12. ročník, úloha III . 3 ... *hmotnost atmosféry* *(4 body; průměr ?; řešilo 59 studentů)*
Spočtěte co nejpřesněji, jakou hmotnost má zemská atmosféra.

Jak asi všichni víte, atmosféra je objekt velice komplikovaný, a proto ji musíme nahradit nějakým vhodným modelem. Asi jste se dozvěděli ve škole, že atmosféru dělíme do určitých vrstev. Ta nejnižší se nazývá troposféra. Právě v ní se nachází většina hmoty a možná také víte, že její tloušťka je 9–17 km. To podle toho, zda tloušťku měříme na pólu nebo na rovníku. Díky této poměrně malé tloušťce (vzhledem k poloměru Země) můžeme při výpočtu považovat gravitační zrychlení za konstantní. Zemi nahradíme koulí a nebudeme uvažovat, že se otáčí — tím odpadne odstředivá síla a tedy i rozdílné tloušťky jednotlivých vrstev na rovníku a na pólech.

Nejjednodušší výpočet hmotnosti atmosféry M_A vypadá takto. Porovnáme tlakovou a tíhovou sílu působící na povrch zemský $S = 4\pi R_Z^2$, p je atmosférický tlak u povrchu Země.

$$F_{\mathrm{tl}} = pS = M_A g = F_G$$

a odtud dostaneme

$$M_A = \frac{pS}{g} = \frac{4\pi R_Z^2 p}{g}\,.$$

Pozorný řešitel FKS jistě ví, že i pro vzduch platí cosi jako hydrostatický paradox — tlak na povrchu Země závisí jen na výšce atmosféry nad povrchem a ne na její „šířce“ v různých výškách. Koule s větším poloměrem má i větší povrch. Dále také ve větší vzdálenosti od povrchu Země je menší gravitační zrychlení. Z těchto důvodů jsme spočetli dolní odhad hmotnosti, ale protože atmosféra je poměrně tenká, bude i odhad poměrně přesný.

Mnozí jste řešili příklad trochu jinak. Spočteme proto hmotnost atmosféry ještě jednou a to pro izotermní atmosféru — to znamená, že ve všech výškách je teplota stejná. Využijeme vztahu

$$\varrho(H) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_m g H}{R_m T}}$$

pro výpočet hustoty vzduchu v závislosti na výšce nad zemským povrchem H při dané teplotě vzduchu T, který platí pro izotermní atmosféru a můžete ho nalézt v tabulkách. (R_m/M_m je měrná plynová konstanta — pro vzduch $287\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$). Objem tenoučké kulové slupky je $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Hmotnost malého elementu objemu $\mathrm{d}m = \varrho \mathrm{d}V$. Dohromady tedy dostáváme

$$\mathrm{d}m = 4\pi \varrho_0 r^2 \mathrm{e}^{-\frac{M_m g}{R_m T}(r-R_Z)} \mathrm{d}r\,.$$

Zintegrováním rovnice v mezích od poloměru Země do nekonečna dostaneme výsledek

$$M_A = 4\pi \varrho_0 \int_{R_Z}^{\infty} r^2 \mathrm{e}^{-\frac{M_m g}{R_m T}(r-R_Z)} \mathrm{d}r = 4\pi \varrho_0 \frac{1}{K}\left(R_Z^2 + \frac{2R_Z}{K} + \frac{2}{K^2}\right)\,, \qquad \text{kde } K = \frac{M_m g}{R_m T}\,.$$

Všimněme si ještě, že při zanedbání ostatních členů než R_Z^2 dostaneme náš první výsledek. (Neboť stavová rovnice ideálního plynu pro jeden kg je $p/T\varrho = R_m/M_m$).

První výpočet nám dává hodnotu pro hmotnost atmosféry $5{,}3 \cdot 10^{18}$ kg a druhý výpočet $5{,}6 \cdot 10^{18}$ kg. Oba dva nám dávají opravdu pěkný odhad hmotnosti atmosféry — Malý průvodce meteorologií (MF Praha 1983) uvádí hodnotu $5{,}1 \cdot 10^{18}$ kg.

Jakub Černý

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.