

Zadání III. série



Termín odeslání: 18. ledna 1998

Milí fyzikální přátelé!

Dostáváte do rukou zadání třetí série Fykosu a autorská řešení s výsledkovou listinou první série. Pokud vaše údaje ve výsledkové listině nesouhlasí se skutečností, s příští sérií nám pošlete upřesňující informace. Dále připomínáme, že na služby pošty není vždy dokonalé spolehnoutí, a tak je jistější posílat řešení doporučeně. Pokud by to pro vás byla velká finanční zátěž, můžete zkusit požádat školu o proplácení poštovného nebo posílat řešení v jedné obálce s dalšími řešiteli z vaší školy. Je také nezbytně nutné, aby byly vaše dopisy správně ofrankovány (pozor na hmotnost!), neboť nedoplačené dopisy zpravidla nedostáváme. Posílejte vše včas, neboť pozdě odeslaná řešení již nebudeme tolerovat. Hezké Vánoce vám přejí

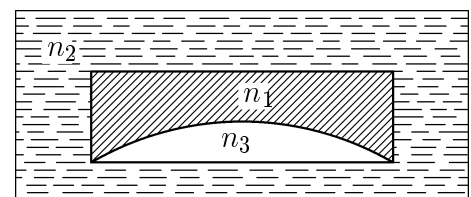
organizátorky a organizátoři Fykosu

Úloha III.1 ... plovoucí krychle

Krychle o hraně a z materiálu o hustotě ρ_1 plave v kapalině o hustotě ρ_2 . Určete, v jaké poloze se krychle ustálí.

Úloha III.2 ... a zase ta čočka!

Tenkou ploskodutou čočku s poloměrem křivosti lámavé plochy R postupně ponořujeme do vody (obr. 1). Nalezněte závislost optické mohutnosti takovéto soustavy na hloubce ponoření čočky. Znáte index lomu skla, vody a vzduchu při atmosférickém tlaku. Závislost indexu lomu vzduchu na tlaku je lineární.



Obr. 1

Úloha III.3 ... hmotnost atmosféry

Spočtete co nejpřesněji, jakou hmotnost má zemská atmosféra.

Úloha III.4 ... drtivý dopad

Z „nekonečné“ vzdálenosti se k Zemi blíží meteorit počáteční rychlostí v_0 . Vzdálenost meteoritu od přímky, která je rovnoběžná s vektorem rychlosti v_0 a prochází středem Země, je na začátku rovna a . Určete, jaký vztah musí platit mezi v_0 a a , aby meteorit nezasáhl Zemi.

Úloha III.P ... západ slunce

Máme 1 m dlouhou tyč, zapíchnutou kolmo do země. Jak dlouhý stín bude mít tyč 2 h před západem slunce? Určete, jak se bude lišit výsledek pro různé zeměpisné šířky a různá roční období.

Úloha III.Exp ... tloušťka vlasu

Změřte tloušťku lidského vlasu více metodami, výsledky a chyby jednotlivých metod porovnejte. Vzorek vlasu přiložen.



Řešení I. série

Úloha I.1 ... *srdce* (4 body, řešilo 108 studentů)

Lidské srdce napumpuje za minutu $q = 5\text{ l}$ krve při tlaku $p \approx 100\text{ mmHg}$. Kolik dní by byla schopna konat stejnou práci standardní autobaterie s účinností $\eta = 50\%$? ($Q = 48\text{ A}\cdot\text{h}$, $U = 12\text{ V}$)

Práci, kterou srdce vykoná, bychom mohli přirovnat k práci pístu, který vytlačuje krev pod tlakem p tak, že za minutu vytlačí objem q . Přitom předpokládáme, že po sevření srdce ochabne a další krev se do něho nalije samovolně, bez toho, aby muselo konat nějakou práci. Označme $q_S = q/\Delta t$ ($\Delta t = 1\text{ min}$) objemový průtok krve. Vypočteme nyní jaký výkon P_S má srdce:

$$\begin{aligned}\Delta W_S &= FS\Delta s \\ \Delta W_S &= p\Delta V \\ \frac{\Delta W_S}{\Delta t} &= p\frac{\Delta V}{\Delta t} \\ P_S &= pq_S\end{aligned}$$

Autobaterie má „v sobě“ energii rovnou $E_A = QU$, dokáže však poskytnout jenom energii $E' = \eta E_A$. Proto pro výsledný čas t (čas, po který je baterie schopna dodávat stejný výkon jako srdce) bude platit

$$\begin{aligned}t &= \frac{E'}{P_S} \\ t &= \frac{\eta QU}{pq} \Delta t \approx 10,8\text{ dne}\end{aligned}$$

Pozor na dosazované veličiny, většina chyb byla způsobena právě nesprávným převodem jednotek. Dosadíme $Q = 48\text{ A}\cdot\text{h} = 172\,800\text{ C}$, $p = 13\,300\text{ Pa}$, $q = 5\cdot 10^{-3}\text{ m}^3$.

Slavomír Nemšák

Úloha I.2 ... *brzdění na motocyklu* (5 bodů, řešilo 57 studentů)

Vzdálenost mezi osou předního a zadního kola motocyklu je $d = 1,4\text{ m}$, jejich poloměr je $r = 0,3\text{ m}$ a koeficient tření mezi pneumatikami a silnicí je $f = 1$. Těžiště motocyklu je uprostřed mezi osami, ve výšce $h = 0,8\text{ m}$ nad zemí. Spočítejte minimální brzdovou vzdálenost pro počáteční rychlost motocyklu $v = 60\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, jestliže řidič používá

- jen zadní brzdu
- jen přední brzdu
- obě brzdy

Zamyslete se nad získanými výsledky a zkuste je porovnat s vaší zkušeností.

Nejjednodušší je řešit příklad ve vztažné soustavě spojené s motocyklem. Je zřejmé, že na motorku působí tíhová síla $F_G = mg$, reakce vozovky na přední kolo R_p , na zadní R_z a setrvačná síla $F_s = ma$.

V případě a) se k výše uvedeným silám přidá třecí síla F_{tz} , která působí na zadní kolo proti směru pohybu. Platí, že výslednice všech sil ve svislém směru je nulová (motocykl nám nevzlétne ani se neproboří).

$$R_p + R_z = F_G \quad (1)$$

a dále je nulový výsledný moment všech sil vůči těžišti (motocykl by nám neměl rotovat):

$$R_z \frac{d}{2} + F_{tz} h = R_p \frac{d}{2}, \quad (2)$$

kde

$$F_{tz} = fR_z . \quad (3)$$

Po vyřešení této soustavy (do (1) a (2) dosadíme za R_z ze (3), z takto upravené (1) vyjádříme R_p a dosadíme do (2)) vztah

$$F_{tz} = \frac{fmgd}{2(d+hf)} ,$$

což je zpomalující síla. Pro zpomalení dostáváme

$$F_{tz} = ma_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{fgd}{2(d+hf)} .$$

Případ b) je podobný. Rovnice (1) zůstává stejná, momentová věta je ve tvaru

$$R_z \frac{d}{2} + F_{tp}h = R_p \frac{d}{2} , \quad (4)$$

kde $F_{tp} = fR_p$ (3). Zde je nutno vyloučit případy, kdy $R_z < 0$ (což z hlediska významu R_z je nutná podmínka platnosti (4), jinak by motocyklista přeletěl přes řídítka). Po dosazení ze (4) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{2(R_p d/2 - F_{tp}h)}{d} &< 0 \\ R_p \frac{d}{2} &< R_p f h \\ \frac{d}{2h} &< f \end{aligned}$$

což f ze zadání nesplňuje. Tuto hodnotu můžeme efektivně snížit tím, že nebudeme brzdit maximální silou, ale jen rozumnou částí. Tím se nám kola budou neustále otáčet a nezablokují se. Pokud snížíme tuto hodnotu efektivně na $f = 0,875$, což vyhovuje naší podmínce, pak pro zpomalení a dostaneme $a_2 = dg/(2h)$.

Případ c) přejde na případ b), neboť při maximálním brzdění ($f = 0,875$) je $R_z = 0$ a tedy nezáleží, jak moc zadní brzdou brzdíme $a_3 = a_2 = a_{2,3} = dg/(2h)$. Pokud zrychlení $a_1, a_{2,3}$ dosadíme do vztahu

$$s = \frac{v^2}{2a} ,$$

(který získáme buď z rovnosti práce vykonané třecí silou a úbytku kinetické energie $F_t s = \frac{1}{2}mv^2$, či pomocí kinematických vztahů $v = at$ a $s = \frac{1}{2}at^2$), tak dostaneme hodnoty $s_1 = 44,5$ m a $s_2 = 16,2$ m. Při výpočtu jsme považovali bržděné kolo ve stavu těsně před tím, než se „utrhne“ od vozovky. Pokud se již utrhne, koeficient tření mezi kolem a vozovkou se změní ze statického na smykový, který je menší (při valení kola jsou dotykový bod kola s asfaltem ve vzájemném klidu).

Jan Prokleška

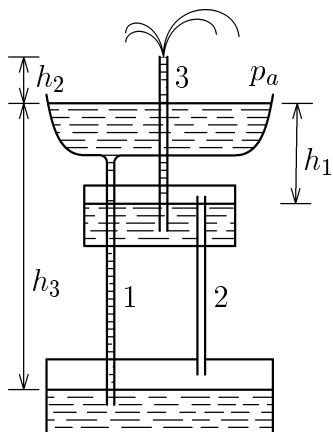
Úloha I. 3 ... fontána (3 body, řešilo 95 studentů)

Na obrázku je nakreslen důmyslný systém nádržek. Spočtete rychlost vody vystřikující z trubky 3. Viskozitu vody zanedbejte ($h_1 = 5$ m, $h_2 = 0,5$ m a $h_3 = 25$ m).

Tato úloha byla pro většinu z vás poměrně jednoduchá. Obvykle si stačilo uvědomit, že v trubce 2 je vzduch. Z důvodu řešitelnosti musíme zavést rozumná zanedbání. Viskozitu jsme zanedbali už v zadání, dále musíme předpokládat, že průřez trubek je mnohem menší než povrch hladiny v jednotlivých nádobách (zřejmě z obr.2). Za těchto předpokladů můžeme pohyb vody v trubkách považovat za ustálený a k řešení použijeme Bernoulliho rovnici:

$$\begin{aligned} p_a &= p - h_3 \rho g \\ p - \Delta p - h_2 \rho g &= p_a + h_1 \rho g + \frac{1}{2} \rho v^2 \end{aligned}$$

Rychlosti hladin lze považovat za nulové, p je tlak vzduchu nad hladinou v dolní nádobě a Δp je úbytek tlaku způsobený tíhovým polem Země.



Obr. 2

Řešením této rovnice získáme

$$v = \sqrt{2g(h_3 - h_2 - h_1 - \Delta p/\rho g)}$$

Nyní již musíme určit jen hodnotu Δp . Jako odhad nám postačí

$$0 \leq \Delta p \leq (h_3 - h_2)\rho_v g$$

kde ρ_v je maximální hustota vzduchu. Tu určíme ze stavové rovnice

$$\rho_v = \frac{pM_m}{RT} = \frac{(p_a + h_3\rho g)M_m}{RT}$$

Platí

$$\frac{\Delta p}{\rho g} \leq (h_3 - h_2) \frac{(p_a + h_3\rho g)M_m}{\rho RT}$$

Číselně je $\frac{\Delta p}{\rho g} < 9 \text{ cm} \ll h_3 - h_2 - h_1$, a proto je tento člen zanedbatelný. (Molární hmotnosti plynů jsou řádově stejné, proto je možno zanedbat Δp i pro jiný plyn.) Rychlost v našem případě vychází 20 ms^{-1} .

K došlým řešením máme několik poznámek. Hodně řešitelů vycházelo ze zákona zachování energie. V tomto případě se však neobešli bez předpokladu, že objem vody, který vyteče z horní nádoby, je roven objemu vody, který stříká z trubky 3 (uvažujte např. průřez trubky 3 větší než průřez trubky 1; ani v tomto případě se nejedná o perpetuum mobile — energie se čerpá z tlakové energie vzduchu ve spodní baňce).

Nakonec drobnou poznámku. Vzhledem k uvažovaným zanedbáním nemá smysl uvádět výsledek na 5 platných cifer.

Karel Kolář & Ondřej Pejchal

Úloha I.4 ... roztržitý výletník (4 body, řešilo 95 studentů)

Roztržitý výletník zaparkoval své auto na kopci se sklonem $\alpha = 10^\circ$ a zapomněl jej zabrzdít. Jaké maximální rychlosti auto dosáhne? Parametry auta jsou: hmotnost $m = 1200 \text{ kg}$, výkon $P = 55 \text{ kW}$, maximální rychlost na rovné silnici $v_{\max} = 140 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Předpokládejte že, odpor automobilu je úměrný druhé mocnině rychlosti.

Pro odporovou sílu platí ze zadání $F_0 = kv^2$, kde k je konstanta úměrnosti. Na nakloněné rovině působí na automobil složka tíhové síly $F'_g = mg \sin \alpha$, která mu uděluje zrychlení. Při dosažení maximální možné rychlosti bude $F_0 = F'_g$ a automobil se bude dále pohybovat rovnoměrně. Pro maximální rychlost tedy dostaneme

$$mg \sin \alpha = kv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k}}$$

Konstantu k určíme z chování automobilu na rovině. Automobil je urychlován silou $F = P/v$, která bude mít při v_{\max} stejnou velikost jako F_0 a vyjádří se stejně jako při pohybu po rovině, tedy:

$$\begin{aligned} F_0 &= F \\ kv_{\max}^2 &= \frac{P}{v_{\max}} \\ k &= \frac{P}{v_{\max}^3} \end{aligned}$$

Pro hledanou rychlost v máme po dosazení vztah:

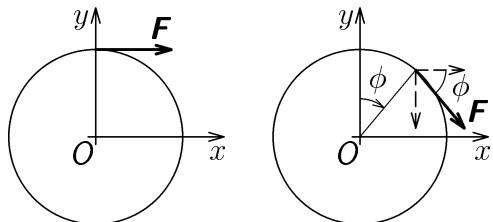
$$v = \sqrt{\frac{mgv_{\max}^3 \sin \alpha}{P}},$$

po dosazení konkrétních hodnot ze zadání $v = 47 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 170 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$

Libor Sedláček

Úloha I. 5 ... planetka (5 bodů, řešilo 69 studentů)

Mějme ve volném prostoru planetku (pro jednoduchost uvažujme, že planetka je homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R), na jejíž povrch připevníme raketový motor. Motor je ideální zařízení, které má nulovou hmotnost a bez ohledu na cokoli dokáže vyvíjet určitý tah F . Motor je upevněn k povrchu planetky a nemůže se od něho odpoutat. Upevněn je tak, aby vyvíjený tah měl směr tečný k povrchu — viz obr. Určete, alespoň kvalitativně, jak se bude planetka pohybovat po uvedení motoru v činnost.



Obr. 3

Planetku považujeme za tuhé těleso. Můžeme využít 1. a 2. větu impulsovou. Ty popisují pohyb hmotného středu tělesa a rotaci tělesa kolem osy procházející tímto bodem. Zvolíme-li soustavu Oxy a orientaci úhlů ϕ po směru hodinových ručiček (viz obr. 3), máme definovanou soustavu, ve které popisujeme pohyb. Vzhledem k symetrii problému bude pohyb rovinný.

Pro vyšetření otáčivého pohybu zvolme soustavu spojenou s hmotným středem planetky, takovou, že směr os bude pevný v prostoru. Tato soustava je sice neinerciální, ale setrvačné síly mají působiště v hmotném středu. Jediná síla, která způsobuje otáčení je tedy síla způsobená motorem raketky. Tato síla je konstantní a proto bude v naší soustavě planetka konat rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb. Pro velikost úhlového zrychlení ε platí:

$$FR = M = J\varepsilon ,$$

kde

$$J = \frac{2}{5}mR^2 .$$

Úhlová rychlost po určitém čase t bude

$$\omega = \frac{5}{2} \frac{F}{mR} t$$

a úhel otočení

$$\phi = \frac{5}{4} \frac{F}{mR} t^2 .$$

Někteří z vás uvažovali, kdy se planetka roztrhne odstředivou silou.

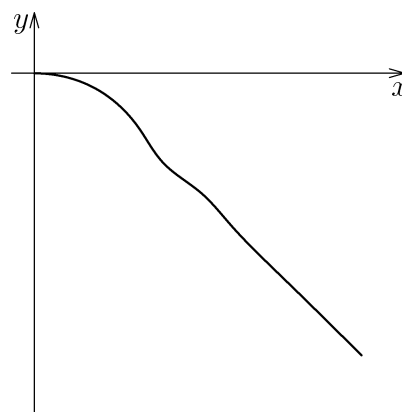
V soustavě pevné v prostoru působí na planetku jediná síla (tah motoru), rozkladem této síly do směrů x a y získáme pro pohyb hmotného středu diferenciální rovnice

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} \cos \phi(t) , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F}{m} \sin \phi(t) ,$$

Bohužel tyto rovnice neumíme řešit analyticky. Někteří z vás je simulovali v Pascalu nebo Famulu a vytiskli i graf.

Z grafu na obr. 4 vidíme, že postupně se bude pohyb planetky stále více blížit přímce a planetka bude stále méně zrychlovat.

Poznámka: Někteří z vás si zvolili jiné soustavy, asi nejjednodušší byl popis pohybu planetky v soustavě pevné spojené s tělesem. Těleso v ní zůstane v klidu.

Libor Dener

Obr. 4

Úloha I. Exp ... var vody (8 bodů, řešilo 63 studentů)

Změřte měrné skupenské teplo vypařování u vody. Předpokládejte, že znáte měrnou tepelnou kapacitu vody a z rychlosti ohřívání spočtete užitečný příkon vařiče. Nespalte se!

První experimentálka byla docela jednoduchá a v mnoha ohledech byla určena na procvičení zpracování chyb měření a úvah na co nejlepší uspořádání pokusu, přičemž poskytovala poměrně volnou cestu. Řešení by se dala rozdělit podle vybavení, které jste použili. Nejčastěji se jednalo o plynový, el. vařič, kahan, ponorný vařič a méně často i mikrovlnku. Dále se práce v základě lišily započítáváním či zanedbáváním tepelné kapacity nádoby (pomineme-li ty z vás, kteří se o ní ani nezmínili). Různily se též způsoby odečítání hmotnosti vody, buď na základě měření objemu (kde je však třeba uvážit objemovou roztažnost!) nebo hmotnosti přímo (mnozí aparaturu přímo umístili na váhu). Jednotlivé postupy, většinou variace na schéma $P = Q/t$ a $\Delta t = l_v \Delta m$, se pak lišily stupněm eliminace ztrátových jevů. Cílem autorského řešení není ukázat bombastické řešení vedoucí k tabulkové hodnotě, nýbrž poukázat na mnohé zajímavé myšlenky, netradiční návrhy a statistické zpracování chyb

1. Měření efektivního výkonu

Při kalibraci zdroje tepla potřebujeme co nejvíce eliminovat ztráty způsobené vypařováním (jednak nám pára odnáší teplo a také se podílí na změně hmotnosti). O významnosti tohoto jevu se můžeme snadno přesvědčit, necháme-li chladnout horkou vodu v šálku s volnou hladinou a ve stejném uspořádání s hladinou pokrytou tenkou vrstvou oleje. Konkrétně jsme naměřili rozdíl $4,5^\circ\text{C}$ za v obou případech stejnou dobu 15 minut.

Vliv výparu můžeme například ovlivnit velikostí povrchu kapaliny, tedy použijeme nádobu z úzkým hrdlem. Je dobré kalibrovat na teplotním okolí bodu varu — ztrátové jevy se zde uplatňují jinou mírou než při 20°C . Nyní jde o popsání ohřevu nádoby. Pokud jej chceme zanedbávat, musíme k tomu mít dobrý důvod (nízká hmotnost, malá tep. kapacita — např. tenkostěnná kádinka), objekt typu hrnec se ovšem ohřívá velice významně. Mnozí použili tabulkových hodnot pro hliník. Problémem zůstává tepelné záření a možnost izolovatelnosti soustavy (nabízí se kalorimetr). Ke stanovení samotného výkonu většina z vás odečetla teplotu na určité časové škále a postupným dělením a výpočtem průměru se dopracovala ke střední hodnotě P . Podotkneme, že měrnou tepelnou kapacitu vody můžeme vzhledem k ostatním chybám považovat za konstantní (ale je dobré si uvědomit její obecnou proměnnost!). Pro názorné zpracování výsledků jsme se rozhodli použít data naměřená J. Myslivečkem, který pracoval s ponorným vařičem (výrobce uváděný příkon — 300 W), přičemž kapacitu kalorimetru zanedbával.

Významně ovšem zamezil ztrátám zářením. Teplotu měřil vždy po $t = 30$ s výkon počítal dle vztahu

$$P = \frac{mc_v \Delta T}{\Delta t} .$$

i	t	Δt	P	ΔP
	$^\circ\text{C}$	$^\circ\text{C}$	W	W
1	23.1	7.6	318	14
2	30.1	7.2	301	-3
3	38.1	8.0	334	30
4	45.7	7.6	318	14
5	52.8	7.1	297	-7
6	59.6	6.8	284	-20
7	66.8	7.2	301	-3
8	73.7	6.9	288	-16
9	80.7	7.0	293	-11
10	87.9	7.2	301	-3

Nejprve spočítáme aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Zde konkrétně $\bar{P} = 304 \text{ W}$.

Pro každou naměřenou hodnotu stanovíme zdánlivou chybu $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$ a vypočteme standardní odchylku:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}.$$

Tedy $s = 15,4 \text{ W}$. Vyloučíme hrubé chyby použitím tzv. $3s$ -kritéria, tedy vyloučíme ty naměřené hodnoty, které se od aritmetického průměru odchylují o více než $3s$. Výše uvedený postup opakujeme.

Dále určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru — statistickou chybu

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}$$

Pro naše hodnoty $s = 4,9 \text{ W}$. Je dále dobré stanovit systematickou chybu — u přístrojů bereme například polovinu nejmenšího dílku stupnice. Chybu metody, není-li možné ji vypočítat, je dobré alespoň odhadnout.

Určíme celkovou chybu podle vzorce

$$s_{\text{celk}} = \sqrt{3s_{\text{stat}}^2 + s_{\text{sys}}^2}$$

nebo pro malý počet měření

$$s_{\text{celk}} = 3s_{\text{stat}} + s_{\text{sys}}.$$

Vypočtená hodnota celkové chyby se uvádí na jednu platnou cifru a výsledná hodnota ve tvaru:

$$x = (\bar{x} \pm s_{\text{celk}}) j.$$

Chyba metody při měření teploty je $0,1^\circ\text{C}$, čemuž přibližně odpovídá systematická chyba $4,2 \text{ W}$.

Chyby měření času zanedbáváme, jsou s přesnými stopkami mnohem menší. V našem případě je celková chyba 16 W a tedy výkon je roven $P = (300 \pm 20) \text{ W}$.

2. Měření samotného l_v

Zde je nutné přivést vodu co nejrychleji k varu, abychom co nejvíce zredukovali vypařování v průběhu ohřevu. Objevil se například nápad použít pro tuto fázi pokličku. Lepší možností je s hmotnostními ztrátami počítat a změřit je. Provedeme-li při zahřívání paralelně druhý pokus za stejných podmínek, přičemž nádobu odstavíme při dosažení varu, můžeme změřit hmotnostní úbytek, čímž získáme skutečnou hmotnost vody jdoucí do varu.

Je třeba rozvážit, zda je vhodné odpařit všechnu vodu, jak mnoho z vás učinilo. Čas neodhadneme přesně a navíc se výrazně změní charakteristiky soustavy. V následujícím měření se sledoval hmotnostní úbytek vody po 300 s varu. Užitím $l_v = P\Delta t/\Delta m$ snadno určíme měrné skupenské teplo varu.

i	m	Δm	l_v	Δl_v
	g	g	$\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$	$\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
1	386.6	39.7	2297	-58
2	348.7	37.9	2406	51
3	310.5	38.2	2387	32
4	271.0	39.5	2309	-46
5	232.6	38.4	2375	20

$$\begin{aligned} \bar{l}_v &= 2355 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \\ s &= 48,7 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \\ s_{\text{stat}} &= 21,8 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \end{aligned}$$

Chyba v určení hmotnosti: $\pm 0,1$ g, tedy chyba v určení l_v je přibližně $5 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Chyba daná chybou určení hodnoty výkonu způsobí odchylku přibližně $120 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Chyby v určení času a hmotnosti můžeme vůči neurčitosti výkonu zanedbat.

Celková chyba \bar{l}_v pak činí $137 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ a naměřenou hodnotu můžeme zapsat ve tvaru $l_v = (2400 \pm 200) \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Pokud měříme hmotnost pomocí objemu, je nutné uvážit hustotu vody jako funkci teploty.

Diskuze: srovnajme možná uspořádání pokusu podle způsobu ohřevu vody:

1. Ohřev na sporáku (plynovém, elektrickém) — snad nejčastější případ, jeho nevýhodou je například silné zahřívání plotny a velké úniky tepla do okolí vůbec.

2. Ponorný vaříč — máme zaručen konstantní příkon zdroje, zahříváme přímo vodu a v malé nádobě dosáhneme dobrého rozložení teploty ve vodě. Snadnější je i manipulace s aparaturou.

3. Snad nejnevýhodnější způsob ohřevu se nám zdálo použití mikrovlnné trouby, protože nemáme jistou, že její tepelný příkon je opravdu konstantní v čase. A se vzorkem vody se nepracuje právě snadno. Kladem této metody je, že se zahřívá opravdu jenom vzorek vody a nádoba pouze minimálně.

Jako jiný příklad zpracování výsledků měření můžeme ještě uvést metodu lineární regrese, která spočívá v hledání koeficientů lineární funkce (např. metodou nejmenších čtverců) tak, aby křivka co nejlépe popisovala naše data (u kterých ovšem předpokládáme lineární závislost). O tom, nakolik přesně proložená přímka aproximuje naměřené hodnoty nás pak informuje koeficient korelace r (ten vždy leží v intervalu $(0,1]$ a pro hodnoty mezi $0,8$ a 1 můžeme závislost vskutku považovat za lineární). Pro podrobnější seznámení doporučujeme starší ročenky semináře či jinou literaturu.

Měření výkonu jsme prováděli na kolejním sporáku po dobu 360 s, přičemž teplotu jsme odečítali každých 20 s. Hmotnost vody $M = 0,5$ kg, hmotnost hliníkové nádoby $m = 0,2076$ kg (měrná kapacita $c = 896 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{Kg}^{-1}$). Ze sady měření jsme vyňali sekvenci sedmi dvojic hodnot, uvedenou v tabulce.

i	t [s]	T [°C]
1	160	61.5
2	180	64.5
3	200	67.0
4	220	70.5
5	240	73.0
6	260	76.0
7	280	79.0

Použitím lineární regrese s předpokládanou závislostí $T = at + b$ jsme získali

$$a = 0,1455 \text{ }^\circ\text{C}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$b = 38,20 \text{ }^\circ\text{C} \quad (\text{vskutku, v } t = 0 \text{ byla teplota } 40 \text{ }^\circ\text{C})$$

$$r = 0,9996 \quad (\text{koeficient korelace})$$

Platí:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = a \quad P = \frac{\Delta T}{\Delta t} (c_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}} + c_{\text{Al}} m_{\text{Al}}) \doteq 333,9 \text{ W}$$

Vcelku jste se všichni snažili experimentovat, což je dobře. Někdy ovšem neškodí uvést pomůcky a přesně charakterizovat způsob měření (mnozí např. uvedli, že odečetli hmotnost, ale způsob, kterým to provedli, už ne!). Je dobré začít také trochou teorie, tabulka na úvod nepůsobí nejlépe. Důležité však je nepokoušet se modifikovat výsledky tak, aby nám vyšla tabulková hodnota — o to zde skutečně nejde. Mnoho vztahů hezky vypadajících v teorii může narážet na mnohé překážky v praxi. Jednou z nejdůležitějších částí řešení je diskuse (není-li prováděna průběžně), která slouží právě k tomu, abyste se nad problémem správně zamysleli. Děkujeme vám také za některé slohové hříčky („do hrnku jsem nalil vodu, postavil na vaříč a zapálil jsem ho“, „vodu dáme na kamna...“). Někteří pravděpodobně razili zásadu „napíšeme krátké řešení a opravovatelé budou mít radost“ — to ovšem pravdou není, naopak! Vítejme každý bláznivý nápad, nebojte se skutečně experimentovat i s myšlenkami, být hraví a kreativní — to je smysl experimentální úlohy.

Nakonec podotkněme, že v mnohých bodech diskuse a závěru jsme se opírali o názory Petera Čenduly, Karla Kouřila a Petra Nečesala.

Michal Bittner & Jiří Kvita

Úloha S.I ... dalekohledy a čočky (6 bodů, řešilo 55 studentů)

a) Kolikrát slabší hvězdy bude schopen zaznamenat dalekohled VLT, který se staví na La Silla, Chile, než lidské oko? Je vybaven čtyřmi zrcadly, každé má průměr 8 m, expoziční doba pořizovaných snímků je 1000 s. Lidské oko shromažďuje světlo po dobu asi 0,2 s.

b) Vymyslete jednoduchou metodu, kterou rozlišíte spojky od rozptylek s velkými ohniskovými vzdálenostmi (> 20 m), tj. že spojky nefungují jako lupa. Jediné pomůcky, které máte, jsou vaše oči, ruce, mozek a okolní zdi. (Nápověda: sežeňte třeba brýlovou spojku a rozptylku a experimentujte.)

a) Množství světla, které dalekohled VLT (Very Large Telescope) nebo lidské oko shromáždí, je přímo úměrné sběrné ploše S a expoziční době t . VLT tedy shromáždí

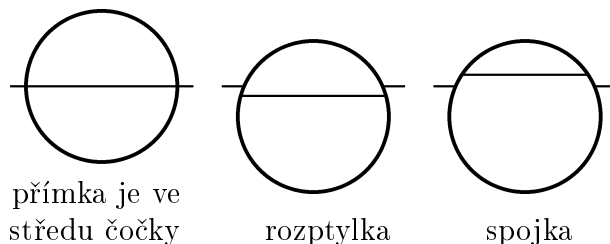
$$\frac{4S_{\text{VLT}}t_{\text{VLT}}}{S_{\text{oko}}t_{\text{oko}}} = \frac{4 \cdot 8^2 \cdot 1000}{0,008^2 \cdot 0,2} = 2 \cdot 10^{10}$$

krát více světla než jedno lidské oko. Čtyřka v čitateli zahrnuje 4 zrcadla, ze kterých se dalekohled skládá.

Někteří z vás trefně poznamenali, že jsme opomenuli uvést citlivosti detektorů světla (CCD kamery a oka) a nemůžeme se tedy ptát na to, kolikrát slabší objekty budou dalekohledem vidět.

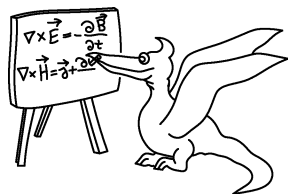
Více informací o tomto dalekohledu můžete najít na internetu na <http://www.eso.org>.

b) Oceňujeme velké množství metod, jak rozlišit spojky od rozptylek, se kterými jste přišli. Nejvíce se nám líbilo řešení s rozlomením čočky a proměřením tloušťky na okraji a ve středu. Mnohem levnější je však tento úplně jednoduchý způsob: podržte si čočku v natažené ruce, podívejte se skrz ni a pohybujte s ní směrem dolů, pokud se vám zdá, že obraz ubíhá dolů, jedná se o rozptylku, ubíhá-li obraz nahoru, pak je to spojka.



Většina ostatních metod buď potřebuje nějaké dodatečné pomůcky, které v zadání nebyly zmíněné (např. dokonale hladká plocha, zdroj kolimovaného světla), anebo nefunguje pro velké ohniskové vzdálenosti. Skuste si spočítat, jaký je rozdíl mezi ideální rovinou a koulí u lámavé plochy ploskovypuklé čočky s ohniskovou vzdáleností 20 metrů. Vyjde vám, že odchylka je několik setin milimetru!

Jan Hradil & Miroslav Brož



Seriál na pokračování

Chování světla popisujeme někdy jeho vlnovými vlastnostmi, někdy jeho korpuskulárními (částicovými) vlastnostmi. Tomuto „rozpolcení“ se říká dualita vlna-částice. V případě, že se světlo chová jako částice, mluvíme o fotonu, nejmenším množství světla. Vlnové vlastnosti světla můžeme pozorovat například při interferenci světla na tenké olejové vrstvičce na kaluži, kdy vidíme duhové proužky. Když zachytíme světlo na fotografickou emulzi a podíváme se na ni podrobně mikroskopem, uvidíme jednotlivé malé tečky. V místech, která na fotografii vidíme tmavší je teček více, ve světlejších méně a v bílých místech nejsou téměř žádné tečky. Tečky jsou místa, kde foton interagoval s emulzí. Na místě tečky byl původně krystalek bromidu stříbrného, který se díky energii fotonu rozpadl a po vyvolání se vyloučil nějaký oxid stříbra, který se jeví černě. Když mluvíme o energii fotonu, řekněme si jaká vlastně je. Energie, kterou nese foton je závislá na jeho

barvě, tj. na vlnové délce či frekvenci. Platí jednoduchý vztah pro energii fotonu o vlnové délce λ , resp. frekvenci ν

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

kde $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J·s je Planckova konstanta a $c = 2,998 \cdot 10^8$ ms⁻¹ je rychlost světla. Kromě energie nese každý foton i hybnost. Velikost hybnosti fotonu je

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Využití hybnosti fotonu se zrodilo v hlavách autorů sci-fi literatury, ale již o něm seriózně uvažují i kosmické agentury. Jmenuje se „sluneční plachetnice“. Takové plachetnice by sloužily k levné dopravě materiálu směrem od Slunce, tj. ze Země k Marsu a dalším planetám sluneční soustavy. Každá plachetnice by byla vybavena velkou „plachtou“ nasměrovanou ke Slunci. Sluneční světlo by předávalo svoji hybnost plachtám a tedy i plachetnici a ta by získávala rychlost bez použití motorů a drahého paliva. Získané zrychlení je sice malé, zato lze zrychlovat téměř neomezeně dlouho.

V případě sluneční plachetnice je tlak záření mizivý, ale ve hvězdách může nabýt vysokých hodnot. V případě velmi hmotných a teplých hvězd se tlak záření podílí významně na konečné fázi života hvězdy, totiž na jejím výbuchu v supernovu, kdy rozmetává do okolí celou obálku hvězdy.

Nyní se budeme věnovat vlnovým vlastnostem světla. Světlo je elektromagnetické vlnění a každé elektromagnetické vlnění je příčné. To si můžeme představit jako by v prostoru byly umístěny vektory, které periodicky mění svou velikost podle funkce $\cos \omega t$, tzn. periodicky mění velikost i orientaci. Tyto vektory jsou vektory elektrické intenzity \mathbf{E} a magnetické indukce \mathbf{B} . Oba dva vektory kmitají v rovině kolmé ke směru šíření a také \mathbf{E} je kolmý na \mathbf{B} . Směr, ve kterém kmitá \mathbf{E} , určuje polarizaci světla.

Ve většině úloh vystačíme s tzv. skalární aproximací, která nebere v úvahu vektorový charakter světla, ale vystačí jen s velikostí elektrické intenzity. Magnetickou indukci nemusíme explicitně uvažovat, protože lze ukázat, že velikost magnetické indukce v prostředí bez elektrických proudů a nábojů jednoznačně závisí na elektrickém poli. Ve skalární aproximaci pak popisujeme monochromatické světlo jako harmonickou vlnu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi), \quad (5)$$

kde ω je frekvence světla ($\omega = 2\pi\nu$), φ je fáze vlny a \mathbf{k} je vlnový vektor. Vlnový vektor má směr shodný se směrem šíření vlny, jeho velikost je $k = 2\pi/\lambda$. Skalární součin $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ je konstantní pro každou rovinu kolmou k vlnovému vektoru \mathbf{k} . Těmto rovinám říkáme roviny konstantní fáze, to znamená, že v konkrétním časovém okamžiku nabývá argument funkce kosinus v celé rovině stejné hodnoty. Pokud uvažujeme jednorozměrný případ, můžeme skalární součin nahradit prostým součinem velikostí vlnového vektoru a souřadnice. Probíhá-li vše v ose x , pak nahrazujeme skalární součin vztahem kx .

Takto definovaná rovinná vlna má harmonický průběh v čase i prostoru (ve směru šíření). V každém pevně zvoleném bodě v prostoru se bude elektrické pole $\mathbf{E}(t)$ harmonicky měnit s časem.

Na tomto místě stojí za to si položit otázku. Mluvíme tu o jakési periodické funkci, ale když se díváme na světelný paprsek tak žádné periodické změny nepozorujeme. Tento zdánlivý paradox je způsoben tím, jak světlo vnímáme. Naše oko neumí detekovat tak rychlé změny (frekvence viditelného světla je asi $10^{14} - 10^{15}$ Hz a víme, že televize oklame naše oko již s frekvencí kolem 25 Hz tak, že vnímáme pohyblivý obrázek a ne jednotlivé změny obrazu). Místo toho oko detekuje střední hodnotu energie, která dopadá na plochu, tedy tzv. intenzitu I . Nevnímáme tedy vlastní kmitání elektrického pole, ale jen amplitudu těchto kmitů. Intenzita záření souvisí s elektrickou intenzitou vztahem

$$I = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}_0^2,$$

kde n je index lomu prostředí, ε permitivita a μ permeabilita.

To, že světlo fyzikálně popisujeme vektorem elektrické intenzity, ale detekujeme intenzitu I má za důsledek celou skupinu jevů, které nazýváme interferenční a ohybové. Představme si dvě rovinné vlny, které se šíří stejným směrem, každá o intenzitě I_0 , tedy amplituda elektrické intenzity $E_0 \sim \sqrt{I_0}$ (faktory úměrnosti mezi I a E nemají vliv na podstatu problému a proto je již dále nebudeme vypisovat). Pokud se obě vlny překryjí v prostoru, sečtou se jejich elektrické intenzity. V případě shodné fáze obou vln dostáváme součet

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi) + E_0 \cos(\omega t + \varphi) = 2E_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

V argumentu kosinu neuvádíme člen závislý na poloze, jelikož je konstantní pro obě vlny (vše pozorujeme v jednom bodě) a jeho hodnotu zahrnujeme do hodnoty fáze φ . Intenzita světla v tomto bodě prostoru je $I \sim E^2 = (2E_0)^2 \sim 4I_0$. Takovéto interferenci říkáme konstruktivní interference. Pokud ale obě vlny mají fázový rozdíl π (např. každá urazila jinou vzdálenost), výrazy pro obě vlny nejsou shodné, ale argumenty se liší o π . Uvědomíme-li si, že $\cos(\psi + \pi) = -\cos(\psi)$, opět můžeme sečíst obě vlny a dostáváme

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi) + E_0 \cos(\omega t + \varphi + \pi) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) - E_0 \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

V tomto případě je intenzita pole které pozorujeme nulová a mluvíme o destruktivní interferenci.

Vypadá to, že bychom kolem sebe měli vidět jen samé interferenční jevy, všude samé interferenční proužky. Bohužel, interference může vznikat jen pokud je interferující záření dostatečně koherentní, tj. fáze jednotlivých vln jsou dostatečně provázané. Toho lze dosáhnout jen pokud obě vlny pocházejí ze stejného zdroje. Pokud jsou zdroje různé, jsou fáze dopadajících vln náhodné a výsledná intenzita je daná součtem intenzit dopadajících vln.

Komplexní čísla

Člověk znal nejdříve přirozená čísla, později k nim přidal nulu, ještě později celá čísla až došel k reálným číslům. Každé rozšíření souviselo s tím, že některá operace neměla výsledek v dosavadním číselném oboru. Pokud známe jen přirozená čísla, nemůžeme odečítat každé číslo od každého. Operace $3 - 5$ nedá výsledek patřící do přirozených čísel (\mathbb{N}) a proto se zavedla čísla celá (\mathbb{Z}). Podobně komplexní čísla \mathbb{C} vznikla z potřeby odmocňovat reálná čísla. Odmocnit kladné reálné číslo umíme, tzn. umíme vyřešit rovnici $x^2 = 1$. Ale rovnice $x^2 = -1$ nemá v reálných číslech řešení. Proto zavedeme symbol i definovaný jako $i = \sqrt{-1}$. Hlavní vlastnost čísla i je, že $i^2 = -1$.

Reálná čísla zobrazujeme na reálnou osu, vystačíme s přímkou. Komplexní čísla ale potřebují ke svému zobrazení dva rozměry, zobrazují se do tzv. Gaussovy roviny. Dvěma osám v rovině říkáme reálná a imaginární. Každé komplexní číslo se zobrazí jako jeden bod roviny. (Reálná čísla jsou podmnožinou čísel komplexních, stejně jako jsou přirozená čísla podmnožinou čísel celých.) Komplexní číslo můžeme zapsat několika způsoby. Můžeme jej zapsat jako uspořádanou dvojici dvou reálných čísel. Jednomu říkáme reálná část a druhému imaginární část a jsou to vlastně kartézské souřadnice bodů v rovině. Když si číslo představíme jako vektor s počátkem v počátku a koncem v bodě Gaussovy roviny, můžeme jej charakterizovat jeho vzdáleností od počátku R (modul, absolutní hodnota) a úhlem φ , který svírá jeho směr s kladným směrem reálné osy. Číslo pak napíšeme ve tvaru $Re^{i\varphi}$ (obr. 5). Absolutní hodnota R i úhel φ jsou reálná čísla. Platí velmi důležitá Moivrova věta, která říká, že

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (6)$$

Číslo $e^{i\varphi}$ říkáme komplexní jednička, protože jeho absolutní hodnota, tj. délka vektoru, je rovna jedné (viz obr. 5). Všechny komplexní jedničky leží v Gaussově rovině na kružnici se středem v počátku o poloměru jedna.

Komplexní čísla ve fyzice

Dost matematické teorie, podívejme se, jak se uplatní komplexní čísla ve fyzice. Co to vlastně znamená, když napíšeme $e^{i\omega t}$? Toto číslo se vyvíjí v čase tak, že jeho velikost zůstává konstantní a rovna jedné, ale úhel mezi ním a reálnou osou lineárně roste. Vektor charakterizovaný tímto číslem se otáčí jako hodinová ručička na ciferníku, díky tomu, jak jsme zvolili kladný směr odečítání úhlu,

tak zrovna na druhou stranu než u normálních hodin. Reálná část osciluje jako kosinus a imaginární část jako sinus.

Když ωt nabyde hodnoty $-\pi$ potká se vektor znázorňující komplexní číslo se zápornou částí reálné osy, hodnota $e^{i\pi} = -1$. Hodnota argumentu exponenciály $i\pi/2$ dává hodnotu i a $e^{-i\frac{3}{4}\pi} = -i$.

Obvykle se takovýmto způsobem vyjadřuje i rovinná vlna. Jistě se ptáte, jak může souviset reálný objekt jako je světlo či vlna s komplexním číslem? S reálnou veličinou, kterou skutečně můžeme měřit, souvisí reálná část takového komplexního čísla. Imaginární část komplexního čísla si do výpočtu přidáme. Pak s počítáme s komplexním číslem a nakonec, když dostaneme výsledek vezmeme z výsledku zase jen reálnou část komplexního výsledku, protože víme, že imaginární část nemá fyzikální význam. Komplexní čísla se hojně používají tam, kde jsou fyzikální veličiny vyjádřeny pomocí sinů a kosinů. To je především v teorii střídavých elektrických obvodů s cívkami a kondenzátory, ve vlnové teorii světla a také v kvantové mechanice. Celé „zesložitění“ se provádí jen proto, že se s komplexními čísly se pracuje mnohem snáze než s kosiny a siny samotnými.

Rovinnou vlnu jsme zapsali jako

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

pokud přidáme ještě imaginární složku s funkcí sinus, můžeme rovinnou vlnu podle Moivroy věty (6) napsat jako

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}.$$

Pak sčítáme jednoduše exponenciály a nemusíme používat složité součtové vzorce pro siny a kosiny.

Příště si ukážeme, jak nám použití komplexní symboliky zjednoduší výpočet vlastností Fabry-Perotova rezonátoru. Pokud ještě neovládáte komplexní čísla, pokuste se přečíst si něco o nich.

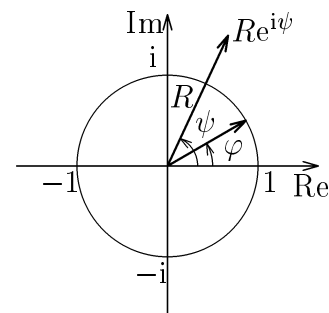
Úloha III.S ... plachetnice a světlo

- Jaké zrychlení bude mít sluneční plachetnice o hmotnosti $m = 10$ t a velikosti plachet $S = 1000$ m² nedaleko Země, kde je světelný výkon Slunce (solární konstanta) $k = 1330$ W·m⁻²? Za jak dlouho by taková plachetnice dorazila od dráhy Země k dráze Marsu, pokud bychom ji vypustili s nulovou rychlostí? Předpokládejte, že velikost solární konstanty je v prostoru mezi Zemí a Marskem konstantní, zanedbejte gravitační vlivy všech těles. Poloměr dráhy Země je 1 AU, poloměr dráhy Marsu je 1,523 AU. AU je astronomická jednotka a její velikost je $1 \text{ AU} = 1,495\,978\,70 \cdot 10^{11}$ m \sim 150 mil. km.

Velikost solární konstanty samozřejmě závisí na vzdálenosti od Slunce. Jaká je její velikost na Marsu?

- Vysvětlete proč je výhodnější vyrábět plachty sluneční plachetnice z materiálu, který má blízko k zrcadlovému lesku, než z matného materiálu.
- Jaká je intenzita elektrického pole (ve V·m⁻¹) v laserovém svazku s intenzitou 150 kW·cm²? Jak velká by musela být intenzita svazku, aby docházelo k ionizaci vzduchu?
- Jak by se musel upravit argument funkce kosinus, aby vztah (5) nepředstavoval rovinnou, ale kulovou vlnu. Kulová vlna je vlna, šířící se z bodového zdroje, asi jako když hodíte kámen do rybníka. Roviny konstantní fáze u kulové vlny jsou soustředné koule se středem ve zdroji.

Naše adresa: **FYKOS, KTF MFF UK**
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8
<http://www.mff.cuni.cz/iso/news/fks>



Obr. 5