pomocí modifikovaného[2] Hookova zákona

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon = \Delta F/S\,.$$

[1] Každému místu na visícím sloupu můžeme přiřadit místo na stojícím sloupu tak, aby platilo $|\Delta\sigma_v| = |\Delta\sigma_s|$ (jsou to body, pro něž platí $x_v + x_s = l$). Pro tyto *souměrné* body tedy platí $|\Delta\varepsilon_v| = |\Delta\varepsilon_s|$. A integrací (posčítáním dílčích deformací) jistě dostaneme $|\Delta L_s| = |\Delta L_v|$.

[2] Hookův zákon se obvykle uvádí ve formě $E\varepsilon = \sigma$. Pokud napíšeme pod sebe dvě rovnice pro dvě různá napětí a odečteme jednu od druhé, dostaneme $E\varepsilon_1 = \sigma_1$, $E\varepsilon_2 = \sigma_2$, $E(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \sigma_2 - \sigma_1$, v našem označení přesně to, co jsme chtěli.

Ten říká, že pokud se mírně změní napětí ve sloupu, tak se deformace sloupu mírně změní a že tato změna deformace je v prvním přiblížení přímo úměrná změně napětí. Je potřeba si zde uvědomit, že tomuto zákonu je vcelku jedno, jak moc je velké napětí ve sloupu, ale zabývá se jen *změnou* napětí a dává nám jen *změnu* deformace. To se nám zde velmi hodí, protože ve visícím sloupu existuje v každém místě napětí (je tahového charakteru - řekněme záporné; nulové ve spodním konci sloupu, nejzápornější v místě závěsu) ještě předtím, než se sloupem něco uděláme, tj. než ho položíme.

Abychom mohli popsat napětí v zavěšeném sloupu, zavedeme souřadnici x podél výšky sloupu ($x = 0$ pro dolní konec a $x = l$ pro horní). Pak napětí v každém místě zavěšeného sloupu lze vyjádřit jako $f(x)$

$$\sigma = F/S = -\varrho x g\,,$$

Uvědomíme-li si, že položením sloupu se napětí ve všech bodech změní na nulu, hned vidíme, že $\Delta\sigma$ v každém bodě sloupu vzniklá jeho položením je rovna $-\sigma$. Celková změna délky sloupu pak je (jako bychom aplikovali Hookův zákon na každý malinký element sloupu, podívali se na změnu jeho délky a tyto změny sečetli)

$$\Delta L = \int_0^l \Delta\varepsilon\,\mathrm{d}x = \frac{\varrho g}{2E} l^2\,.$$

Z toho

$$H = 2\Delta L = \frac{\varrho g}{E} l^2 \qquad \text{a} \qquad \Delta m = S\frac{\varrho^2 g}{E} l^2$$

(číselně vychází $H \doteq 10\,\mathrm{cm}$, $\Delta m \doteq 19\,\mathrm{kg}$).

Ujasnili jsme si tedy, jak se liší hmotnosti obou sloupů. Nyní můžeme konečně přistoupit k očekávanému zahřátí obou sloupů. V důsledku dodání tepla Q se teplota sloupů zvýší o Δt_s — stojící, Δt_v — visící. Zároveň se oba sloupy protáhnou a tím změní polohu svého těžiště (potažmo i potenciální energii). Visící sloup ji sníží a stojící zvýší. Celková energetická bilance sloupů je vyjádřena rovnicí

$$Q = m_{s,v} c \Delta t_{s,v} \pm \frac{1}{2} m_{s,v} g \Delta l_{s,v}\,,$$

kde

$$\Delta l = \alpha l \Delta t_{s,v} l \doteq 2{,}8\,\mathrm{m}\,.$$

Rozdíl teplot sloupů je tedy

$$\delta T = \Delta t_v - \Delta t_s = 2Q\left(\frac{1}{m_v(2c - l\alpha g)} - \frac{1}{m_s(2c + l\alpha g)}\right)$$

a po úpravě ($m_s + m_v \doteq 2m$, $m_s m_v \doteq m^2$)

$$\delta T = 4Q\,\frac{c\Delta m + l\alpha g m}{m^2(4c^2 - l^2\alpha^2 g^2)}.$$

Pro zadané hodnoty si čtenář laskavě ověří, že platí $c \gg l\alpha g$ a můžeme si dovolit zanedbat druhý člen ve jmenovateli. Dosaďme ještě $m = Sl\varrho$.

$$\delta T = Qg\,\frac{c\varrho + \alpha E}{c^2 S E \varrho}\,,$$

což je vytoužený vzorec, do kterého stačí pouze správně dosadit správné hodnoty

$$l = 200\,\mathrm{m}; \quad S = 0,01\,\mathrm{m}^2; \quad \varrho = 19300\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}; \quad \alpha = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1};$$
$$c = 129\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}; \quad E = 8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Pa}; \quad g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}.$$

Vyjde pak

$$\delta T = 0{,}7\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

Závěrem dlužno podotknout, že tento výsledek je zjevně pouze hypotetický a reálně neměřitelný. Změna 0,7 °C je v porovnání s teplotou sloupů 1000 °C příliš malá na její registraci. Dále neuvažování změn materiálových konstant může vést až k situaci, že to co jsme spočítali, nemá už vůbec žádnou reálnou reprezentaci, neboli že se dějí věci úplně jiné, než předpokládáme.

Václav Porod & Rudolf Sýkora

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.