

Zadání V. série



Termín odeslání: 12. dubna 1999

Úloha V. 1 ... *jehla na vodě*

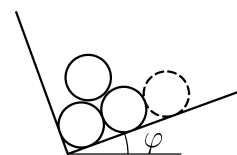
Určete maximální průměr ocelové jehly, která se ještě udrží na vodní hladině. Jehla je pokryta tenkým olejovým filmem, aby ji voda nesmáčela. Znáte hustotu oceli, vody a povrchové napětí vody. Pokud řešení problému závisí na délce jehly, pokládejte ji za známou a diskutujte její vliv.

Úloha V. 2 ... *dvě láhve*

Dvě láhve, jednu plnou vody a jednu prázdnou, necháme kutálet po nakloněné rovině. Která se skutálí rychleji? Pokud ty samé láhve vyšleme se stejnou počáteční rychlostí po nakloněné rovině nahoru, která se dokutálí výše?

Úloha V. 3 ... *nákladní auto*

Nákladní auto bylo naloženo stejnými hladkými kládami. Před jejich vykládkou zastavilo tak, že pravými koly stojí o pozdnání výše než levými (příslušná přední a zadní kola jsou ovšem ve stejné výšce). Řekněme, že rovina nákladního prostoru svírá s horizontální rovinou úhel φ , viz obrázek 1. Po vykládce zbyly na autě tři klády tak, jak je na obrázku nakresleno plnou čarou. Na jakou hodnotu by se musel snížit úhel φ , aby se klády přeuspořádaly tak, že by ležely vedle sebe? Jakékoli tření zanedbejte.



Obr. 1

Úloha V. 4 ... *kulička a nakloněná rovina*

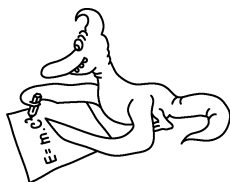
Dokonale pružnou ocelovou kuličku spustíme z výšky h (měřeno od místa dopadu) na nakloněnou rovinu, svírající s vodorovnou rovinou úhel α . Ve vzdálenosti d od místa dopadu kuličky (ve směru klesání roviny) je svislá stěna. Určete jak vysoko (nad místem dopadu) v ní musíme udělat otvor, aby jím kulička proletěla. Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $h = 50$ cm, $d = 15$ cm, $\alpha = 15^\circ$. Diskutujte pohyb kuličky v případě, že nakloněná rovina je nekonečná a kulička nic v cestě nestojí.

Úloha V. P ... *nabitá koule*

Mějme rovnoměrně nabitou kovovou kulovou slupku s poloměrem R a s celkovým nábojem Q . Rozřízneme ji na dvě části rovinou, která je od středu koule vzdálena $d < R$. Úkolem je spočítat sílu, jakou se obě části budou odpuzovat, dokud jsou velmi blízko sebe.

Úloha V. Exp ... *listopad*

Když vezmeme list papíru a pustíme jej ve vodorovné poloze, začne pomalu padat. Pokud jej přehneme na polovinu, bude padat rychleji - toť známý fakt. Vaším úkolem je pomocí tohoto jevu zjistit, podle jakého vztahu se mění odporová síla vzduchu působící na papír (závisí na rychlosti lineárně či kvadraticky?). Pokuste se určit potřebné konstanty.



Řešení III. série

Úloha III.1 ... plovoucí krychle (4 body, řešilo 63 studentů)

Krychle o hraně a z materiálu o hustotě ρ_t plave v kapalině o hustotě ρ_k . Určete, v jaké poloze se krychle ustálí.

Na začátku bych rád podotkl, že když krychle v kapalině plave (tak to bylo zadáno) tak musí být $\rho_t \leq \rho_k$. V případě $\rho_t = \rho_k$ se bude krychle ve vodě vznášet a může zaujmout jakoukoli polohu. Dále budeme uvažovat pouze $\rho_t < \rho_k$.

Nyní si ujasníme, v jaké poloze se krychle může ustálit. Bude to v každé stabilní rovnovážné poloze. Rovnovážná je taková poloha, kdy výsledná síla i výsledný moment sil působící na krychli je nulový. Stabilní je tehdy, když se navíc těleso po malé výchylce v jakémkoli směru vrátí do původní polohy. Z energetického hlediska je stabilní ta poloha, v níž má potenciální energie tělesa lokální minimum.

Pro krychli plovoucí v kapalině existují 3 rovnovážné polohy

1. horní a dolní podstava je vodorovná
2. dvě stěnové uhlopříčky jsou svislé (hranou nahoru)
3. jedna tělesová uhlopříčka je svislá (rohem nahoru).

Teď bychom měli rozhodnout, pro jaký poměr hustot ρ_t/ρ_k jsou jednotlivé polohy stabilní. Nepodařilo se mi najít jednoduché řešení tohoto problému (vám také ne), a proto budeme řešit trochu jednodušší případ. Pro daný poměr hustot spočteme potenciální energii všech tří poloh a nejnižší z nich bude jistě odpovídat stabilní poloze (globální extrém je i extrémem lokálním). Místo všech možných stabilních poloh najdeme pouze tu „nejstabilnější“.

Položme místo nulové potenciální energie i počátek souřadnic na hladinu kapaliny, pak bude potenciální energie plovoucí krychle

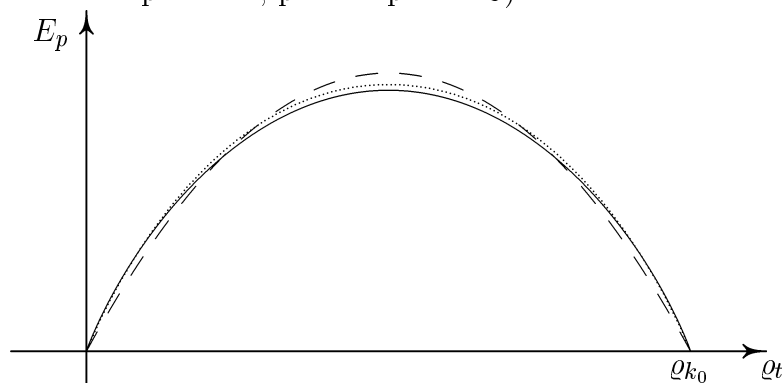
$$E_p = mgh - m_k g h_p,$$

kde h je svislá souřadnice těžiště krychle (její geometrický střed), m její hmotnost, m_k je hmotnost kapaliny v díře po tělese a h_p je svislá souřadnice geometrického středu ponořené části. Z Archimédova zákona víme, že $m_k = m$. Potenciální energie je

$$E_p = mg(h - h_p).$$

Uvědomme si, že h_p je vždy záporné.

Uvažujme hustotu kapaliny ρ_{k_0} za konstantní a hustotu krychle budeme měnit v intervalu $\rho_t \in (0, \rho_{k_0})$. Průběhy závislosti $E_p(\rho_t)$ jsou v následujícím obrázku (čárkovaně — poloha 1, tečkovaně — poloha 2, plně — poloha 3).



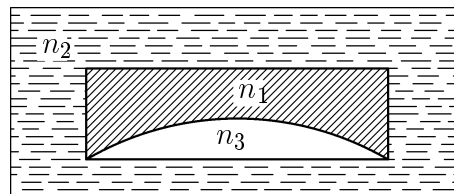
Pro nízké hustoty má nejnižší potenciální energii poloha 1, pro vyšší hustoty poloha 3 a blízko hustoty kapaliny je to opět poloha 1. Průsečík křivek odpovídajících polohám 1 a 3 můžeme

vypočítat. Výpočet je ovšem dosti dlouhý a je to spousta geometrie. Vyplývá z něj, že pro hustoty $\rho_t \in (0; 0,2\rho_{k_0}) \cup (0,8\rho_{k_0}; \rho_{k_0})$ je stabilní poloha 1 a pro hustoty $\rho_t \in (0,2\rho_{k_0}; 0,8\rho_{k_0})$ je stabilní poloha 3.

Václav Porod

Úloha III.2 ... a zase ta čočka! (4 body, řešilo 26 studentů)

Tenkou ploskodutou čočku s poloměrem křivosti lámavé plochy R postupně ponořujeme do vody (obr. 2). Nalezněte závislost optické mohutnosti takovéto soustavy na hloubce ponoření čočky. Znáte index lomu skla, vody a vzduchu při atmosférickém tlaku. Závislost indexu lomu vzduchu na tlaku je lineární.



Obr. 2

Nejprve popíšeme, co se vlastně děje, když se čočka ponořuje. S rostoucí hloubkou se zvyšuje hydrostatický tlak a toto způsobuje vzrůst tlaku ve vzduchové části čočky. Vzhledem k tomu, že v zadání nebylo uvedeno nic o přístroji, který by nám pod čočku dofukoval vzduch a udržoval jeho původní objem, tak se objem vzduchu bude zmenšovat. Pod čočkou nám tedy vznikne vzduchová bublina, jejíž hladina se bude u skla zakřívovat směrem do vzdušného prostoru (voda ke sklu na rozhraní se vzduchem dokonale vzlíná) a v centrální části ji můžeme považovat za vodorovnou (předpokládejme, že čočka je dostatečně velká, aby se neprojevily kapilární jevy). Z výše uvedeného vyplývá, že můžeme kapilární jevy zanedbávat. Vzhledem k tomu, že téměř každý z vás měl svou hypotézu o chování vzdušné části čočky (kromě těch, co stlačování vzduchu „neuvažovali“), tak jsme se rozhodli provést pokus k potvrzení naší hypotézy.

Po provedení drobných úprav (odřezání hrdla a dna) na umělohmotných lahvích od perlivé vody značky **** jsme tři takto upravené lahve spojili a získali tak prostor pro cca. 1 m vysoký vodní sloupec (poznámka pro ty, co by nás chtěli napodobit — u spodní lahve je vhodné dno ponechat). K překvapení všech zúčastněných se vodní sloupec rozhodl neopustit naši „nádobu“ a mohli jsme tedy přistoupit k vlastnímu pokusu. Modelem čočky byla sklenice ve vrchní části dostatečně zakřivená (s čočkou se nám velmi špatně manipulovalo), kterou jsme postupně ponořovali. Výsledky našeho experimentování jsou následující:

1. Rovnice kontinuity platí (což se projevilo efektním transportem vody z pro ni vymezeného prostoru na stůl a na Šéfa)
2. Voda je mokrá (o čemž se přesvědčilo — díky prvnímu zjištění — hlavně šatstvo Velkého Šéfa).
3. V rámci neextrémních hloubek lze naši teorii považovat za odpovídající realitě.

Tímto bych chtěl poděkovat Jirkovi Frantovi a Janě Gřondilové za spolupráci.

A nyní můžeme spokojení a mokří přistoupit k vlastnímu řešení úlohy. Úpravou výsledného vztahu ze vzorového řešení 4. příkladu II. série dostaneme vztah pro optickou mohutnost při hladině: $D = (n_1 - n_{p_a})/Rn_2$. Označme n index lomu vzduchu při tlaku p , pak

$$D(p) = \frac{n_1 - n}{Rn_2}.$$

Dle zadání je n lineární funkcí tlaku: $n = kp + q$, kde k, q jsou konstanty. Ze znalosti toho, že pro $p = 0$ je $n = 1$ a pro $p = p_a$ je $n = n_{p_a}$ dostáváme $q = 1$ a $k = (n_{p_a} - 1)/p_a$ a závislost n na p vypadá následovně:

$$n = \frac{n_{p_a} - 1}{p_a}p + 1.$$

(Zde je nutno zdůraznit, že n_{p_a} není rovno jedné.)

Abychom dostali závislost na hloubce ponoření, vyjádříme p jako součet hydrostatického a atmosférického tlaku $p = p_a + h\rho g$. Finální tvar vzorce pro optickou mohutnost má tedy tvar

$$D = \frac{1}{Rn_2} \left[n_1 - \left(\frac{(n_{p_a} - 1)(p_a + h\rho g)}{p_a} + 1 \right) \right] = \frac{1}{Rn_2 p_a} [(n_1 - n_{p_a})p_a + h\rho g(n_{p_a} - 1)].$$

K tomuto řešení je ovšem nutno dodat, že jeho přesnost bude klesat s hloubkou a to tím více, čím menší poloměr bude mít čočka, neboť hladina se bude v důsledku kapilárních jevů zakřivovat.

Poznámka k hodnocení: Tento příklad byl nešťastný v tom, že i ti, co „zapomněli“ na stlačování vzduchu, mohli dostat stejný výsledek (neboť změna objemu vzduchu v námi uvedeném přiblížení nepřispívá ke změně opt. mohutnosti, ale pro větší hloubky a čočky s menším průměrem to bude majoritní jev). Z tohoto důvodu nemohli býti hodnoceni více než polovinou bodů (v případě jinak bezchybného řešení).

Jan Prokleška

Úloha III.3 ... hmotnost atmosféry (4 body, řešilo 59 studentů)

Spočtěte co nejpřesněji, jakou hmotnost má zemská atmosféra.

Jak asi všichni víte, atmosféra je objekt velice komplikovaný, a proto ji musíme nahradit nějakým vhodným modelem. Asi jste se dozvěděli ve škole, že atmosféru dělíme do určitých vrstev. Ta nejnižší se nazývá troposféra. Právě v ní se nachází většina hmoty a možná také víte, že její tloušťka je 9–17 km. To podle toho, zda tloušťku měříme na pólu nebo na rovníku. Díky této poměrně malé tloušťce (vzhledem k poloměru Země) můžeme při výpočtu považovat gravitační zrychlení za konstantní. Zemi nahradíme koulí a nebudeme uvažovat, že se otáčí — tím odpadne odstředivá síla a tedy i rozdílné tloušťky jednotlivých vrstev na rovníku a na pólech.

Nejjednodušší výpočet hmotnosti atmosféry M_A vypadá takto: Porovnáme tlakovou a tíhovou sílu působící na povrch zemský. $S = 4\pi R_Z^2$ a p je atmosférický tlak u povrchu Země.

$$F_{tl} = pS = M_A g = F_G$$

a odtud dostaneme

$$M_A = \frac{pS}{g} = \frac{4\pi R_Z^2 p}{g}.$$

Pozorný řešitel FKS jistě ví, že i pro vzduch platí cosi jako hydrostatický paradox — tlak na povrchu Země závisí jen na výšce atmosféry nad povrchem a ne na její „šířce“ v různých výškách. Koule s větším poloměrem má i větší povrch. Dále také ve větší vzdálenosti od povrchu Země je menší gravitační zrychlení. Z těchto důvodů jsme spočetli dolní odhad hmotnosti, ale protože atmosféra je poměrně tenká, bude i odhad poměrně přesný.

Mnozí jste řešili příklad trochu jinak. Spočteme proto hmotnost atmosféry ještě jednou a to pro izotermní atmosféru — to znamená, že ve všech výškách je teplota stejná. Využijeme vztahu

$$\rho(H) = \rho_0 e^{-\frac{M_m g H}{R_m T}}$$

pro výpočet hustoty vzduchu v závislosti na výšce nad zemským povrchem H při dané teplotě vzduchu T , který platí pro izotermní atmosféru a můžete ho nalézt v tabulkách. ($\frac{R_m}{M_m}$ je měrná plynová konstanta — pro vzduch $287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Objem tenoučké kulové slupky je $dV = 4\pi r^2 dr$. Hmotnost malého elementu objemu $dm = \rho dV$. Dohromady tedy dostáváme

$$dm = 4\pi \rho_0 r^2 e^{-\frac{M_m g}{R_m T}(r-R_Z)} dr$$

Zintegrováním rovnice v mezích od poloměru Země do nekonečna dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} M_A &= 4\pi \rho_0 \int_{R_Z}^{\infty} r^2 e^{-\frac{M_m g}{R_m T}(r-R_Z)} dr = \\ &= 4\pi \rho_0 \frac{1}{K} \left(R_Z^2 + \frac{2R_Z}{K} + \frac{2}{K^2} \right), \text{ kde } K = \frac{M_m g}{R_m T} \end{aligned}$$

Všimněme si ještě, že při zanedbání ostatních členů než R_Z^2 dostaneme náš první výsledek. (Neboť stavová rovnice ideálního plynu pro jeden kg je $\frac{p}{T\rho} = \frac{R_m}{M_m}$).

První výpočet nám dává hodnotu pro hmotnost atmosféry $5,3 \cdot 10^{18}$ kg a druhý výpočet $5,6 \cdot 10^{18}$ kg. Oba dva nám dávají opravdu pěkný odhad hmotnosti atmosféry — Malý průvodce meteorologií (MF Praha 1983) uvádí hodnotu $5,1 \cdot 10^{18}$ kg.

Jakub Černý

Úloha III.4 ... *drtivý dopad* (4 body, řešilo 25 studentů)

Z „nekonečné“ vzdálenosti se k Zemi blíží meteorit počáteční rychlostí v_0 . Vzdálenost meteoritu od přímky, která je rovnoběžná s vektorem rychlosti v_0 a prochází středem Země, je na začátku rovna a . Určete, jaký vztah musí platit mezi v_0 a a , aby meteorit nezasáhl Zemi.

Úlohu řešme v soustavě spojené se Zemí (v této soustavě byla úloha rovněž zadána). Neuvažujeme-li působení Měsíce, Slunce a dalších těles sluneční soustavy, potom na meteorit působí pouze gravitační síla Země. Silové působení meteoritu na Zemi lze zanedbat, neboť jeho hmotnost je vzhledem k hmotnosti Země nepatrná.

Gravitační pole Země je polem centrálním. Pohyb meteoritu bude tedy pohybem rovinným a plošná rychlost meteoritu bude během pohybu konstantní (2. Keplerův zákon). Předchozí tvrzení jsou důsledkem zákona zachování momentu hybnosti, který platí v každém centrálním poli (centrální síla má vůči centru pole nulový moment). Gravitační pole je konzervativní. Pro jeho popis lze tedy užít potenciální energii, která je dána vztahem $-\frac{\kappa m M}{r}$. Z konstantnosti plošné rychlosti a ze zákona zachování mechanické energie je již možné určit, na jakou minimální vzdálenost se meteorit přiblíží k Zemi.

Označme M hmotnost Země, m hmotnost meteoritu a r vzdálenost meteoritu od středu Země. Rychlost meteoritu je výhodné rozložit do dvou směrů: do směru radiálního a do směru k němu kolmému. Velikost radiální složky označme v_r a velikost složky k ní kolmé v_φ (pokud bychom použili polární souřadnice, pak by platilo: $v_r = \frac{dr}{dt}$ a $v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}$). Pro velikost rychlosti meteoritu v potom platí vztah $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$. Plošnou rychlost w meteoritu můžeme vyjádřit jako $\frac{1}{2} r v_\varphi$. Ze zadaných údajů vyplývá, že $w = \frac{1}{2} a v_0$. Platí tedy:

$$a v_0 = r v_\varphi \Rightarrow v_\varphi^2 = v_0^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne následující rovnost:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left[v_r^2 + v_0^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] - \frac{\kappa m M}{r}$$

Vyjádríme-li z této rovnice v_r^2 , potom dostaneme vztah:

$$v_r^2 = v_0^2 \left[1 + \frac{2\kappa M a}{a v_0^2 r} - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]$$

V minimální vzdálenosti r_m meteoritu od středu Země platí, že $v_r = 0$ ($\frac{dr}{dt} = 0$). Minimální vzdálenost r_m tedy splňuje následující rovnici:

$$\frac{a}{r_m} = \frac{\kappa M}{a v_0^2} + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2 M^2}{a^2 v_0^4}}$$

Vzdálenost r_m je skutečně minimální, neboť pro $\frac{a}{r} > \frac{a}{r_m}$ vychází $v_r^2 < 0$. Aby meteorit nezasáhl Zemi, musí platit, že $r_m > R$, kde R je minimální možná vzdálenost meteoritu, při které ještě nedojde k zasažení Země. Dosazením za r_m a úpravami předcházející nerovnosti získáme výslednou nerovnost mezi a a v_0 :

$$a > R \sqrt{1 + \frac{2\kappa M}{v_0^2 R}}$$

Jelikož již ve výšce 200 km nad povrchem Země obíhají družice, lze za hodnotu R zvolit poloměr Země, tedy $R = 6400$ km.

Použitelnost výsledku závisí na tom, v jaké vzdálenosti od Země jsou udány počáteční hodnoty v_0 a a . Pokud se jedná o vzdálenosti, které lze ve srovnání s R považovat za „nekonečné“ a ve kterých je gravitační síla Slunce kompenzována setrvačnou silou (soustava spojená se Zemí je neinerciální), potom za předpokladu, že se meteorit výrazně nepřiblíží k Měsíci, lze uvedenou

nerovnost považovat za reálný výsledek. Gravitační síla Slunce je kompenzována setrvačnou silou zhruba do vzdáleností ≈ 1000000 km od Země.

Podobně lze určit minimální popř. maximální vzdálenost tělesa od centra pole i v jiných případech, kdy potenciální energie působících sil a plošná rychlost (moment hybnosti) tělesa jsou funkcemi pouze vzdálenosti r . Výhodou tohoto postupu je, že není třeba znát trajektorii pohybujícího se tělesa.

Karel Kolář

Úloha III.P ... západ slunce (5 bodů, řešilo 33 studentů)

Máme 1 m dlouhou tyč zapíchnutou kolmo do země. Jak dlouhý stín bude mít tyč 2 h před západem slunce? Určete, jak se bude lišit výsledek pro různé zeměpisné šířky a různá roční období.

K řešení této úlohy se dalo přistoupit několika způsoby. V nejjednodušším případě jste úlohu řešili pouze ve speciálních případech slunovratů a rovnodenností. V tom většinou nebyl větší problém a takovéto řešení bylo ohodnoceno jedním či dvěma body. Obecnější případ pak mohl být rozebrán buďto s pomocí tradičního a v literatuře popsáno zavedení obzorníkových a rovníkových souřadnic, a nebo s využitím vlastní nápaditosti. Ta byla po zásluze odměněna, nicméně je třeba říci, že řešení bylo často velmi těžce srozumitelné. Nyní postupujeme cestou přepočtu obzorníkových a rovníkových souřadnic.

Nejprve je třeba zamyslet se nad otázkou, co potřebujeme znát, abychom mohli spočítat délku stínu tyče. Je zřejmé, že znalost výšky Slunce nad horizontem v místě tyče právě dvě hodiny před západem je postačující. Označíme-li ji α , pak již hledaná délka stínu $d = l/\operatorname{tg}\alpha$, kde l je délka tyče, t. j. v našem případě $l = 1$ m. Ke snadnému výpočtu α je ale potřeba zavést rozumné souřadnice.

Polohu objektu na nebeské sféře můžeme přirozeně udat uvedením buďto tzv. obzorníkových souřadnic, nebo souřadnic rovníkových, přičemž v obou případech se jedná o dvě hodnoty (když pozorujeme vzdálené objekty, tak nevímáme jejich vzdálenost, ale pouze směr, ve kterém je vidíme, a proto pro určení jejich polohy postačí udat pouze dvě úhlové souřadnice).

Obzorníkové souřadnice (h, A) nám říkají, že objekt je v místě pozorovatele vidět ve výšce h nad obzorem ($h = 0$ pro objekty na horizontu, $h = \pi/2$ pro objekty v zenitu) a azimut průmětu objektu na horizont je A . Azimut se zavádí jako úhel od směru na jih, narůstá pak ve směru hodinových ručiček (např. Polárka má v těchto souřadnicích v naší zeměpisné šířce $h \approx 50^\circ$, $A \approx 180^\circ$, u ostatních hvězd se ovšem obě tyto souřadnice s časem mění, v souladu s otáčením oblohy).

Rovníkové souřadnice si jako základ berou světový rovník, průmět zemského rovníku na nebeskou sféru. Světový rovník je tedy kružnice a my, jako pozorovatelé, se nacházíme v jejím středu. U objektu se pak určí výška nad rovinou rovníku (podobně jako se určovala h u obzorníkových souřadnic) nazvaná deklinace δ a hodinový úhel t (obdoba azimutu u obzorníkových souřadnic), což je úhel měřený v rovině rovníku mezi směrem k průsečíku místního poledníku s rovníkem a směrem k průmětu objektu do roviny rovníku (kladný směr opět ve směru hodinových ručiček). (Bylo by velice zdravé si nakreslit příslušný obrázek, či si ho někde najít v literatuře.)

Je vidět, že naše α je právě h Slunce dvě hodiny před západem. Poloha Slunce se ovšem snadněji dá popsat v rovníkových souřadnicích. Zatímco se obě obzorníkové souřadnice Slunce v průběhu dne zřetelně mění (v čase navíc nerovnoměrně), u rovníkových souřadnic zůstává deklinace během dne takřka neměnná (její změna je způsobována až oběhem Země kolem Slunce, nikoli vlastní rotací Země; jarní rovnodennost: $\delta = 0^\circ$, letní slunovrat: $\delta = 23,5^\circ$ atd.) a hodinový úhel narůstá rovnoměrně v čase.

Na základě sférické geometrie lze odvodit přepočet mezi rovníkovými a obzorníkovými souřadnicemi. Spočteme-li tedy rovníkové souřadnice Slunce ony dvě hodiny před západem a převedeme na obzorníkové, již snadno určíme délku stínu. Z geometrie vyplyne (viz např. Přehled astronomie, O. Hlad, J. Pavloušek), že platí přepočet mezi souřadnicemi

$$\sin h = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos t,$$

kde ϕ je zeměpisná šířka místa tyče. Z této rovnice lze vyjádřit hodinový úhel Slunce při západu, řekneme-li si, že Slunce zapadá při $h = 0$ (je zřejmě $t_{zap} \in (0, \pi)$):

$$t_{zap} = \arccos \frac{-\sin \delta \sin \phi}{\cos \delta \cos \phi}.$$

Dvě hodiny před západem bude hodinový úhel $t_{zap} - \pi/6$ a tedy Slunce bude vysoko

$$h = \arcsin \left[\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \left(\arccos(-\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \phi) - \frac{\pi}{6} \right) \right].$$

Toto je již vztah udávající výšku Slunce nad obzorem dvě hodiny před západem v závislosti na zeměpisné šířce a deklinaci Slunce. Deklinaci bychom mohli počítat ze znalosti pohybu Země kolem Slunce (např. aproximací skutečné dráhy drahou kruhovou), ale spokojme se s myšlenkou, že si ji můžeme vyhledat ve hvězdářské ročence.

Je dobré povšimnout si, že t_{zap} existuje jen pokud je splněna podmínka $-(\frac{\pi}{2}-\phi) \leq \delta \leq (\frac{\pi}{2}-\phi)$. Pokud totiž splněna není, znamená to, že Slunce v daném místě nezapadá/nevychází.

Dále se též může stát, že h vyjde záporně. To je pak třeba interpretovat tak, že v daném místě je den kratší než dvě hodiny. Dvě hodiny před západem pak Slunce ještě nevyšlo a je pod obzorem.

Analýza výsledného vztahu, stejně jako výpočet délky stínu pro zajímavé úhly, je přenechána čitateli.

V řešení jsme se oprostili od dodatečných problémů způsobených refrakcí světla procházejícího atmosférou (tj., že Slunce vidíme skoro vždy o něco výše, než skutečně je). Tento nedostatek by ale mohl být snadno odstraněn (hlavním problémem úlohy byly operace se souřadnicemi, přičemž přesnost byla druhořadá). Někteří z vás i tuto opravu odůvodněně včlenili do svých řešení.

Rudolf Sýkora

Úloha III. Exp ... *tloušťka vlasu* (8 bodů, řešilo 46 studentů)

Změřte tloušťku lidského vlasu více metodami, výsledky a chyby jednotlivých metod porovnejte. Vzorek vlasu přiložen.

Třetí experimentálka se evidentně těšila velké oblibě, sešlo se nám na 23 různých řešení, z nichž jste mnoho přímo provedli, nebo je jen z bláznivosti navrhli. Nejprve pár obecných poznámek. Tloušťku vlasu můžeme měřit přímo (mikrometrem), popř. určitým způsobem zjistit mocnost více vlasů. Můžeme však také využít jiných vlastností, např. ohybové jevy, lehkost a malý odpor při pádu atd. a také sáhnout k projekčním a optickým (zvětšovací) metodám. Zde je však nutné se pozastavit nad geometrií vlasu, který je většinou metod považován za kruhový v průřezu, hladký, rovný, nestlačitelný, homogenní, konstantního průměru, tvarovatelný..., což však vždy zajistit nemůžeme a je nutné to uvážit. Co se týče populační statistiky, uvádíme údaje P. Čenduly a J. Houfka:

„V podstatě existují podle biológov ... dva typy vlasov: prvý typ ... reprezentujú ľudia s relatívne rovnými (nekučeravými) vlasmi; druhú kategóriu tvorí ľudia s kučeravými vlasmi ... prvá kategória má quasi kruhový tvar, druhá ... má tvar v jednom smere pretiahnutý približne dvakrát toľko.“

„Tloušťka vlasů populace ČR se pohybuje mezi 15 až 138 μm . U žen je průměrná tloušťka 68,17 μm , u mužů 66,39 μm . Nejtlustší vlasy rostou v oblasti temene a týlu. Nejtencí v oblasti spánkové a čelní. Světlovlasí lidé mají asi $150 \cdot 10^3$ vlasů, tmavovlasí asi $(80 - 100) \cdot 10^3$.“

Nyní stručně k nejčastějším metodám:

1. Mikrometr — prosté řešení, otázkou však zůstává deformace vlasu, rovnost čelistí a proměnnost průřezu. Můžeme tedy měřit na různých částech vlasu i ploch měřidla a vlas udržovat patričně uvolněný. Též neškodí proměřit nulovou hodnotu mikrometru, diskutabilní je pokusit se odhadovat další dělení jdoucí za nejjemnější dílky měřidla. Průměr vámi naměřených hodnot: 53 μm . Snad nejčastější metoda, bohužel někdy jediná, ale v zadání stálo více způsobů, tedy:

2. Závity — další rozšířený způsob. Vlas těsně navineme na drát (špejli, tuhu, jehlu...), ze známého počtu závitů a změřené délky příslušného úseku prostým dělením získáme průměr vlasu.

Problémem je ukotvení vlasu na jednom konci, těsnost závitů atd. V této fázi též můžeme změřit průměr tyčinky s vlasem a porovnat s původní tloušťkou — získáme dvojnásobek hledané hodnoty. Do stejné skupiny patří nastříhání vlasu na kratší úseky, ty vedle sebe nalepit na izolepu, popř. je namočit... a opět měříme mocnost více vlasů. Fykosácký průměr: $65\ \mu\text{m}$.

3. Projekční metody: Vlas upevníme do rámečku na diapozitivu a promítneme jej spolu s nějakým délkovým měřítkem (nebo si rysky můžeme sami vytvořit). Změříme velikost stínu vlasu, porovnáním skutečné a projektované délky pokusného dílku získáme zvětšení a tloušťku snadno dopočteme. Můžeme samozřejmě použít i meotar, musíme si však dávat pozor na zachování měřítka v potřebných směrech. Objevily se též návrhy promítnout pouze vlas, změřit vzdálenost stínítka a vlasu od zdroje světla a užít podobnosti trojúhelníků, první metoda je však přesnější (měřím dvě veličiny namísto tří), někdo též použil laser (a rušily jej ohybové proužky), jiní kombinovali čočky a počítali zvětšení... prostě spousta možností. Průměr u této metody: $56\ \mu\text{m}$.

4. Mikroskop — může mít zabudovanu stupnici, podle které tloušťku odečteme, popř. ze známého zvětšení a odhadu relativní velikost zvětšeného obrazu určit průměr vlasu. Jedná se ale většinou o méně přesné metody.

5. „Pramínek vlasů...“ — změříme obvod těsného svazku vlasů o , známe-li jejich počet n , rozpočteme plochu (kruhového) průřezu S na jednotlivé vlasy, kdy mezery mezi nimi považujeme za zanedbatelné, pak

$$S = \frac{o^2}{4\pi} = n\pi \frac{d^2}{4}, \quad \text{odkud} \quad d = \frac{o}{\pi\sqrt{n}}.$$

Lenka Zdeborová si tak spočítala, že má přibližně 80 000 vlasů (v dobré shodě s fakty uvedenými výše). Jest také možno provést korekci na mezery mezi vlasy, spočítat, nakolik je plocha využita oproti periodickému pokrytí šestiúhelníky. Metoda bezesporu zajímavá, ale potřebuje více vlasů, a to dlouhých.

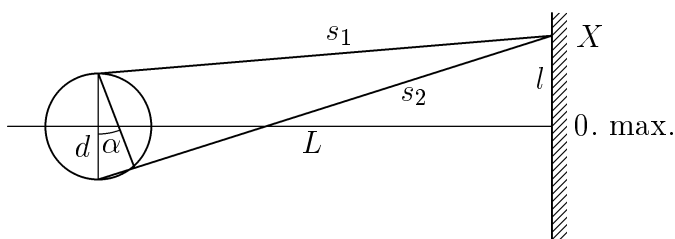
6. Pozorovací metody: Zjistíme si minimální zorný úhel vlastního oka tak, že si nakreslíme malý bod známého poloměru a změříme největší vzdálenost, z které je ještě pozorovatelný. Pak si odstříhneme menší kousek vlasu (samotný vlas je dosti dlouhý a pozorovatelný na větší vzdálenost) a maximální vzdálenost viditelnosti stanovíme i pro něj, výsledky porovnáme. Problémem je barva vlasu, lesk, volba délky úseku... Další možností je prosté přiložení vlasu k měřítku a odhad, kolikrát se "vejde" do 1 mm, na pomoc si můžeme vzít i lupu. Dále máme-li k dispozici vlasy známých a různých tloušťek, můžeme komparační metodou určit nejpravděpodobnější průměr. Jedná se však pouze o řádové výsledky.

7. Rolovací metoda (K. Maturová) — vlas umístíme mezi dvě sklíčka tak, aby jedním koncem přesahoval. Horní sklíčko smýkáme po druhém, vlas se odvaluje. Ze známého počtu otáček (určím dle konce) a vzdálenosti, o kterou jsme jej odvalili zjistíme jeho tloušťku, uvažujeme-li kruhový průřez. Problémem je však podkluzování, prohýbání vlasu, ale zajímavá metoda.

8. „Research improbable“: Sešlo se i množství těžko realizovatelných metod založených na Archimédově zákoně, sestavení kondenzátoru o vzdálenosti desek rovné tloušťce vlasu, měření volného pádu vlasu, el. odporu roztoku v kapiláře s různým efektivním průřezem kapiláry (v původní sestavě a s vlasem), momentu setrvačnosti vlasu za předpokladu jeho válcového tvaru... většinou jen návrhy.

V autorském řešení budeme dále presentovat dvě další metody:

1. „HighTech“ — ohyb laserového paprsku na vlasu. Vlas má dostatečně malé rozměry, aby byl pozorovatelný ohybový jev, což nám často práci ztěžuje, ale zároveň tak získáme efektivní metodu měření.



Obr. 3

S užitím Huyghensova principu dopadají paprsky do bodu X s dráhovým rozdílem $s_2 - s_1$:

$$s_2^2 = \left(l + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2,$$

$$s_1^2 = \left(l - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2,$$

$$s_2 - s_1 = \frac{2dl}{s_2 + s_1} \doteq \frac{dl}{\sqrt{L^2 + l^2}}$$

(v součtech zanedbáváme d), nebo pro $l \ll L$

$$s_2 - s_1 = \frac{dl}{L}.$$

Pro maximum pak z geometrického názoru plyne $s_2 - s_1 = k\lambda$, tedy např. $d = kL\lambda/l$. Pro dvě sousední maxima (minima) pak platí

$$d = \frac{L\lambda}{x}. \quad (1)$$

Při odvození též můžeme vyjít z úhlů a dojdeme k témuž. Nyní k samotnému měření:

Pomůcky: školní He-Ne laser Uniphase 1508-2 ($\lambda = 632,8$ nm, rozsah výrobce neudával, min. výkon 0,5 mW, průměr paprsku 0,48 mm), vlas, pravítko, pásmo, nit, izolepa, kruhová úchytky na čočku, papír.

Postup: Laser ve vodorovné poloze zaměříme pokud možno kolmo na stínítko (tabuli), blízko ústí paprsku přistavíme držák s vlasem. Provázkem změříme vzdálenost L vlasu od tabule. Na stínítko připevníme papír a po spuštění laseru zakreslujeme polohu maxim/minim. Pokud jsme nebyli oslněni jasným středem obrazu, dala se rozeznat maxima až 8. řádu. Změřením vzdáleností sousedních maxim a dosazením do (1) získáme tloušťku vlasu. Zde je však nutné podotknout, že vztah je pouhou aproximací obcházející jinak nutnou integraci. Závislost intenzity na vzdálenosti l lze vyjádřit funkcí $I = A[(\sin x)/x]^2$, kde x je relativní proměnná rovná $(\pi/\lambda)dl$. Z toho mimo jiné vyplývá, že maxima jsou nesouměrná, jejich relativní vzdálenosti od nultého maxima jsou po řadě $1,43\pi$, $2,45\pi$, $3,47\pi$, $4,48\pi$. Není tedy dobré měřit vzdálenosti maxim od středu, ale mezi sebou, v dobrém přiblížení je pak vzdálenost sousedních maxim stejná, a toho jsme právě využili při měření, přičemž se středem jsme nepočítali. Dodejme, že u minim k takovým problémům nedochází, následují po sobě zcela pravidelně. Otázkou je, co se nám lépe pozoruje. Nelze také proměřit vzdálenost k -tého maxima vlevo a vpravo od osy a délku x určit jako podíl $l/2k$, pro minima je to však vcelku dobrý postup. Zakreslování jsme provedli celkem třikrát a určili polohu po řadě pěti, sedmi a osmi maxim po obou stranách osy, určili jsme šest průměrných hodnot x a pro každou spočítali d , výsledky jsme sestavili do tabulky. Vzdálenost L byla $2,066 \pm 0,005$ m.

Tabulka 1

| \bar{x} [mm] | d [μm] | Δd [μm] |
|----------------|-----------------------|------------------------------|
| 16,60 | 78,66 | 0,20 |
| 16,40 | 79,62 | -0,76 |
| 16,43 | 79,40 | -0,62 |
| 16,57 | 78,80 | 0,06 |
| 16,86 | 77,46 | 1,40 |
| 16,50 | 79,13 | -0,27 |

$$\bar{d} = 78,86 \mu\text{m}$$

$s = 0,78 \mu\text{m}$ — k hrubé chybě nedošlo

$$s_{\text{stat}} = 0,32 \mu\text{m}$$

Chyba při určení L je přibližně $\delta_L = 0,24 \%$, x jsme měřili s přesností 0,5 mm, odkud $\delta_x = 3,0 \%$. Bohužel nemůžeme započítat neurčitost ve vlnové délce (dala by se odhadnout v jednotkách nanometrů). Celková chyba pak bude:

$$\delta = \sqrt{3\delta_{\text{stat}}^2 + \delta_L^2 + \delta_x^2} \doteq 3,5 \%$$

Závěr: $d = (79 \pm 3)\mu\text{m}$. Relativní chyba nám vyšla poměrně malá, otázkou je však znalost vlnové délky. Problémem byla i jemná struktura jednotlivých maxim (dána nerovnostmi na okrajích vlasu), proto se těžko odhadovala jejich přesná poloha. Nicméně je to metoda zajímavá, stává se dostupnější s rozšiřováním školních laserů. Průměr vámi naměřených hodnot: $75,8 \mu\text{m}$.

2. „LowTech“ — ale zato o moc hezčí, řekněme kapková, metoda.

Touto metodou měřili pouze tři z vás (M. Berta, H. Kadlecová, P. Nečesal), nicméně přišla nám velice zajímavá. Mějme kapku vody známého objemu. Naneseme ji na sklíčko, kolem ní stočíme do kroužku vlas. Přikryjeme dalším sklíčkem, přičemž kapka nám vytvoří skvrnu. Snažíme se, aby nedošlo ke kontaktu vlasu s kapalinou a naší prioritou je vytvoření skvrnky kruhového tvaru, změříme její průměr D . Pak voda přibližně zaujímá tvar velmi nízkého válce, jehož výška je však rovna tloušťce vlasu! Ze známého objemu kapky V (odkapu si typicky 100 kapek) určíme d . Použili jsme školní byretu, z jejíž stupnice jsme mohli poměrně přesně odečítat objem odkapané vody. Jako podložní sklíčko posloužilo rovné kapesní zrcátko, krycí pak sklo z rámečku na fotografii. Rozměry skel: $58 \times 88 \text{ mm}$, $149 \times 99 \times 2 \text{ mm}$.

Tabulka 2

| | \bar{D} [mm] | d [μm] | V [10^{-2}ml] | Δd [μm] |
|---|----------------|-----------------------|----------------------------|------------------------------|
| 1 | 30,6 | 63,9 | 4,7 | 2,5 |
| 2 | 28,7 | 72,6 | 4,7 | -6,2 |
| 3 | 29,6 | 69,1 | 4,7 | -2,7 |
| 4 | 30,3 | 66,4 | 4,8 | 0,0 |
| 5 | 31,9 | 60,1 | 4,8 | 6,3 |
| 6 | 29,3 | 71,3 | 4,8 | -4,9 |
| 7 | 31,2 | 62,9 | 4,8 | 3,5 |
| 8 | 30,4 | 66,0 | 4,8 | 0,4 |
| 9 | 30,5 | 65,7 | 4,8 | 0,7 |

$$\bar{d} = 66,4 \mu\text{m}$$

$s = 3,9 \mu\text{m} \Rightarrow$ bez hrubé chyby

Chyba při měření D : 1 mm, čemuž odpovídá $\delta_d = 3,3 \%$

$s_{\text{stat}} = 1,3 \mu\text{m}$, tedy $\delta_{\text{stat}} = 2,0 \%$

$$\delta_{\text{celk}} = \sqrt{3\delta_{\text{stat}}^2 + s_D^2} \doteq 4,8 \%$$

$$s_{\text{celk}} = 3,2 \mu\text{m}$$

$$d = (66 \pm 3) \mu\text{m}$$

Je dobré si ověřit chování kapky mezi sklíčky bez přítomnosti vlasu: skutečně se rozšíří po celé ploše, jak to má být. Problémem je často velmi nepravidelný tvar kapek, roztřepené okraje skvrnky, vlas též může být stlačen vahou horního skla. Ale metoda je to velice jednoduchá, vtipná a nevyžaduje náročného vybavení, můžeme kapat i s pomocí tyčinky

Nikdo jiný než vy, řešitelé, jste dokázali, jaké nepřeborné množství způsobů lze vymyslet při měření zdánlivě jednoduché úlohy. Naši snahou bylo také demonstrovat různost vztahů lišících se mírou aproximace, které můžete při zpracování experimentu použít. Mnoho nápadů bylo ne-reálných, ale alespoň pobavily a svědčí o vaší přemýšlivosti. Ohyb na vlákne pak také ukázal, že některé teoretické výsledky nemusí být vždy ve shodě s praxí a vysvitlo i mnohem hlubší pozadí úlohy. Nakonec je snad jasné, že nedostatek experimentálního vybavení vůbec nemusí být překážkou dobrého měření, jak říkáme: Nezáleží nám tolik na přesné hodnotě výsledku, jako na hezkém nápadu, a těch se sešlo opravdu dost!

Jiří Kvita

Úloha S . III ... *plachetnice a světlo* (5 bodů, řešilo 40 studentů)

1. Jaké zrychlení bude mít sluneční plachetnice o hmotnosti $m = 10\text{ t}$ a velikosti plachet $S = 1\,000\text{ m}^2$ nedaleko Země, kde je světelný výkon Slunce (solární konstanta) $k = 1\,330\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$? Za jak dlouho by taková plachetnice dorazila od dráhy Země k dráze Marsu, pokud bychom ji vypustili s nulovou rychlostí? Předpokládejte, že velikost solární konstanty je v prostoru mezi Zemí a Marsem konstantní, zanedbejte gravitační vlivy všech těles. Poloměr dráhy Země je 1 AU , poloměr dráhy Marsu je $1,523\text{ AU}$. AU je astronomická jednotka a její velikost je $1\text{ AU} = 1,495\,978\,70 \cdot 10^{11}\text{ m} \sim 150\text{ mil. km}$. Velikost solární konstanty samozřejmě závisí na vzdálenosti od Slunce. Jaká je její velikost na Marsu?
2. Vysvětlete, proč je výhodnější vyrábět plachty sluneční plachetnice z materiálu, který má blízko k zrcadlovému lesku, než z matného materiálu.
3. Jaká je intenzita elektrického pole (ve $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$) v laserovém svazku s intenzitou $150\text{ kW}\cdot\text{cm}^{-2}$? Jak velká by musela být intenzita svazku, aby docházelo k ionizaci vzduchu?
4. Jak by se musel upravit argument funkce kosinus, aby vztah $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi)$, nepředstavoval rovinnou, ale kulovou vlnu. Kulová vlna je vlna, šířící se z bodového zdroje, asi jako když hodíte kámen do rybníka. Roviny konstantní fáze u kulové vlny jsou soustředné koule se středem ve zdroji.

1. Světlo, které dopadá na plachty sluneční plachetnice, má hybnost $p = \frac{E}{c}$ (lze odvodit ze vztahů uvedených v seriálu). Předpokládejme, že plachty jsou neodrážející, pak se fotony absorbují a předají veškerou svou hybnost lodí. Celkovou hybnost, která dopadne za čas Δt na plachty spočítáme jako $p = \frac{kS\Delta t}{c}$. Použitím 2. Newtonova zákona $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = ma$ získáme pro velikost zrychlení $a = \frac{kS}{cm} = 4,4 \cdot 10^{-7}\text{ ms}^{-2}$. Dobu letu zjistíme z $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 5,94 \cdot 10^8\text{ s} = 18,8\text{ let}$. V případě zrcadlové plachty by bylo zrychlení $a_{zrc} = 8,9 \cdot 10^{-7}\text{ ms}^{-2}$ a let by trval 13,3 let.

Solární konstanta vyjadřuje výkon dopadající na jednotku plochy. Aby se zachovávala energie, musí hodnota klesat opačným způsobem, než roste plocha, která obepíná svítící zdroj. Protože plocha roste jako r^2 , klesá sluneční konstanta jako r^{-2} . Sluneční konstanta na Marsu je tedy $k_{Mars} = k_{Země} \left(\frac{r_{Země}}{r_{Mars}}\right)^2 = 573\text{ Wm}^{-2}$ a vlastně to ani není konstanta.

2. Pro zrychlování plachetnice je důležitá hybnost, kterou jeden foton předá plachetnici. Čím je tato předaná hybnost větší, tím většího zrychlení plachetnice dosáhne. Vzhledem k velké hmotnosti kosmické lodi je předaná hybnost rovna změně hybnosti fotonu (musí platit zákon zachování hybnosti). Při matném povrchu plachty je změna hybnosti z hybnosti \mathbf{p} na 0, tedy předaná hybnost má velikost p . Pokud je však foton odražen zrcadlovou plochou, tak je změna jeho hybnosti je z hybnosti \mathbf{p} na $-\mathbf{p}$, tedy v tomto případě se velikost hybnosti fotonu i lodi změní o $2p$. Loď se zrcadlovými plachtami bude na rozdíl od lodi s matnými plachtami dosahovat dvojnásobného zrychlení.

3. Samotný výpočet je velmi jednoduchý, použijeme vztahu uvedeného v seriálu a vyjádříme intenzitu elektrického pole v závislosti na intenzitě svazku jako $E = \sqrt{\frac{2I}{n}} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 1,063\text{ MV/m}$.

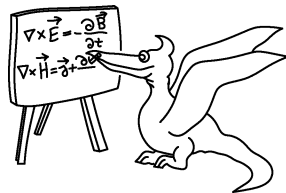
Abychom dosáhli ionizace vzduchu, musela by být elektrická intenzita ve svazku alespoň stejná, jako je průrazné napětí pro vzduch, tj. alespoň 30 kV/cm, tj. světelná elektrická intenzita ve svazku by musela být třikrát větší a intenzita laserového světla by musela být asi devětkrát větší.

Ještě se musím omluvit ze jednu drobnost, v zadání byla chyba v jednotkách intenzity, kdy bylo chybně uvedeno $\text{kW}\cdot\text{cm}^2$ místo správného $\text{kW}\cdot\text{cm}^{-2}$. Intenzita je samozřejmě výkon dopadající na plochu.

4. Rovinná vlna má plochy konstantní fáze jako roviny. Tomu odpovídá, že v argumentu exponenciály se vyskytuje člen $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$, který nabývá konstantní hodnoty na rovinách kolmých k vektoru \mathbf{k} . U rovinné vlny požadujeme, aby se plochy konstantní fáze nacházely na soustředných koulích, a proto potřebujeme něco, co by bylo konstantního na kouli. Snadno zjistíme, že této podmínce vyhovuje nejlépe $|\mathbf{k}||\mathbf{r}|$, kde absolutní hodnota kolem vektorů znamená jejich velikost. Všimněte si, že jsme součin neoznačili tečkou, jako značíme skalární součin. Kromě tohoto předpokladu musí ještě vlna zachovávat energii, takže musí ubývat i její amplituda. Výsledný vztah pro kulovou vlnu je

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{|\mathbf{r}|} \cos(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}| + \varphi).$$

Jan Hradil



Seriál na pokračování

Krátké laserové pulsy

Z minulého dílu seriálu víme, jak funguje laser. Stručně připomeňme, že základem je tzv. aktivní prostředí, které zesiluje procházející světlo díky procesu nazývaném stimulovaná emise. Aktivní prostředí je umístěno v rezonátoru, ve kterém světlo obíhá neustále dokola a zesiluje se. Část světla opouští rezonátor skrz polopropustné zrcadlo – toto světlo tvoří výstupní světelný svazek laseru. Tím, jak část zesíleného světla zůstává v rezonátoru a dále se zesiluje, je laserové světlo velmi koherentní. Velmi zjednodušeně si můžeme představit, že v koherentním světle je elektrická intenzita jako nekonečně dlouhá sinusovka. Na rozdíl od vysoce koherentního laserového světla je světlo žárovky téměř nekoherentní. Intenzitu elektrického pole v nekoherentním světle si představujeme zase jako sinusovku, tentokrát ale jen jako její velmi krátké útržky, které nejsou mezi sebou nijak provázány, mají nahodilé fáze. Pro nás je důležité, že při popisu laserového světla vystačíme s jednoduchou exponenciálou $e^{i(\omega t + \varphi + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$.

Konečně se dostáváme k tématu tohoto dílu seriálu, jímž jsou krátké světelné pulsy. „Krátký“ v tomto případě znamená něco mezi mikrosekundou až femtosekundami. Krátké pulsy využijeme při zkoumání dynamických vlastností materiálů, které se mění v časech srovnatelných s délkou trvání pulsu (tzv. spektroskopie s vysokým časovým rozlišením). Krátký puls obsahuje všechnu energii v relativně krátkém čase, je v něm obsažen vysoký špičkový (tj. maximální) výkon a proto se využívá pro prudké zahřátí terčů při výzkumu termojaderné fúze apod.

Metod k získání krátkých pulsů existuje několik. Velmi jednoduchou je použití kontinuálně pracujícího laseru s externí uzávěrkou nebo modulátorem, který propouští světlo jen po dobu trvání pulsu. Tato metoda není příliš výhodná, protože energie při zavření závěrce se ztrácí a tak špičkový výkon nemůže být větší než je kontinuální výkon laseru.

Účinnější metodou získávání pulsů je zapínání a vypínání samotného laseru vnitřní modulací, kde se energie nashromážděná mezi pulsy vyzáří během pulsu. Energie se může hromadit v rezonátoru ve formě světla, které se pak periodicky vypouští ven, nebo v aktivním prostředí (v inverzním obsazení hladin), odkud se uvolňuje během pulsu. Tyto způsoby generace pulsů umožňují generovat pulsy se špičkovým výkonem větším než je stálý výkon kontinuálního laseru.

Pro vnitřní modulaci laserového záření se nejčastěji využívá Q-spínání, otevírání dutiny a modová synchronizace.

Q-spínání

Písmeno Q v názvu značí, že spínání se děje pomocí změny kvality rezonátoru (anglicky Quality). Při tomto způsobu modulace se energie mezi pulsy uschovává v aktivním prostředí. Do rezonátoru je vložen modulátor, který nepropouští světlo a znemožňuje laseru fungovat. Stále však probíhá čerpání a když je v aktivním prostředí „uskladněno“ dostatek energie, přepne se modulátor tak, že propouští světlo. Tehdy začne laser fungovat, foton spontánní emise se začne prudce zesilovat, vygeneruje se obří puls, na který se spotřebuje většina energie z aktivního prostředí, které přestane zesilovat a laser opět přestane svítit.

Otevírání dutiny

Světlo je uvězněno v dutině rezonátoru pomocí 100% odrazujících zrcadel. Tím, jak světlo stále obíhá a zesiluje se, se uvnitř vytvoří silné světelné pole a pak se odstraní jedno ze zrcátek (např. odklopením) a z laseru unikne všechna energie akumulovaná ve světle ven.

Systém pracuje podobně jako nádoba, do níž se konstantní rychlostí nalévá hadicí voda. Když se nádoba naplní vodou, odstraní se náhle její dno, takže všechna voda je naráz vypuštěná. Dno nádoby se vrátí zpět a celý proces se může opakovat. Konstantní tok se tím převádí na impulsní tok. V případě laseru s otevíráním dutiny odpovídá nádobě rezonátor, hadici s vodou konstantní čerpání a dnu nádoby výstupní zrcadlo rezonátoru.

U Q-spínání a otevírání dutiny je nejkratší možná délka trvání pulsu určena dobou, než energie odteče z laseru ven. Pokud je energie uskladněná ve formě světla, tak to je $\tau_{min} = 2l/c$, než světlo stihne vyběhnout z rezonátoru, u Q-spínání se musí přelít energie z aktivního prostředí do světla, což trvá několikrát déle, než je doba oběhu světla v rezonátoru.

Modová synchronizace

Získání mnohem kratších pulsů než v předešlých případech umožňuje metoda synchronizace módů (anglicky mode-locking — uzamykání módů). Jak víme z minulého dílu seriálu, tvoří se v rezonátoru podélné módy, které vyhovují podmínce celistvého násobku λ v dutině. Frekvence dvou sousedních módů se liší o

$$\Delta\nu = \frac{c}{2l},$$

kde c je rychlost světla, l optická délka rezonátoru (tj. nd , pokud je rezonátor zaplněn aktivním prostředím s indexem lomu n od kraje ke kraji). Pokud aktivní prostředí zesiluje v dostatečně širokém spektrálním oboru, může být jednotlivých módů vybuzených v laseru několik tisíc. Superpozicí těchto módů dostaneme velmi krátké pulsy, jejich vznik si teď spočítáme.

Předpokládejme, že v laseru je vybuzen lichý počet M podélných módů, kolem centrální frekvence ν_0 . Všechny módy nechť mají stejnou amplitudu*) a rozdíl fází sousedních módů je pro všechny módy stejný a s časem se nemění — fáze jsou vzájemně uzamknuté (od toho se metoda jmenuje). Pro jednoduchost zápisu předpokládejme všechny fáze nulové. Když si módy očísujeme celými čísly $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm S$; $M = 2S + 1$, můžeme každý napsat jako rovinnou vlnu

$$E_q = A e^{i2\pi(\nu_0 + q\Delta\nu)t}.$$

Superpozice módů v laseru, kterou pozorujeme je daná prostým součtem všech elementárních módů

$$\begin{aligned} \sum_{q=-S}^{q=S} A_q e^{i2\pi(\nu_0 + q\Delta\nu)t} &= A \sum_{q=-S}^{q=S} e^{i2\pi\nu_0 t} e^{i2\pi q\Delta\nu t} = \\ &= A e^{i2\pi\nu_0 t} \sum_{q=-S}^{q=S} e^{i2\pi q\Delta\nu t} = A e^{i2\pi\nu_0 t} (e^{-Si2\pi\Delta\nu t} \dots + 1 + e^{i2\pi\Delta\nu t} + \dots e^{Si2\pi\Delta\nu t}). \end{aligned} \quad (2)$$

*) tento předpoklad není nezbytný, jen nám umožní jednoduše spočítat tvar výsledného pulsu

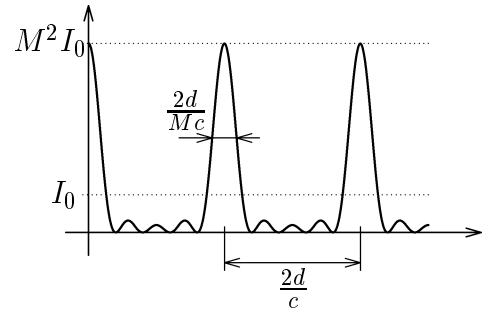
Označíme-li $\delta = \pi\Delta\nu t$, v kulaté závorce dostáváme konečnou geometrickou řadu s M členy, jejíž první člen je $e^{-Si2\delta}$, kvocient $e^{i2\delta}$ a součet je

$$\begin{aligned} e^{-Si2\delta} \frac{1 - e^{(2S+1)i2\delta}}{1 - e^{i2\delta}} &= \frac{e^{-Si2\delta} - e^{(S+1)i2\delta}}{1 - e^{i2\delta}} \cdot \frac{e^{-i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{e^{-(2S+1)i\delta} - e^{(2S+1)i\delta}}{e^{i\delta} - e^{-i\delta}} \\ &= \frac{e^{-Mi\delta} - e^{Mi\delta}}{2i} \frac{2i}{e^{i\delta} - e^{-i\delta}} = \frac{\sin M\delta}{\sin \delta} \end{aligned}$$

Na výstupu laseru dostaneme nakonec elektrickou intenzitu

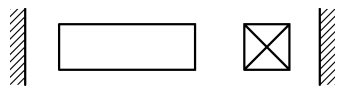
$$A e^{i2\pi\nu_0 t} \frac{\sin M\pi\Delta\nu t}{\sin \pi\Delta\nu t}$$

Intenzita světla na výstupu, jak je nakresleno na obrázku 4, je $A^2(\sin^2 M\pi\Delta\nu t)/(\sin^2 \pi\Delta\nu t)$. Tato funkce je periodická a tak v každém okamžiku, kdy je $\pi\Delta\nu t$ násobkem π , se objeví krátký puls. Všimněme si, že perioda se kterou se puls objevuje je přesně rovna době, kterou světlo potřebuje na to, aby jednou oběhlo laser ($\pi\Delta\nu t = \pi c/2lt = \pi$ a pak $ct = 2l$). Světlo dělá přesně to, co jsme od něj požadovali: periodicky se objevuje puls, jehož velikost je M^2 -krát větší než intenzita samostatného módu a je tím užší, čím více módů se zapojilo do synchronizace módů.



Obr. 4

Touto metodou se dosahují v současnosti délky pulsů v oblasti desítek femtosekund (10^{-14} s).



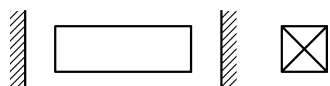
modulátor uvnitř laseru

Obr. 5

Víme, co se děje na výstupu z laseru. Co se však děje uvnitř? Laserem obíhá jeden velký a krátký puls. Uvnitř laseru je navíc modulátor (obr. 5), který je v okamžiku průchodu pulsu modulátorem otevřený, po zbytek času je uzavřený (tím je myšleno nepropustný pro světlo). Tento režim práce modulátoru zaručuje stálý vztah mezi všemi módy, tzv. uzamknutí módů. Módy vybuzené „správně“ jsou „schovány“ v pulsu a mohou nerušeně procházet modulátorem. Pokud by se chtěly vyvinout módy, které by nepřispívaly konstruktivně k pulsu, modulátor by jim ve vzniku zabránil, protože takové módy by procházely modulátorem ve chvílích jeho uzavření — tím se eliminují.

Modulátory

Výše zmíněné modulátory mohou být dvojího typu: aktivní nebo pasivní. Aktivní řízení znamená, že modulátor je řízen zvenku, obvykle elektrickým signálem, na jehož základě mění modulátor svou propustnost. Elektrický signál vyvolá např. změnu indexu lomu a modulátor (v tomto případě např. hranol) změní směr světla, které pak nemůže obíhat a zesilovat se. Tato aktivní modulace je velmi náročná z hlediska přesnosti ovládání modulátoru. Modulátor se musí periodicky otvírat a zavírat s frekvencí určenou dobou oběhu světla v rezonátoru. Tato doba je závislá na délce rezonátoru, která zase závisí na teplotě a tudíž se může časem nepatrně měnit. Proto se musí ovládací frekvence neustále korigovat a v konečném důsledku je celé zařízení hodně složité.



externí modulátor

Obr. 6

Mnohem jednodušší způsob je pasivní modulace. V laseru se synchronizovanými módy obíhá jeden velký puls, a bylo by jednoduché, kdyby si při každém průchodu modulátorem mohl modulátor „otevřít“. To jde zařídit, pokud se jako modulátor použije saturabilní absorbér. Je to látka, která při malých intenzitách světla silně absorbuje. Když na ni ale dopadne intenzivnější světlo, její absorpce klesá, tj. větší procento dopadajícího světla projde. Obíhá-li tedy laserem silný a krátký puls, tak při průchodu modulátorem necítí téměř žádné ztráty (absorpci) a modulátor je po dobu průchodu pulsu otevřený — puls si otevřel modulátor sám. Slabý puls, případně kontinuální složka laserového záření se nemohou zesilovat, protože zesílení v aktivním prostředí nestačí vyrovnat ztráty, které jsou spojeny s průchodem slabého světla saturabilním absorbérem.

Úloha V. S ... synchronizace módů (mode-locking)

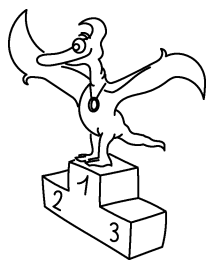
Předpokládejme modově synchronizovaný laser s optickou délkou rezonátoru $l = 1,8$ m, pracujícího na střední vlnové délce $\lambda = 800$ nm se středním výkonem 1 W.

- S jakou frekvencí laser produkuje jednotlivé pulsy? Jaká je mezi nimi prostorová vzdálenost?
- Jak je prostorově dlouhý puls o délce 70 fs?
- Kolik fotonů je v jednom pulsu?
- Jaký je špičkový výkon v pulsu?

e) Kolik módů potřebujeme k dosažení pulsů o délce 70 fs? V jaké oblasti vlnových délek musí zesilovat aktivní prostředí? Předpokládejte stejnou amplitudu všech módů, které se účastní tvorby pulsu.

A protože tento díl seriálu byl předposlední soutěžní a vždy jsem se na něco ptal já vás, dám vám tentokrát možnost, abyste se zeptali vy. Napište mi s dalším řešením, co vás z optiky zajímá, co byste si rádi přečetli v posledním dílu seriálu, který vyjde až s řešením 5. a 6. série a už nebude obsahovat žádné úlohy. Pište prosím na zvláštní papír a výrazně jej označte „Co chci vědět z optiky“.

Naše adresa: **FYKOS, KTF MFF UK**
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8
<http://www.mff.cuni.cz/news/fks>



Pořadí řešitelů po III. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

| | Jméno | Příjmení | Třída | Škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | S3 | III | Body |
|---------|----------------|--------------|------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|------------|
| | <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | <i>F.1</i> | <i>MFF UK</i> | <i>4</i> | <i>4</i> | <i>4</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>8</i> | <i>5</i> | <i>34</i> | <i>102</i> |
| 1 | Daniel | Sprinzl | 4. | G Dačice | 1 | 1 | 3 | 2 | 4 | 6 | 5 | 22 | 70 |
| 2 | Petr | Klenka | oktáva A | G Praha 10 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 5 | 3 | 15 | 65 |
| 3 | Lenka | Zdeborová | 4.A | G Plzeň | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 8 | 4 | 30 | 61 |
| 4 - 5 | Jan | Mysliveček | 4.A | G Brno - Jaroška | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 13 | 54 |
| 4 - 5 | Filip | Křížek | oktáva A | G Praha | 2 | 3 | 2 | — | — | 5 | 2 | 14 | 54 |
| 6 | Tomáš | Pecháček | 4.P | MSŠCH | 1 | — | 3 | — | 3 | — | 4 | 11 | 53 |
| 7 | Jan | Janský | septima | G Strakonice | 1 | 1 | — | — | 2 | 3 | 2 | 9 | 50 |
| 8 | Vít | Marek | 4.A | G Holešov | 1 | 1 | — | — | — | 5 | — | 7 | 48 |
| 9 | Michal | Šitina | 4.B | G Hr. Králové | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 42 |
| 10 | Jiří | Samek | kvinta | G Semily | 1 | 1 | 3 | — | — | — | 2 | 7 | 41 |
| 11 | Robert | Vácha | 4.A | G Jihlava | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 39 |
| 12 | Miroslav | Musil | septima A | G N. Město na M. | 1 | 1 | — | — | — | — | 2 | 4 | 37 |
| 13 | Miroslav | Černý | septima | G K. Hora | 2 | 1 | 3 | — | — | — | 4 | 10 | 32 |
| 14 | Libor | Novák | | | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 30 |
| 15 | Karel | Honzl | | G Podbořany | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 28 |
| 16 | Josef | Hala | | | 1 | — | — | — | 1 | 4 | — | 6 | 27 |
| 17 | Lukáš | Poul | 4.A | G Brno | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 26 |
| 18 | Lukáš | Uhl | 4.A | G Brno-Víd. | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 21 |
| 19 | Jan | Holeček | 4.A | G Brno - Jaroška | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 19 |
| 20 | Michal | Fašina | septima | | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 17 |
| 21 - 22 | Daniel | Vostřel | septima | G Litomyšl | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 16 |
| 21 - 22 | Ondřej | Příbyla | 4.A | G Brno - Jaroška | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 16 |
| 23 | Karel | Jelínek | E4.B | SPS Ostrov | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 11 |
| 24 | Rostislav | Štaubr | | | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 10 |
| 25 - 26 | Petr | Zasche | septima | G Jablonec n. N. | 2 | — | — | — | — | — | — | 2 | 9 |
| 25 - 26 | Petr | Virostko | 4.A | G Frýdek-Místek | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 9 |
| 27 - 29 | Petr | Švec | 4. | G Kadaň | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 8 |
| 27 - 29 | Ondřej | Kafka | sexta | G Semily | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 8 |
| 27 - 29 | Jiří | Dvořáček | 4.A | G Brno - Jaroška | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 8 |
| 30 | Ivo | Chvojka | | | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 7 |
| 31 | Jakub | Holovský | | | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 5 |
| 32 | Marie | Kuncová | 4.A | G Blansko | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 4 |
| 33 | Pavel | Kolář | | | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 3 |
| 34 | Jiří | Burda | | | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 2 |
| 35 | Radomír | Vaníček | | | 1 | — | — | — | — | — | 0 | 1 | 1 |
| 36 | Petr | Forgács | sexta B | G Most | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 0 |

Kategorie třetích ročníků

| | Jméno | Příjmení | Třída | Škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | S3 | III | Body |
|---------|----------------|--------------|------------|--------------------|---|---|---|---|---|----|----|-----|------|
| | <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | <i>F.1</i> | <i>MFF UK</i> | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 5 | 34 | 102 |
| 1 | Jan | Houštěk | sexta | G Pelhřimov | 5 | 3 | 4 | 4 | 5 | 8 | 5 | 34 | 105 |
| 2 | Milan | Berta | III.A | G Velké Kapušany | 2 | 4 | 3 | 1 | 3 | 10 | 3 | 26 | 71 |
| 3 | Karel | Kouřil | kvinta B | G Blansko | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 | 8 | 5 | 27 | 65 |
| 4 | Juraj | Suchár | 3. | G Dubnica n. Váhom | 1 | — | — | 2 | — | 5 | 2 | 10 | 59 |
| 5 - 6 | Jan | Houfek | sexta | G Uh. Hradiště | 2 | 1 | 2 | — | 1 | 8 | 2 | 16 | 48 |
| 5 - 6 | Miroslav | Pištek | sexta | G Sedlčany | 3 | 1 | 1 | — | 1 | 2 | 3 | 11 | 48 |
| 7 - 8 | Jakub | Kulaviak | kvinta B | G Blansko | 1 | — | 3 | 4 | — | 5 | 3 | 16 | 45 |
| 7 - 8 | Tomáš | Linhart | sexta | GOA Sedlčany | 1 | 1 | 2 | — | — | 7 | 4 | 15 | 45 |
| 9 | Pavel | Augustinský | sexta B | G Havířov | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 37 |
| 10 | Stanislav | Hampl | sexta | GOA Sedlčany | 2 | 1 | 1 | — | 1 | 3 | 1 | 9 | 36 |
| 11 | Lenka | Knopová | 5.M | G Pardubice | 1 | — | 3 | — | — | — | 3 | 7 | 33 |
| 12 | Tomáš | Matoušek | VI.C | G Karlovy Vary | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 29 |
| 13 | Petr | Schimm | VI.C | G Karlovy Vary | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 28 |
| 14 | Daniel | Fiala | 5.B | G Sušice | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 27 |
| 15 - 16 | Klára | Maturová | sexta | G Tanvald | — | 3 | — | 4 | 2 | 6 | — | 15 | 24 |
| 15 - 16 | Martin | Soška | sexta | G Uh. Hradiště | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 24 |
| 17 - 18 | Ondřej | Souček | 3. | G Jablonec | — | — | — | 3 | — | — | — | 3 | 22 |
| 17 - 18 | Martin | Kozák | sexta A | G Klatovy | — | — | — | — | — | 3 | — | 3 | 22 |
| 19 | Kateřina | Šetková | sexta B | G Klatovy | 2 | — | 2 | — | 2 | 6 | — | 12 | 20 |
| 20 - 21 | Jiří | Vábek | sexta | G Žďár n. Sáz. | 2 | — | 3 | — | — | — | — | 5 | 19 |
| 20 - 21 | František | Kolář | kvinta | G Praha 5 | 3 | — | — | — | — | — | — | 3 | 19 |
| 22 - 23 | Zbyněk | Šrubař | sexta A | G Frenštát p. R. | 1 | — | 2 | 0 | — | — | — | 3 | 18 |
| 22 - 23 | David | Šumský | 3.B | G Trinec | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 18 |
| 24 | Petr | Nachtigall | sexta A | G Frenštát p. R. | 1 | — | 3 | 0 | — | — | — | 4 | 17 |
| 25 - 26 | Jan | Kulveit | VI.A | G Praha 8 | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 16 |
| 25 - 26 | Miroslav | Bačák | sexta | G Pelhřimov | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 16 |
| 27 - 28 | Jiří | Svoboda | 7.A | G Praha 9 | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 13 |
| 27 - 28 | Kristina | Rochová | sexta A | G Frenštát p. R. | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 13 |
| 29 | Jana | Váchová | 6. | G Tábor | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 12 |
| 30 - 31 | Pavel | Borovička | III.T | G Opatov | — | — | 3 | — | 3 | — | 3 | 9 | 11 |
| 30 - 31 | Petr | Veselý | 5.F | G Č. Budějovice | — | 1 | 2 | — | 3 | — | — | 6 | 11 |
| 32 - 33 | Jiří | Bočan | sexta | | 1 | — | 3 | — | — | 2 | — | 6 | 8 |
| 32 - 33 | Marek | Libra | sexta | G Žďár n. Sáz. | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 8 |
| 34 | Lubor | Kleveta | sexta | G Uh. Hradiště | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 7 |
| 35 - 36 | Miroslav | Vyčítal | 3. | G Rychnov n. K. | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 6 |
| 35 - 36 | Václav | Lederer | sexta | G Vítkov | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 6 |
| 37 | Slavomír | Miškovec | 3.A | G Poprad | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 5 |
| 38 - 39 | Jan | Novotný | sexta | G Mělník | 1 | — | — | — | — | 2 | — | 3 | 3 |
| 38 - 39 | Tomáš | Kratochvíl | 6.A | G Brno - Křenová | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 3 |
| 40 | Lukáš | Rychnovský | kvinta B | G Blansko | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 0 |

Kategorie druhých ročníků

| | Jméno | Příjmení | Třída | Škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | S3 | III | Body |
|---------|----------------|--------------|------------|-----------------|---|---|---|---|---|----|----|-----|------|
| | <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | <i>F.1</i> | <i>MFF UK</i> | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 5 | 34 | 102 |
| 1 - 2 | Peter | Čendula | 2.B | G Lipt. Mikuláš | 1 | 4 | 4 | 1 | — | 10 | 3 | 23 | 77 |
| 1 - 2 | Petr | Nečesal | IV.C | G M. Budějovice | 1 | 1 | 3 | 4 | 5 | 10 | 3 | 27 | 77 |
| 3 | Martin | Beránek | V. | G Praha 4 | 2 | 3 | — | 2 | 5 | 5 | 4 | 21 | 67 |
| 4 | David | Kolovratník | | SPŠS Chrudim | 2 | — | 4 | 2 | — | 8 | 2 | 18 | 50 |
| 5 | Jaromír | Chalupský | kvinta A | G Sušice | 2 | 1 | 3 | 4 | 2 | 6 | 0 | 18 | 46 |
| 6 | Ondřej | Plašil | 2.B | G Praha 9 | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 43 |
| 7 | Michal | Škoda | kvinta B | G Turnov | — | — | 3 | — | — | 4 | — | 7 | 41 |
| 8 - 9 | Jan | Pšikal | 2.F | SPŠE Pardubice | 2 | — | 2 | — | 2 | 4 | 1 | 11 | 30 |
| 8 - 9 | Pavel | Janda | kvinta | G Telč | 2 | — | 3 | — | — | — | 3 | 8 | 30 |
| 10 - 11 | Jaroslav | Tykal | 2.C | G Jihlava | 1 | 1 | 3 | — | — | — | 1 | 6 | 29 |
| 10 - 11 | Jiří | Plachý | kvinta | G Uh. Hradiště | 1 | — | 2 | — | 1 | 2 | — | 6 | 29 |
| 12 - 13 | Hedvika | Kadlecová | 2.C | G Praha 2 | 2 | — | 1 | — | — | 6 | — | 9 | 28 |
| 12 - 13 | Radim | Krupička | 2.B | G Žďár n. Sáz. | 1 | — | 2 | 0 | 0 | — | — | 3 | 28 |

| | Jméno | Příjmení | Třída | Škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | S3 | III | Body |
|---------|----------------|--------------|------------|------------------|---|---|---|---|---|---|----|-----|------|
| | <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | <i>F.1</i> | <i>MFF UK</i> | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 5 | 34 | 102 |
| 14 | Jakub | Chaloupka | 5.A | G Brno - Křenová | — | — | 3 | 4 | — | — | — | 7 | 27 |
| 15 | Libor | Tomšík | 2. | SPŠE Plzeň | 2 | — | 3 | 0 | — | 3 | 1 | 9 | 25 |
| 16 | Michal | Tarana | 2.B | G Žilina | 1 | 1 | 2 | — | — | 3 | 0 | 7 | 23 |
| 17 - 19 | Jan | Alster | sexta A | G Holešov | 2 | — | — | — | — | — | — | 2 | 21 |
| 17 - 19 | Martin | Jakl | 4.D | G Pardubice | — | — | 3 | — | — | 2 | 2 | 7 | 21 |
| 17 - 19 | Pavel | Řezanka | 2.C | G Praha 5 | 2 | — | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 9 | 21 |
| 20 - 21 | Břetislav | Šopík | 2.B | G Žďár n. Sáz. | 2 | — | 3 | 0 | 1 | 1 | — | 7 | 18 |
| 20 - 21 | Antonín | Karásek | 2. | G Blansko | 1 | — | 2 | — | — | 2 | 2 | 7 | 18 |
| 22 | Jakub | Levic | kvinta B | G Louny | 2 | — | 3 | — | 1 | — | 1 | 7 | 17 |
| 23 | Jan | Pacák | kvinta | | 2 | — | — | — | — | — | — | 2 | 16 |
| 24 - 25 | Dáša | Eisenmannová | 2.A | G Praha 5 | 1 | — | 2 | — | 1 | — | — | 4 | 15 |
| 24 - 25 | Martin | Šimek | kvinta | G Telč | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 15 |
| 26 - 27 | Marcel | Václavík | 2.A | COP Hronov | 1 | — | 1 | — | — | — | — | 2 | 14 |
| 26 - 27 | Pavel | Braška | 2.D | G Bílovec | 0 | — | 2 | — | — | — | — | 2 | 14 |
| 28 - 29 | Adela | Grohořová | 2.D | G Bardejov | 1 | — | 2 | — | 3 | — | — | 6 | 13 |
| 28 - 29 | Petr | Hřebačka | 5.A | G Brno - Křenová | — | — | 3 | 4 | — | — | — | 7 | 13 |
| 30 - 31 | Jaroslav | Vácha | kvinta | G Příbram | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 12 |
| 30 - 31 | Pavel | Veselý | 2.A | G Kolín | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 12 |
| 32 | Vladimíra | Satrapová | 2. | G Havl. Brod | 1 | — | — | — | — | 6 | — | 7 | 11 |
| 33 - 36 | Martina | Štyrková | S5.A | G K. Hora | 0 | — | — | — | 1 | — | — | 1 | 10 |
| 33 - 36 | Milan | Křápek | 2.D | G Brno - Křenová | 1 | — | 3 | — | — | — | — | 4 | 10 |
| 33 - 36 | Radek | Macháň | 2.B | G Liberec | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 10 |
| 33 - 36 | Jan | Kratochvíl | 2.K | SPŠ Praha | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 10 |
| 37 - 40 | Lada | Plenerová | 2.B | G Liberec | — | — | — | — | — | 5 | — | 5 | 9 |
| 37 - 40 | Lukáš | Brázda | 2.C | G Jihlava | 1 | — | — | — | — | — | — | 1 | 9 |
| 37 - 40 | Vít | Gottwald | 2.A | G Jičín | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 9 |
| 37 - 40 | Norbert | Požár | 6.A | G Bruntál | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 9 |
| 41 - 43 | Petra | Adamová | 2.A | G Benešov | — | — | 2 | — | — | — | — | 2 | 8 |
| 41 - 43 | Tomáš | Brezula | 2.B | G Přerov | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 8 |
| 41 - 43 | Jan | Zikán | 2.E | G Praha Arab. | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 8 |
| 44 - 46 | Lukáš | Schmiedt | 2.D | G Olomouc | — | 0 | 1 | — | — | 0 | — | 1 | 6 |
| 44 - 46 | Pavel | Vraspír | kvinta | G Polička | 0 | — | 3 | — | — | — | 0 | 3 | 6 |
| 44 - 46 | Hana | Besedová | 2.B | G Frenštát p. R. | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 6 |
| 47 - 49 | Jiří | Doubek | 2.G | G Praha Arab. | 1 | — | — | — | — | — | — | 1 | 5 |
| 47 - 49 | Michaela | Volná | 2.A | G Frýdek-Místek | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 5 |
| 47 - 49 | Petr | Novotný | 2.B | G Frýdek-Místek | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 5 |
| 50 - 51 | Martin | Hejna | S2.A | SPŠE Dobruška | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 4 |
| 50 - 51 | Pavel | Václavek | 2. | G Frýdek-Místek | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 4 |
| 52 - 53 | František | Polanka | 2.A | G Domažlice | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 3 |
| 52 - 53 | Ondřej | Pánek | 2.C | G Jihlava | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 3 |
| 54 | Jan | Kodovský | sexta A | G Zlín | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 2 |
| 55 | Martin | Marec | 6.B | G Bruntál | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 1 |

Kategorie prvních ročníků

| | Jméno | Příjmení | Třída | Škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | S3 | III | Body |
|---------|----------------|--------------|------------|-----------------|---|---|---|---|---|---|----|-----|------|
| | <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | <i>F.1</i> | <i>MFF UK</i> | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 5 | 34 | 102 |
| 1 | Matej | Dubový | 1.B | G Trenčín | — | — | 2 | — | 1 | 7 | 0 | 10 | 22 |
| 2 | Luboš | Bednárik | 1.F | G Trenčín | 2 | — | 2 | — | 1 | 7 | 0 | 12 | 21 |
| 3 | Michal | Bareš | kvarta A | G Plzeň | — | — | 3 | — | — | 4 | 2 | 0 | 16 |
| 4 | Peter | Biras | 1.F | G Trenčín | — | — | 2 | — | 1 | 4 | — | 7 | 12 |
| 5 | Petr | Křístek | 1.C | G Frýdek-Místek | — | — | 2 | — | — | 2 | — | 4 | 11 |
| 6 | Roman | Mendel | IX.A | ZŠ Trenčín | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 8 |
| 7 | Rudolf | Kopřiva | 1.C | G Frýdek-Místek | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 7 |
| 8 | Martin | Šturma | 1.A | G Praha 6 | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 6 |
| 9 - 11 | Jindřich | Štáštka | 1.E | G Sokolov | — | — | 1 | 0 | — | — | — | 1 | 4 |
| 9 - 11 | Alena | Julínková | 1.C | G Frýdek-Místek | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 4 |
| 9 - 11 | Jan | Kačmařík | 1.A | G Frýdek-Místek | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 4 |
| 12 | Karol | Martinka | 1.G | G Trenčín | — | — | 2 | — | 1 | — | — | 3 | 3 |
| 13 | Lenka | Burešová | 1.C | G Praha 5 | 1 | — | — | — | — | — | — | 1 | 2 |
| 14 - 15 | Michal | Fárka | 1.C | G Praha 5 | 1 | — | — | — | — | — | — | 1 | 1 |
| 14 - 15 | Martin | Žák | tercie M | G Praha 5 | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 1 |
| 16 | Miroslav | Krůs | 1.A | G Klatovy | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 0 |