12. ročník, úloha III . P ... *západ slunce* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 33 studentů)*

Máme 1 m dlouhou tyč zapíchnutou kolmo do země. Jak dlouhý stín bude mít tyč 2 h před západem slunce? Určete, jak se bude lišit výsledek pro různé zeměpisné šířky a různá roční období.

K řešení této úlohy se dalo přistoupit několika způsoby. V nejjednodušším případě jste úlohu řešili pouze ve speciálních případech slunovratů a rovnodenností. V tom většinou nebyl větší problém a takovéto řešení bylo ohodnoceno jedním či dvěma body. Obecnější případ pak mohl být rozebrán buďto s pomocí tradičního a v literatuře popsaného zavedení obzorníkových a rovníkových souřadnic, a nebo s využitím vlastní nápaditosti. Ta byla po zásluze odměněna, nicméně je třeba říci, že řešení bylo často velmi těžce srozumitelné. Nyní postupujme cestou přepočtu obzorníkových a rovníkových souřadnic.

Nejprve je třeba zamyslet se nad otázkou, co potřebujeme znát, abychom mohli spočíst délku stínu tyče. Je zřejmé, že znalost výšky Slunce nad horizontem v místě tyče právě dvě hodiny před západem je postačující. Označíme-li ji α, pak již hledaná délka stínu $d = l/\operatorname{tg}\alpha$, kde l je délka tyče, t. j. v našem případě $l = 1\,\mathrm{m}$. Ke snadnému výpočtu α je ale potřeba zavést rozumné souřadnice.

Polohu objektu na nebeské sféře můžeme přirozeně udat uvedením buďto tzv. obzorníkových souřadnic, nebo souřadnic rovníkových, přičemž v obou případech se jedná o dvě hodnoty (když pozorujeme vzdálené objekty, tak nevnímáme jejich vzdálenost, ale pouze směr, ve kterém je vidíme, a proto pro určení jejich polohy postačí udat pouze dvě úhlové souřadnice).

Obzorníkové souřadnice (h, A) nám říkají, že objekt je v místě pozorovatele vidět ve výšce h nad obzorem ($h = 0$ pro objekty na horizontu, $h = \pi/2$ pro objekty v zenitu) a azimut průmětu objektu na horizont je A. Azimut se zavádí jako úhel od směru na jih, narůstá pak ve směru hodinových ručiček (např. Polárka má v těchto souřadnicích v naší zeměpisné šířce $h \approx 50^\circ$, $A \approx 180^\circ$, u ostatních hvězd se ovšem obě tyto souřadnice s časem mění, v souladu s otáčením oblohy).

Rovníkové souřadnice si jako základ berou světový rovník, průmět zemského rovníku na nebeskou sféru. Světový rovník je tedy kružnice a my, jako pozorovatelé, se nacházíme v jejím středu. U objektu se pak určí výška nad rovinou rovníku (podobně jako se určovala h u obzorníkových souřadnic) nazvaná deklinace δ a hodinový úhel t (obdoba azimutu u obzorníkových souřadnic), což je úhel měřený v rovině rovníku mezi směrem k průsečíku místního poledníku s rovníkem a směrem k průmětu objektu do roviny rovníku (kladný směr opět ve směru hodinových ručiček). (Bylo by velice zdravé si nakreslit příslušný obrázek, či si ho někde najít v literatuře.)

Je vidět, že naše α je právě h Slunce dvě hodiny před západem. Poloha Slunce se ovšem snadněji dá popsat v rovníkových souřadnicích. Zatímco se obě obzorníkové souřadnice Slunce v průběhu dne zřetelně mění (v čase navíc nerovnoměrně), u rovníkových souřadnic zůstává deklinace během dne takřka neměnná (její změna je způsobována až oběhem Země kolem Slunce, nikoli vlastní rotací Země; jarní rovnodennost: $\delta = 0^\circ$, letní slunovrat: $\delta = 23{,}5^\circ$ atd.) a hodinový úhel narůstá rovnoměrně v čase.

Na základě sférické geometrie lze odvodit přepočet mezi rovníkovými a obzorníkovými souřadnicemi. Spočteme-li tedy rovníkové souřadnice Slunce ony dvě hodiny před západem a převedeme na obzorníkové, již snadno určíme délku stínu. Z geometrie vyplyne (viz např. Přehled astronomie, O. Hlad, J. Pavlousek), že platí přepočet mezi souřadnicemi

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t,$$

kde φ je zeměpisná šířka místa tyče. Z této rovnice lze vyjádřit hodinový úhel Slunce při západu, řekneme-li si, že Slunce zapadá při $h = 0$ (je zřejmě $t_{\mathrm{zap}} \in (0, \pi)$)

$$t_{\mathrm{zap}} = \arccos \frac{-\sin\delta \sin\varphi}{\cos\delta \cos\varphi} \,.$$

Dvě hodiny před západem bude hodinový úhel $t_{\mathrm{zap}} - \pi/6$ a tedy Slunce bude vysoko

$$h = \arcsin \left[\sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos \left(\arccos(-\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi) - \tfrac{1}{6}\pi \right) \right] \,.$$

Toto je již vztah udávající výšku Slunce nad obzorem dvě hodiny před západem v závislosti na zeměpisné šířce a deklinaci Slunce. Deklinaci bychom mohli počítat ze znalosti pohybu Země kolem Slunce (např. aproximací skutečné dráhy drahou kruhovou), ale spokojme se s myšlenkou, že si ji můžeme vyhledat ve hvězdářské ročence.

Je dobré povšimnout si, že t_{zap} existuje jen pokud je splněna podmínka $-(\frac{1}{2}\pi - \varphi) \le \delta \le (\frac{1}{2}\pi - \varphi)$. Pokud totiž splněna není, znamená to, že Slunce v daném místě nezapadá/nevychází.

Dále se též může stát, že h vyjde záporně. To je pak třeba interpretovat tak, že v daném místě je den kratší než dvě hodiny. Dvě hodiny před západem pak Slunce ještě nevyšlo a je pod obzorem.

Analýza výsledného vztahu, stejně jako výpočet délky stínu pro zajímavé úhly, je přenechána čitateli.

V řešení jsme se oprostili od dodatečných problémů způsobených refrakcí světla procházejícího atmosférou (tj., že Slunce vidíme skoro vždy o něco výše, než skutečně je). Tento nedostatek by ale mohl být snadno odstraněn (hlavním problémem úlohy byly operace se souřadnicemi, přičemž přesnost byla druhořadá). Někteří z vás i tuto opravu odůvodněně včlenili do svých řešení.

Rudolf Sýkora

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.