12. ročník, úloha VI . 2 ... *dipól v magnetickém poli* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 32 studentů)*

Mějme elektrický dipól (představte si ho jako dvě částice se stejnými hmotnostmi m a náboji $+q$ a $-q$ upevněné na koncích nehmotné tyčky délky l). Otáčí se v horizontální rovině okolo vertikální osy procházející středem dipólu. Popište pohyb dipólu poté, co zapneme konstantní vertikální magnetické pole B.

Na úvod je třeba říci, že analytické řešení je velmi složité a velmi pomohou znalosti teoretické mechaniky. Asi nejlepší je podívat se na chování dipólu vhodným numerickým modelem a provést počítačovou simulaci. Z této simulace můžeme získat představu o pohybu dipólu a posléze fyzikálními úvahami získat konkrétní čísla. My se budeme zabývat pouze speciálním případem, který je snadno řešitelný.

Nejprve se ale zamysleme nad tím, které veličiny se v magnetickém poli zachovávají. Bez pole by to byla energie, hybnost a moment hybnosti.

Tvrzení první. V magnetickém poli se v zachovává kinetická energie. Pro důkaz tohoto tvrzení si rozložme pohyb dipólu na translační a rotační (vztaženo k hmotnému středu). Každý náboj na konci tyče se při uvážení pouze rotačního pohybu pohybuje kolmo na směr osy tyče. Magnetické pole ale vyvolá sílu kolmo na pohyb náboje — tedy ve směru osy tyče. Protože náboje jsou opačné a jejich rychlosti jsou opačné, budou se síly sčítat a výsledné zrychlení od interakce rotačního pohybu s magnetickým polem přispívá pouze ke zrychlení translačního pohybu. Naopak translační pohyb má za následek změnu úhlové rychlosti rotace dipólu. Takže je jasné, že kinetická energie se může přelévat pouze mezi translačním a rotačním pohybem — musí se zachovávat (magnetické pole je konzervativní a potenciální energie je konstantní).

Tvrzení druhé. Zachovává se celková hybnost. Protože se zachovává kinetická energie, $E_k = p^2/2m$, je zřejmé, že se zachovává i velikost hybnosti. Zachování momentu hybnosti není splněno, protože jak uvidíme, dipól se obecně nemusí pohybovat po omezené dráze (prostorově).

Jak bylo popsáno výše, může se energie přelévat mezi rotačním a translačním pohybem. To je pro nás nevýhodné, protože se mění úhlová rychlost rotačního pohybu dipólu. Předpokládejme ale, že existuje taková trajektorie dipólu, kdy bude úhlová rychlost rotace kolem hmotného středu konstantní v čase. To by ale znamenalo, díky faktu, že rotační pohyb působí na translační a naopak, že působení rotace nevede ke změně velikosti hybnosti (neplatí o směru) a podobně naopak. Toho lze dosáhnout právě tehdy, když směr pohybu dipólu je kolmý na jeho osu (tím pádem se, stejně jako při pohybu jedné nabité částice v magnetickém poli, mění pouze směr a ne velikost rychlosti translačního pohybu). Zároveň síla pocházející od translačního pohybu působí ve směru osy dipólu a nemůže způsobit změnu velikosti úhlové rychlosti rotace. Takže dipól by se teoreticky mohl pohybovat po kružnici, ovšem musíme splnit ještě podmínku, že úhlová rychlost vlastní rotace dipólu je stejná jako úhlová rychlost obíhání po kružnici, aby vektor rychlosti translace byl stále kolmý na osu dipólu. Pokusme se určit, jak velká musí být úhlová rychlost rotace dipólu, aby se v daném magnetickém poli B pohyboval po kružnici o daném poloměru R. Z analogie s pohybem hmotného bodu po kružnici získáme vztah pro dostředivou sílu (hmotnost dipólu je $2m$)

$$F = 2mr\omega^2 \,,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace dipólu kolem hmotného středu i po kružnici. Pro velikost téže síly platí (Lorentzova síla v magnetickém poli)

$$F = 2q\omega\frac{d}{2}B = q\omega dB \,,$$

kde q je absolutní hodnota velikosti náboje jedné kuličky a d je délka dipólu. Snadnou úpravou získáme

$$\omega = \frac{qdB}{2mr} \,.$$

Je ale vidět, že počáteční translační rychlost dipólu $v_0 = r\omega$ je nenulová. To neodpovídá zadání — výchozí situace je dipól stojící na místě a poté skokově zapneme magnetické pole. Právě vyšetřený případ by odpovídal tzv. adiabatickému zapínání pole, tzn. zapínání pole tak pomalu, že v každém časovém okamžiku je systém v rovnováze, dipól se tedy stále pohybuje po kružnici, která postupně zvětšuje svůj poloměr. Ještě zbývá určit, jak rychle a po jaké kružnici se dipól bude pohybovat, pokud jeho počáteční úhlová rychlost bude ω_0 a adiabaticky zapneme pole o velikosti B. Oba vztahy získáme triviálně dosazením do zákona zachování velikosti hybnosti $p_0 = p$

$$md\omega_0 = 2mr\omega + md\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 - \frac{qB}{m} \,, \quad r = \frac{1}{2} \frac{qBd}{m\omega_0 - qB} \,.$$

Zde je nutno povšimnout si významných situací. Zapínejme pomalu magnetické pole. Poloměr orbity pohybu dipólu bude stále růst, až (pro konečnou velikost pole! $B = m\omega_0/q$) se dipól bude pohybovat po přímce s konečnou hybností $md\omega_0$. Při dalším zvětšování magnetického pole se již nebude nic měnit - uvedený vztah má platnost pouze pro pole menší než $B = m\omega_0/q$.

Problém skokové změny magnetického pole je analyticky řešitelný, ovšem nejjednodušší je podívat se na celou situaci s pomocí počítačového modelu. Analyticky totiž dostaneme systém diferenciálních rovnic, jejichž řešení je stejně nutno provést numericky. V závislosti na počátečních parametrech dostáváme dráhy, které vykazují jakýsi drift v jednom směru a ve směru kolmém oscilují v omezeném intervalu. Na vás je, abyste se znalostí vzniku a působení sil a momentů sil fyzikálně rozmysleli, jak takové dráhy mohou vypadat.

Kdybychom mohli magnetické pole zapínat libovolně v čase menším než t_0 a poté bychom nechali magnetické pole konstantní, mohli bychom (pro $t > t_0$) dostat trajektorie zajímavých tvarů. Např. byla popsána kružnice, ale obecně by se dipól mohl pohybovat po elipse, v úvahu připadají cykloidy, prodloužené i zkrácené, atd.

Tomáš Ostatnický

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.