**11. ročník, úloha V . S ... *srážky a rozpady částic*** *(6 bodů; průměr ?; řešilo 23 studentů)*

a) *Pion $\pi^0$, který byl v laboratorní soustavě v klidu se rozpadnul na dva fotony*

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma\,.$$

*Vypočítejte jejich energie.*

b) *Uvažujme rozpad pionu $\pi^+$, který byl v laboratorní soustavě také v klidu, na antimion a mionové neutrino*

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu\,.$$

*Zjistěte energii tohoto neutrina za předpokladu, že jeho klidová hmotnost je nulová. Při výpočtu je výhodné použít zákona zachování energie a hybnosti a rovnici $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$.*

c) *Pokud mají dva elektrony dostatečně velkou energii, může se při jejich srážce zrodit elektron-pozitronový pár*

$$e^- + e^- \to e^- + e^- + e^- + e^+\,.$$

*Určete, jakou minimální energii a rychlost musí mít první elektron v laboratorní soustavě, pokud je druhý elektron v téže soustavě v klidu. Uvažte, že v mezním případě se při pohledu z těžišťové soustavy srazí dva elektrony s opačnými hybnostmi a všechny čtyři výsledné částice pak zůstanou prakticky stát.*

Pro zkrácení zápisu nebudeme v celém řešení označovat klidovou hmotnost $m_0$, ale $m$ s indexem příslušné částice. V tabulkách nalezneme

$$m_ec^2 = 0{,}510999\,\mathrm{MeV}, \quad m_{\pi^0}c^2 = 134{,}9626\,\mathrm{MeV},$$
$$m_{\pi^+}c^2 = 139{,}5669\,\mathrm{MeV}, \quad m_{\mu^+}c^2 = 105{,}6595\,\mathrm{MeV}.$$

Nyní se již podívejme, jak mohly být zadané úlohy vyřešeny.

a) Protože na počátku byl pion v klidu, musí být součet hybností obou fotonů nulový

$$\boldsymbol{p}_{\gamma 1} + \boldsymbol{p}_{\gamma 2} = 0\,,$$

takže ze vztahu pro energii fotonu $E = cp$ vidíme, že oba musí mít energii stejnou. Ze zákona zachování energie pak plyne

$$m_{\pi^0}c^2 = 2E_\gamma$$

a energie každého fotonu tedy bude

$$E_\gamma = \frac{1}{2}m_\pi c^2 = 67{,}4813\,\mathrm{MeV}\,.$$

b) Zákony zachování pro tento rozpad mají podobu

$$\boldsymbol{p}_\mu + \boldsymbol{p}_\nu = 0\,, \qquad m_{\pi^+}c^2 = E_{\mu^+} + E_\nu\,.$$

Jestliže teď dvakrát aplikujeme vztah mezi energií a hybností částice

$$E_\nu - cp_\nu = 0, \qquad E_{\mu^+} - c^2p_{\mu^+}^2 = m_{\mu^+}^2c^4\,,$$

dostaneme dosazením do druhého z nich

$$(m_{\pi^+}c^2 - E_\nu)^2 - E_\nu^2 = m_{\mu^+}^2 c^4\,,$$

$$E_\nu = \frac{m_{\pi^+}^2 - m_{\mu^+}^2}{2m_{\pi^+}}\,c^2 = 29{,}78854\,\mathrm{MeV}\,.$$

c) Podívejme se na celý systém jako na jedno těleso $T$. Jeho klidovou hmotnost před srážkou můžeme s pomocí veličin měřených v laboratorní soustavě vyjádřit jako

$$m_T^2 = E_T^2 - c^2p_T^2 = (E + m_ec^2)^2 - c^2p_e^2\,.$$

V mezním případě, kdy ještě může elektron-pozitronový pár vzniknout, zůstanou po srážce všechny čtyři částice v těžišťové soustavě prakticky stát. To v případě srážkových experimentů znamená, že se budou pohybovat pouze rychlostmi například tisíc kilometrů za sekundu, tj. daleko menšími než je rychlost světla. V každém případě se dostanou od sebe tak daleko, abychom mohli zanedbat jejich vzájemné elektrické působení. Klidová hmotnost tělesa po srážce elektronů pak bude prostě součet hmotností výsledných čtyř částic

$$m_T = 4m_ec^2\,.$$

Stejně jako volná částice nemůže změnit svojí klidovou hmotnost, musí se i klidová hmotnost našeho tělesa zachovávat. Jedná se v podstatě pouze o zákon zachování hmotnosti při pohledu z těžišťové soustavy tělesa, protože v ní je celková hmotnost tělesa rovna hmotnosti klidové. Srovním posledních dvou rovností získáme vztah

$$(E_e + m_ec^2)^2 - c^2p_e^2 = 16m_e^2c^4\,,$$

který můžeme ještě dále upravit

$$E_e^2 - c^2p_e^2 + 2m_ec^2E_e + m_e^2c^4 = 16m_e^2c^4\,,$$
$$m_e^2c^4 + 2m_ec^2E_e + m_e^2c^4 = 16m_e^2c^4\,.$$

Odtud již jasně vidíme, že v laboratorní soustavě musí být energie nalétávajícího elektronu nejméně

$$E_e = 7m_ec^2\,.$$

Z vyjádření celkové hmotnosti elektronu pomocí klidové

$$\frac{E_e}{c^2} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

pak už snadno dopočítáme nejmenší možnou rychlost, jakou tento elektron musí letět

$$v = \frac{4\sqrt{3}}{7}\,c\,.$$

Možná si teď říkáte, jak můžeme používat zachování klidové hmotnosti soustavy částic, když v textu páté kapitoly jasně popíráme, že by se musel zachovávat součet klidových hmotností jednotlivých částí izolovaného systému. Není v tom ale žádný rozpor, klidová hmotnost totiž není aditivní veličina. Na rozdíl od celkové hmotnosti není pravda, že by klidová hmotnost celku byla totéž, co součet klidových hmotností jednotlivých částí. Velice dobře je to vidět z prvního vyjádření $m_T$, které jsme v tomto odstavci použili.

Ke stejné výsledné energii a rychlosti bychom samozřejmě mohli dospět i prostým rozepsáním zákonů zachování v těžišťové soustavě (TS) a následnou transformací těchto veličin do soustavy laboratorní

$$\boldsymbol{p}_{e1}^{TS} + \boldsymbol{p}_{e2}^{TS} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{e1}^{TS} = E_{e2}^{TS} \equiv E_e^{TS} \,,$$

$$2E_e^{TS} = 4m_e c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-(v^{TS})^2/c^2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad v^{TS} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, c \,,$$

$$v = \frac{2v^{TS}}{1+(v^{TS})^2/c^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \,, \qquad E_e = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 7m_e c^2 \,.$$

První řešení je ale mnohem elegantnější a poučnější.

***Michal Fabinger***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.