

Zadání VI. série



Termín odeslání: 22. května 2000

Milí řešitelé Fykosu!

Máte v rukou zadání poslední série tohoto ročníku Fykosu, tedy poslední možnost, jak si ve výsledkové listině ještě trochu polepšit. Doufáme, že se vám budou úlohy líbit. Jejich řešení dostanete spolu s řešením 5. série a závěrečnou výsledkovou listinou v druhé polovině června. Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

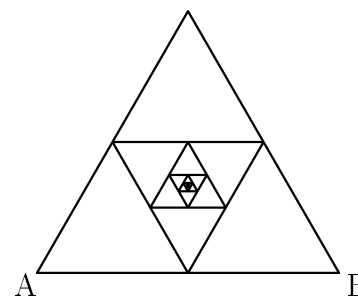
Jiří Franta

Úloha VI. 1 ... brouček

Brouček o hmotnosti m stojí na obruči o hmotnosti Ma a poloměru r , tato obruč leží na absolutně hladkém vodorovném stole. Náhle se brouček něčeho lekne a dá se do běhu. Poběží po obruči. Vaším úkolem je popsat trajektorii středu obruče (za předpokladu nulového tření mezi obručí a stolem).

Úloha VI. 2 ... odporová síť

Mějme drát, jehož jednotka délky má odpor R . Z rovnostranných trojúhelníků z něj vyrobených postavíme nekonečnou síť naznačenou na obr. 1 (nejdelší strana má jednotkovou délku). Jaký odpor bude mezi vrcholy největšího trojúhelníku?

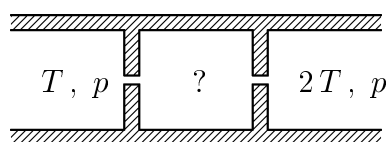


Obr. 1

Úloha VI. 3 ... kolik máme kyslíku?

Zkuste spočítat (či spíše kvalifikovaně odhadnout), na jak dlouho by lidstvu stačil kyslík nacházející se v současné atmosféře, kdyby najednou přestala fungovat fotosyntéza a rostliny by jej tedy nedoplňovaly. Potřebné údaje se pokuste zjistit v literatuře, nebo je vhodně aproximujte.

Úloha VI. 4 ... vodíková nádoba



Obr. 2

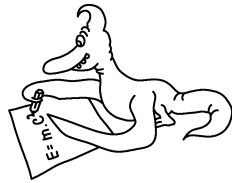
Představme si podle obrázku nádobu s ideálním plynem rozdělenou dvěma přepážkami na tři části. Napravo se udržuje teplota T a tlak p , nalevo $2T$ a p . Určete, jaká teplota a tlak je v prostřední části, víte-li, že celý systém je v dynamické rovnováze.

Úloha VI. P ... věříte fyzice?

Zkuste se zamyslet a napsat úvahu na téma: O platnosti kterých fyzikálních zákonů, pouček a teorií jsem přesvědčen z vlastní zkušenosti a každému bych byl schopen jejich platnost dokázat, a kterým prostě věřím například proto, že mi o nich říkali ve škole.

Úloha VI. Exp ... povrchové napětí vody

Změřte závislost povrchového napětí vody na teplotě. Metodu měření si můžete vybrat sami.



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... nabité kuličky (4 body, řešilo 48 studentů)

Tři stejné kuličky o hmotnosti m , nabité nábojem q , jsou spojeny lehkými neroztažitelnými nitěmi tak, že tvoří rovnostranný trojúhelník o straně délky d . Pokud jednu z nití přestříhneme, soustava se začne pohybovat. Určete maximální rychlost „prostřední“ kuličky během nastalého pohybu.

Zvolme soustavu souřadnic následujícím způsobem: osu x ve směru přestřižené nitě a osu y kolmou na osu x a procházející „prostřední“ kuličkou. Osu z není nutné uvažovat, neboť se jedná o rovinný problém. Dále vidíme, že pohyb kuliček bude symetrický vůči ose y . Velikosti složek rychlosti „postranních“ kuliček označme v_x ve směru osy x a v_y ve směru osy y . „Prostřední“ kulička se bude pohybovat v ose y rychlostí v . Okamžitou vzdálenost „postranních“ kuliček označme l .

Při pohybu kuliček se bude zachovávat jejich celková energie, neboť elektrostatické pole je konzervativní a celková vykonaná práce tahových sil nití je nulová:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{1}{2}mv^2 + m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l}.$$

Dále platí zákon zachování hybnosti soustavy kuliček, který má ve směru osy y tvar (kuličky se ve směru osy y přibližují):

$$2mv_y = mv.$$

Dosažením za v_y ze zákona zachování hybnosti do zákona zachování energie dostaneme:

$$\frac{3}{4}mv^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{l} \right) - mv_x^2.$$

Vidíme tedy, že „prostřední“ kulička bude mít maximální rychlost v okamžiku, kdy jsou všechny kuličky v přímce ($l = 2d$ a $v_x = 0$):

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 md}}.$$

Po dosažení maximální rychlosti se rychlost „prostřední“ kuličky začne zmenšovat a kulička se zastaví v okamžiku, kdy kuličky budou tvořit opět vrcholy rovnostranného trojúhelníku o straně délky d . Soustava se pak začne pohybovat stejným způsobem jako na začátku pouze v opačném směru a dostane se tak do původního stavu. Pohyb soustavy je tedy periodický. Někteří řešitelé chybně uvedli, že výsledný pohyb soustavy bude harmonický. Pohyb je harmonický pouze v případě, že potenciální energie je tvaru $E_p = kx^2$ (odpovídající síla je pak $F = -2kx$), kde k je konstanta a x výchylka z rovnovážné polohy. To však v našem případě není splněno.

V našem řešení jsme předpokládali, že elektromagnetické pole v každém okamžiku odpovídá elektrostatickému poli. Ve skutečnosti však vlivem pohybu kuliček vzniká také pole magnetické (pohyb nabitých částic odpovídá elektrickému proudu). Kuličky se pohybují se zrychlením. Dochází tedy k vyzařování elektromagnetických vln na úkor mechanické energie kuliček. To znamená, že pohyb kuliček bude tlumen a kuličky se zastaví v rovnovážné poloze, což je poloha, kdy kuličky leží v přímce. Vliv uvedených efektů roste s rychlostí kuliček a s frekvencí jejich pohybu. Budou-li rychlosti kuliček podstatně menší než rychlost světla a frekvence jejich pohybu nebude příliš velká, pak lze uvedené efekty zanedbat.

Několik řešitelů uvažovalo také gravitační síly mezi kuličkami. Gravitační síly musí být menší než elektrické. V opačném případě by totiž došlo ke zhroucení kuliček do těžiště rovnostranného

trojúhelníku ještě před přestřižením nitě. V tomto případě je postup zcela stejný — stačí nahradit potenciální energii systému kuliček výrazem:

$$E_p = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} - \kappa m^2 \right) \frac{1}{l}.$$

V několika došlých řešeních bylo chybně užito vztahu $v = at$, kde v znamená rychlost, a zrychlení a t čas. Tento vztah platí pouze v případě, že zrychlení a je *konstantní*. Někteří do tohoto vztahu dosazovali jakési střední hodnoty. To je možné, ale dosazená střední hodnota musí být *časová*. Časovou střední hodnotu zrychlení však lze určit pouze ze známé časové závislosti zrychlení. Podobně je tomu i u ostatních vztahů tohoto typu (například $W = Fs$ nebo $s = vt$). Tyto problémy měli řešitelé, kteří úlohu řešili pomocí sil, neboť pohybové rovnice jsou v tomto případě poměrně složité diferenciální rovnice, které se řeší integrací na zákon zachování energie.

Někteří řešitelé neznali správný vztah pro potenciální energii soustavy bodových nábojů (většinou jim vycházela potenciální energie dvojnásobná, než je ve skutečnosti). Odvodme si tedy správný vzorec. Uvažujme soustavu N bodových nábojů. Poloha i -tého náboje je \mathbf{r}_i a hodnota jeho náboje Q_i . Síla, kterou působí j -tý náboj na i -tý, je pak dána vztahem:

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij},$$

kde $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Z tohoto vztahu ihned vidíme, že $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, což rovněž plyne ze zákona akce a reakce.

Nechť se polohy nábojů změni o velmi malé $\Delta\mathbf{r}_i$: $\Delta r_i \ll r_{ij}$. Elektrické síly pak vykonají práci ΔW , pro kterou platí:

$$\Delta W = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot \Delta\mathbf{r}_i = \sum_{i < j} \mathbf{F}_{ij} \cdot \Delta\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \Delta\mathbf{r}_j = \sum_{i < j} \mathbf{F}_{ij} \cdot (\Delta\mathbf{r}_i - \Delta\mathbf{r}_j).$$

Protože platí, že $\Delta\mathbf{r}_{ij} = \Delta\mathbf{r}_i - \Delta\mathbf{r}_j$, lze vztah pro ΔW dále upravit:

$$\Delta W = \sum_{i < j} \mathbf{F}_{ij} \cdot \Delta\mathbf{r}_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \cdot \Delta\mathbf{r}_{ij}.$$

Uvažujme vektor \mathbf{r} . Pokud k tomuto vektoru přičteme vektor $\Delta\mathbf{r}$, pak dostaneme vektor $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. Velikost vektoru \mathbf{r} označme R . Velikost vektoru \mathbf{r}' zapišme jako $R + \Delta R$. Pokud je splněna nerovnost $\Delta r \ll R$, potom platí:

$$R^2 + 2R\Delta R + (\Delta R)^2 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = R^2 + 2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} + (\Delta r)^2 \quad \implies \quad \mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} = R\Delta R.$$

Elektrické síly tedy vykonají práci:

$$\Delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^2} \Delta r_{ij}.$$

Celkovou práci W , kterou elektrické síly vykonají při přemístění nábojů z jedné polohy do druhé, získáme sečtením jednotlivých příspěvků ΔW , které odpovídají „nekonečně“ malým přemístěním. To se provede integrací. Uvažujme nyní soustavu pouze dvou nábojů. Zde známe práci, kterou elektrické síly vykonají při přemístění nábojů z polohy, kdy je jejich vzdálenost R , do nekonečna: $W = (1/4\pi\epsilon_0)(Q_1 Q_2/R)$ (tento výsledek se dostane integrací). Tento vzorec nám umožňuje určit práci W elektrických sil při přemístění nábojů soustavy do nekonečna i v obecném případě:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}.$$

Tato práce nezávisí na způsobu přemístění nábojů, ale pouze na jejich počáteční vzájemné poloze. To tedy znamená, že existuje potenciální energie tohoto systému, kterou lze zapsat jako:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} + C = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} + C,$$

kde C je libovolná konstanta (potenciální energie je určena až na aditivní konstantu). Volbou $C = 0$ dostaneme potenciální energii s nulovou hladinou v nekonečnu.

Karel Kolář

Úloha IV.2 ... tyč pod napětím (3 body, řešilo 70 studentů)

Na konce homogenní tyče o průřezu $S = 1 \text{ cm}^2$ působí dvě síly $F_1 = 40 \text{ N}$ a $F_2 = 100 \text{ N}$ v opačných směrech (obě „od tyče“). Určete napětí v průřezu, který dělí tyč na dvě části v poměru 1 : 2 (působíště síly F_2 je na konci kratší části).

Z došlých řešení tohoto příkladu bylo správně spočteno mnohem méně, než by se vzhledem k jednoduchosti této úlohy dalo předpokládat. Ukážeme si tedy dva možné způsoby řešení.

První přístup spočívá v tom, že si sílu F_2 rozdělím na dvě složky. Jedna složka bude mít stejnou velikost jako síla F_1 a spolu s ní bude v celé tyči způsobovat vznik napětí o velikosti $\sigma_1 = F_1/S$. Druhá složka síly F_2 o velikosti $F_2 - F_1$ bude tyč urychlovat ve směru působení síly F_2 . Urychlující síla spolu se silou setrvačnou zapříčiní vznik dalšího napětí σ_2 , jehož velikost je dána vzdáleností od působíště síly F_2 . V našem případě je $\sigma_2 = 2(F_2 - F_1)/3S$. Výsledné napětí σ v zadané vzdálenosti bude

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{2F_2 + F_1}{3S}.$$

Úlohu je možné vyřešit také z pohybových rovnic. Budu předpokládat, že tyč je rozdělena v obecném poměru $k : (1 - k)$, kde $k \in \langle 0, 1 \rangle$. Budu ji brát jako dokonale tuhé těleso, což znamená, že se celá pohybuje se zrychlením $a = (F_2 - F_1)/m$ a napíšu pohybové rovnice:

$$F_2 - F = ka$$

$$F - F_1 = (1 - k)a.$$

Jejich řešení bude $F = k(F_1 - F_2) + F_2$. Napětí v průřezu daném koeficientem k bude $\sigma = F/S$, což pro $k = 1/3$ dává náš případ. Vidíme také, že napětí se bude lineárně měnit v závislosti na k . Nebude tedy stejné v každém průřezu tyče, jak mnozí řešitelé chybně předpokládali (analogický případ: tyč visící v homogenním gravitačním poli).

Pro úplnost dodejme, že číselně vychází $\sigma = 800 \text{ kPa}$.

Libor Sedláček

Úloha IV.3 ... potápěčova bublina (4 body, řešilo 67 studentů)

Potápěč v hloubce 50 m pod ledem vypustí vzduchovou bublinu o poloměru 2 cm. Bublina doplave pod led. Předpokládejte, že se zdeformuje přibližně na pravidelný válec. Určete jaká bude její výška. Vše probíhá za normálního tlaku a teploty 0° C .

Velká bublina zaujme pod ledem zhruba tvar válce, neboť dolní podstava bude z velké části rovná, na krajích bude sice zakřivená, ale to zanedbáme. Bublina má povrchovou, potenciální tíhovou a tlakovou energii. Systém zaujme takový tvar, aby součet těchto energií byl minimální. Tlakovou energii můžeme považovat za konstantní, neboť výška bubliny bude malá, a tedy tlak vzduchu v ní v dobrém přiblížení stále roven tlaku atmosférickému. Z čehož plyne, že objem bubliny těsně pod ledem bude také konstantní. Potenciální tíhová energie závisí na poloze těžiště a bude se rovnat práci, kterou bychom museli vykonat, abychom kapalinu z objemu bubliny přenesli na povrch, tedy: $E_{pot} = 1/2 \rho V g h$.

K určení energie budeme potřebovat velikost povrchu válce v závislosti na h a V . Tento povrch je:

$$S = 2 \left(\frac{V}{h} + \sqrt{\pi V h} \right).$$

Povrchová energie je, uvažujeme-li, že povrchové napětí mezi ledem a vzduchem je zhruba stejné jako mezi vodou a vzduchem:

$$E_{pov} = 2\sigma \left(\frac{V}{h} + \sqrt{\pi V h} \right).$$

Minimum nastává, když je derivace energie podle výšky rovna nule:

$$0 = -\frac{2\sigma V}{h^2} + 2\sigma \sqrt{\frac{\pi V}{h}} + \frac{1}{2}\rho V g.$$

Protože druhý člen je v porovnání s ostatními velmi malý, lze ho zanedbat. Dostaneme tedy:

$$h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \doteq 5,5 \text{ mm}.$$

Řešení pomocí energií má oproti rozboru působících tlaků jednu nespornou výhodu, energie je totiž v jistém smyslu pojem globální, tedy velikost energie v naší aproximaci bude zhruba stejná jako ve skutečnosti. Tlak je naopak pojmem lokálním, v místech zakřivení by bylo matematicky velmi obtížné s tím počítat, ale zato by výsledek byl přesnější. Aproximace válcem platí jen pro velké bubliny, pro menší nelze uvažovat, že zaujmou takový tvar.

Nejčastějšími chybami bylo neuvážení potenciální energie a chybná interpretace pravidelného válce jako válce s pevně závislými rozměry ($r = v$ nebo $2r = v$). V takovém případě výška bubliny vyšla přes 5 cm. Tento výsledek mohl každý po rozumné úvaze zavrhnout a začít hledat chybu.

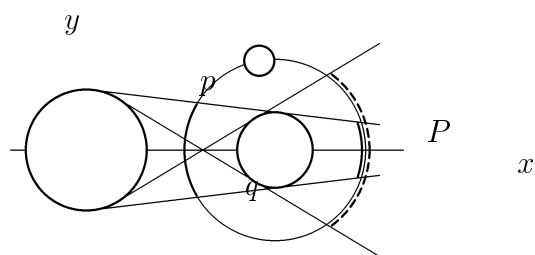
Robert Vácha & Lenka Zdeborová & Karel Kolář

Úloha IV.4 ... zase to zatmění (5 bodů, řešilo 64 studentů)

Vaším úkolem je spočítat maximální možnou šířku pásu úplného i částečného zatmění Slunce. Je úplné zatmění pozorovatelné vždy, když se Měsíc dostane na spojnici Slunce a Země? Pro jednoduchost uvažujte, že se všechna tři tělesa pohybují v téže rovině (ekliptice). K výpočtu použijte následujících dat:

- vzdálenost Země od Slunce r_Z kolísá mezi 147 093 860 km a 152 101 870 km
- vzdálenost Měsíce od Země r_M kolísá mezi 356 410 km a 406 740 km
- poloměr Slunce je $R_S = 695\,990$ km
- poloměr Země je $R_Z = 6\,378$ km
- poloměr Měsíce je $R_M = 1\,738$ km

Situaci budeme řešit v rovině kolmé na ekliptiku a procházející středy Slunce, Země a Měsíce. Zavedeme soustavu souřadnou dle obrázku 3.



Obr. 3

Situace bude symetrická podle osy x , dále budeme řešit jen v polorovině $y > 0$. Zajímá nás bod P , protože dvojnásobek jeho y -ové souřadnice bude šířka stínu. Rovnice přímky p určující hranici oblasti úplného stínu má tvar:

$$y = \frac{R_M - R_S}{r_Z - r_M} x + R_S$$

(získáme ji z obecné rovnice přímky $y = ax + b$ a dvou známých bodů $[0, R_S]$ a $[r_Z - r_M, R_M]$ — zanedbáváme, že spojnice tečného bodu a středu tělesa není kolmá na osu x , což je vzhledem k úhlu, který svírá přímka p s osou x (desetiny stupně) oprávněně zanedbání).

Pro $x = r_Z - R_Z$ dostaneme

$$y = \frac{R_M - R_S}{r_Z - r_M} (r_Z - R_Z) + R_S. \quad (1)$$

Protože je $R_M - R_S < 0$, tak pro maximální y musí být r_Z maximální a r_M minimální, číselně je šířka stínu $2y = 273$ km (můžeme si tedy v této chvíli dovolit zanedbat zakřivení Země).

Pro částečné zatmění dostaneme analogicky rovnici přímky q :

$$y = \frac{R_M + R_S}{r_Z - r_M} x - R_S .$$

Pokud bychom dosadili $x = r_z - R_Z$ dostaneme maximální hodnotu y přibližně 3600 km \Rightarrow již nelze zanedbat zakřivení Země.

Budeme tedy hledat průnik q s kružnicí $(x - R_Z)^2 + y^2 = R_Z^2$, která popisuje řez povrchem Země v naší soustavě souřadné. Po dosazení za y dostaneme kvadratickou rovnici:

$$\left(1 + \left(\frac{R_M + R_S}{r_Z - r_M}\right)^2\right) x^2 - 2 \left(r_Z + R_S \frac{R_M + R_S}{r_Z - r_M}\right) x + r_Z^2 + R_S^2 - R_Z^2 = 0 .$$

Po vyřešení (vezmeme menší z kořenů) dostaneme x_S , což je x -ová souřadnice průniku. Pak hledaná šířka částečného zatmění na zemské sféře je $2R_Z \arccos(r_Z - x_P)/R_Z \doteq 7764$ km.

K otázce existence úplného zatmění: Při pohledu na (1) zjistíme, že y nabývá minima pro r_M minimální a r_Z maximální, po dosazení $y = -156$ km $\Rightarrow p$ a p_{sym} se protnou mezi Měsícem a Zemí a tedy úplné zatmění Slunce na Zemi vidět nebude.

Jan Prokleška

Úloha IV . P ... jablko nepadá daleko od baobabu (5 bodů, řešilo 49 studentů)

Představme si baobab, který roste na rovníku, na jeho nejvyšší větvi ve výšce h je baobabí jablko. Jablko se rozhodne, že spadne. Spočtete, jak daleko od kmene dopadne.

Řešení jedna: Dívá-li se na situaci pozorovatel z inerciální soustavy nespojené s povrchem Země, vidí, že ve výšce h letí jablko rychlostí $\omega(R_z + h)$ ve směru rovnoběžně s povrchem (ω je úhlová rychlost rotace Země). Povrch se pohybuje v téže směru rychlostí ωR_z . Rozdíl je tedy ωh . Jablko letí dobu $t = \sqrt{2h/g}$ a dopadne tedy ve vzdálenosti $s = \omega h \sqrt{2h/g}$ od kmene.

Řešení dva: Díváme-li se na situaci ze soustavy spojené s povrchem Země, zdají se nám nehybné předměty, které ve výšce x letí rychlostí $\omega(R_z + x)$. Jablko letí stále $\omega(R_z + h)$ a tedy vzhledem k pozorovateli na Zemi rychlostí $\omega(h - x)$. Pro x platí $x = h - gt^2/2$ a tedy $v = \omega gt^2/2$. Po zintegrování (kdo neví, co to je, nechť přijme, že plocha pod grafem funkce $y = x^2$ je $x^3/3$) vyjde $s = (\omega h/3) \sqrt{2h/g}$.

Na vás je, abyste rozhodli, který z výsledků je správně, a opravili chybný postup.

Opravíme nejprve chybnou úvahu v řešení jedna. Představme si tyč kolmou na povrch, z jejíhož konce ve výšce h padá jablko. Povrch Země letí v horizontálním směru (dále budeme-li mluvit o rychlosti, myslíme tím její průmět do tohoto směru, nebude-li řečeno jinak) rychlostí ωR_z (kde ω je úhlová rychlost rotace Země). Konec tyče (resp. jablko před pádem) letí rychlostí $\omega(R_z + h)$. V zadání jsme postupovali následovně: Rozdíl rychlostí je stále ωh , doba pádu t , a tedy posunutí od dolního konce tyče $\omega h t$. To by ovšem znamenalo, že v každé výšce (kupříkladu i na začátku pádu) je rozdíl rychlosti jablka a části tyče, kolem níž právě prolétá, ωh , což viditelně není. Ve výšce x nad povrchem je rychlost odpovídající části tyče $\omega(R_z + x)$, rychlost jablka stále $\omega(R_z + h)$, rozdíl je tedy $\omega(h - x)$, což odpovídá řešení dva v zadání. Ke stejné opravě řešení jedna lze dospět i úvahou využívající faktu, že úhlová rychlost jablka ve výšce x je

$$\omega_x^* = \frac{\omega(R_z + h)}{R_z + x} \approx \omega \left(1 + \frac{h}{R_z}\right) \left(1 - \frac{x}{R_z}\right) \approx \omega \left(1 + \frac{h - x}{R_z}\right) .$$

Zde (a i v pozdějším textu) využíváme faktu, že pro $h/R_z \ll 1$ dostatečně přesně platí $(1 + h/R_z)^{-1} \approx (1 - h/R_z)$. Rozdíl vzdáleností po dopadu pak vyjde

$$s = R_z \Delta\varphi = R_z \int_0^t (\omega_x^* - \omega) d\tau = \omega \int_0^t (h - x) d\tau = \frac{\omega g t^3}{6} = \frac{\omega h}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}} , \quad (2)$$

neboť $h - x = g\tau^2/2$ je délka volného pádu za čas τ .

Nyní by se tedy zdálo, že řešení dva je správně. Ale není tomu tak. Dosud jsme uvažovali, že vodorovná rychlost jablka je $\omega(h + R_z)$ nezávisle na výšce x , ve které se právě během pádu nachází. Kdyby toto platilo, nemohla by krasobruslařka dělat svoje piruety, neutronové hvězdy by nerotovaly tak úžasně rychle a pan Kepler by neodvodil svůj druhý zákon nebeské mechaniky. Díky izotropii prostoru platí totiž zákon zachování momentu hybnosti, který říká, že v soustavě bez vnějších momentů sil zůstává moment hybnosti konstantní. Počáteční moment hybnosti jablka $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = m\omega(R_z + h)^2$ se tedy v průběhu pohybu zachovává, a proto pro úhlovou rychlost ve výšce x platí

$$\omega_{jx} = \left[\frac{R_z + h}{R_z + x} \right]^2 \omega \approx \left[\left(1 + \frac{h}{R_z} \right) \left(1 - \frac{x}{R_z} \right) \right]^2 \omega \approx \left(1 + 2 \frac{h - x}{R_z} \right) \omega.$$

Stejným postupem jako v (2) se dobereme konečně ke správnému výsledku $s = 2\omega h/3 \sqrt{2h/g}$.
Ještě odvodíme jeden důsledek našich úvah. Rozdíl rychlosti jablka a tyče ve výšce x je

$$v = (\omega_{jx} - \omega)(R_z + x) \approx 2 \frac{h - x}{R_z} (R_z + x) \omega \approx 2\omega(h - x).$$

V čase τ od začátku pádu se tedy jablko vzhledem k tyči pohybuje rychlostí $v = \omega g \tau^2$. Pozorovatel, který stojí na zemi pod tyčí a neví nic o otáčení Země, by toto nedokázal vysvětlit. Zdálo by se mu, že na jablko působí nějaká podivná síla o velikosti $F = m dv/d\tau = 2m\omega g \tau = 2m\omega v^*$, kde v^* je svislá rychlost pádu. My ale víme, že to je zdánlivá Coriolisova síla, která působí na tělesa v neinerciálních rotujících soustavách.

A na závěr trocha statistiky: 20 (19) řešitelů se domnívalo, že správně je řešení jedna (dva), dostali celkem 5 (39) bodů. 10 řešitelů tvrdilo, že obě řešení jsou špatně, na správný důvod ovšem přišli jen čtyři z nich, z čehož jen *honza Ĥouštěk* a *Miroslav Hejna* dospěli ke správnému výsledku.

Lenka Zdeborová

Úloha IV . Exp ... dráteček (8 bodů, řešilo 65 studentů)

V minulé brožurce byl připevněn kousek drátečku. Vaším úkolem bylo zjistit, z jakého kovu byl vyroben. Vzorek jste nesměli nijak poničit (roztavit, naleptat kyselinou, trvale zdeformovat atd.). Mohli jste změřit například tepelnou kapacitu, hustotu, tepelnou vodivost a roztažnost, délku, měrný odpor, průměr a hmotnost atomového jádra, elektrochemický potenciál, odrazivost, mřížkovou konstantu, relativní či absolutní permitivitu a permeabilitu, kapacitu, indukčnost, poločas rozpadu, absorpční a emisní spektrum... Fantazii se meze nekladly.

Určit, z jakého kovu je dráteček vyroben, je možné mnoha způsoby. Uvedeme zde postupy, které řešitelé používali nejčastěji a jejichž kombinací úspěšně odhalili složení drátečku.

Máme dráteček. Nejjednodušší věc, kterou můžeme udělat, je přiložením magnetu otestovat jeho magnetické vlastnosti. Zjistíme, že dráteček na magnet vůbec nereaguje, je tedy paramagnetický nebo diamagnetický. Tím jsme vyloučili feromagnetické kovy Fe, Co, Ni.

Dále můžeme poměrně jednoduše určit hustotu. Klasický postup je změřit mikrometrem poloměr a délku drátečku, vypočítat objem, pak dráteček zvážit laboratorními vahami (některým šťastnějším se podařilo získat i digitální váhy) a vypočítat hustotu. Při opakovaném a pečlivém měření lze dosáhnout přesnosti měření pod 10 %. Průměrná hustota vycházela 10000 – 11000 kg · m⁻³. Po porovnání s tabulkami zjistíme, že drátek může být z některého z těchto kovů: Bi, Ag, Ni, Mo, Pb.

Další účinná metoda je porovnávání elektrochemického potenciálu. Do elektrolytu (nedestilovaná voda, jablko, pomeranč, ...) vložíme jako jednu elektrodu náš drátek a jako druhou elektrodu použijeme známý kov (zlatý prstýnek, hliníková lžička, stříbrná náušnice, drátky a hřebíky, které poskytuje naše domácnost, ...) a změříme polaritu napětí na elektrodě. Na elektrodě s nižším elektrochemickým potenciálem se objeví záporný pól. Můžeme tak porovnat, vůči kterým kovům má náš drátek menší nebo větší elektrochemický potenciál a podle toho, jak bohatá je naše sbírka elektrod, můžeme porovnáním s tabulkami zúžit spektrum kovů, z kterých by náš dráteček mohl

být. Řešitelé často také používali trochu modifikovanou verzi této metody, kdy jako jednu elektrodu zvolili nějaký (např. měděný) drátek a jako druhou elektrodu používali náš dráteček a různé další kovy. Na takovýchto elektrodách měřili napětí a zjišťovali, pro kterou druhou elektrodu bude změřené napětí shodné s napětím, které jste změřili při použití drátečku. Tato elektroda je pak zřejmě ze stejného materiálu jako náš dráteček.

Poměrně často ještě někteří zjišťovali tvrdost, tím, že se pokoušeli rýpat drátečkem do různých materiálů a výsledky opět porovnávali s tabulkami.

Toto už většině z vás stačilo k určení kovu, z něhož dráteček je.

Našli se však i odvážní a originální hračičkové a experimentátoři, kteří měřili tepelnou roztažnost, elektrický odpor nebo měrnou tepelnou kapacitu drátečku, nebo se pokoušeli určit, zda je dráteček paramagnetický nebo diamagnetický. Někteří další zase vtipnými postupy zpřesnili měření hustoty. Nutno říct, že dobré provedení těchto experimentů je náročnější, takže ne všechny se podařily, ale přesto (nebo právě proto) oceňujeme váš hravý a tvořivý přístup.

No a těm, kteří si ani po přečtení tohoto návodu nezměřili, z jakého kovu dráteček je, tedy prozradíme, že je ze stříbra.

Jana Gřondilová

Úloha S.IV ... **Tranzistor PNP** (5 bodů, řešilo 22 studentů)

Proveďte diskusi funkce PNP tranzistoru. Porovnejte s funkcí NPN tranzistoru kvalitativně, ale i kvantitativně. Díra má stejný náboj jako elektron, má však menší pohyblivost. Co se stane, když posvítíme dovnitř tranzistoru (PNP i NPN)?

První část úlohy je snadná. Protože emitor je dotován akceptorovou příměsí, k vodivosti přispívají pouze díry. Vidíme, že při zapojení se společnou bází se při tranzistorovém efektu uplatňují v tranzistoru PNP díry, narozdíl od elektronů v tranzistoru NPN. Princip je stejný, jenom, jak je v zadání, díry mají menší pohyblivost než elektrony, proto při stejných rozměrech vrstev a stejných koncentracích příměsí bude pro tranzistor PNP koeficient α menší než pro tranzistor NPN. Zde je opět vidět, proč se tranzistory PNP příliš nepoužívají – mají horší parametry.

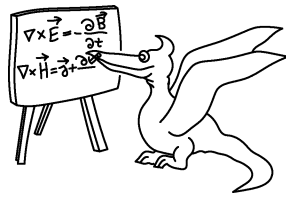
Rozbor provedeme podobný jako při diskusi diodového jevu při změnách teploty. Zde ovšem změnu teploty polovodiče nebudeme uvažovat – sice při vysokých intenzitách se materiál ohřeje (přeměna energie světla na energii elektronů a děr není stoprocentní), ale jevy, o které se zajímáme, se začnou projevovat i při nepatrných osvětleních. Diskutujme změny charakteristik jednotlivých „diod“ v tranzistoru. Osvětlením změníme koncentraci volných nosičů náboje, stejně jako při zvýšení teploty, ovšem nezvýšíme (významný) rozptyl nosičů v látce, takže jednoznačně můžeme říci, že se zvýší vodivost polovodičů. Důsledkem je lepší přiblížení se k ideální diodě. Narozdíl od teplotních změn neměníme v diodové rovnici člen v exponenciále, z tohoto hlediska se diodový jev nezmění. Změní se ovšem zbytkový proud I_0 k vyšším hodnotám, obecně tedy proud diodami roste v propustném i v závěrném směru a to i s přihlédnutím k tomu, že se zmenší vnitřní odpor polovodičových vrstev. Abychom konečně rozhodli, jak se změní funkce tranzistoru, musíme určit změnu parametru (koeficientu) α , jímž se řídí proudové i napěťové zesílení. Jeho velikost závisí na počtu elektronů, které se zachytí v bázi, a to přibližně nepřímo úměrně (viz seriál). Při osvětlení báze se v této tenké vrstvě vytvoří majoritní nosiče, které rozptylují nalétávající nosiče z emitoru a také s nimi rekombinují. Sice nalétává více částic, ovšem v bázi se nosiče generují z celého objemu, negenerují se pouze u kontaktu s vodičem báze. To má za následek účinnější rekombinaci a tím zmenšení parametru α . Tranzistorový jev postupně vymizí.

Pro úplnou diskusi musíme zmínit ještě vliv velikosti zbytkového proudu tranzistorem na osvětlení. Generací nových volných nosičů zvětšíme zbytkový i propustný proud u obou diod a proto se celkový zbytkový proud tranzistorem zvětší. Navíc se každý PN přechod začne chovat jako fotodioda a mezi kolektorem a emitorem se nepatrně změní napětí a navíc se opět výrazně zvýší zbytkový proud.

Technologicky náročný, ovšem z praktického hlediska velmi užitečný, je tranzistor s „okénkem“, kterým se osvětluje přechod kolektor-báze, zatímco přechod emitor-báze zůstane neosvět-

lený. Osvětlený přechod se chová jako fotodioda a celá součástka potom jako fotodioida spojená s tranzistorem, takže není třeba pro velmi citlivý detektor používat dvě, ale pouze jednu součástku.

Tomáš Ostatnický



Seriál na pokračování

Polovodiče v optoelektronice

Doposud byla v seriálu řeč převážně o elektronických aplikacích polovodičů. Není divu — jedná se o velmi populární aplikaci — stále slyšíme oslavné písně na nové „supertechnologie“ z oblasti polovodičové elektroniky, hovoří se o megahertzích, mikrometrech, atp. To je ovšem pouze o křemíku. Druhou, taktéž důležitou aplikací je optoelektronika. Polovodiče mají unikátní vlastnost — mají zakázaný pás se šířkou odpovídající energii optického záření. Proto jsou vhodné k jeho detekci. Viditelné záření se pomocí polovodičů detekuje již mnoho let, výsledkem je CCD technologie — na destičce polovodiče jsou vedle sebe detektory o rozměru mikrometrů, takže např. digitální fotoaparáty jsou dnes schopné pracovat se třemi miliony bodů na jedné destičce polovodiče. V současnosti se výzkum detektorů záření soustřeďuje především na oblast infračervenou, např. pro noční vidění. Polovodiče pro detekci IČ záření nemohou být stejné jako polovodiče používané v CCD technologiích, je třeba mít materiál s menší šířkou zakázaného pásu. Dnes se pracuje s polovodiči III-V resp. II-VI (v elementární buňce krystalu je jeden atom trojmocný a jeden pětimocný, např. GaAs, resp. dvoj a šestimocný, např. CdTe). Krystalová mřížka těchto materiálů není příliš kvalitní, má mnoho poruch a nemá vhodnou strukturu (křemík a germanium mají mřížku stejnou jako diamant, tudíž velmi pevnou), proto není možné z nich vyrábět prvky s vysokou integrací. Navíc v polovodiči pro detekci IČ záření elektrony přecházejí při pokojové teplotě přes zakázaný pás již díky tepelné aktivaci, takže detektor je nutné chladit až na teplotu kapalného dusíku (bod varu dusíku je 63 K).

Detekce světla pochopitelně není jedinou oblastí výzkumu polovodičů v optoelektronice, intenzivně se bádá nad solárními články, aby se zvýšila jejich účinnost, vyvíjejí se prvky pro optické počítače a pro optické komunikace. V tomto dílu seriálu budou zmíněny některé důležité vlastnosti polovodičů ve vztahu k optickému záření. Celá problematika je dosti složitá, proto se omezíme pouze na povrchní diskusi různých jevů a nebudeme se zabývat detaily.

Optická absorpce

Valenční elektrony přecházejí přes zakázaný pás pouze pokud je absorbován foton. Musí platit zákon zachování energie, proto foton musí mít energii $\hbar\omega$, kde ω je kruhová frekvence $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, větší nebo rovnu šířce zakázaného pásu. Ve slabých polích je absorpce lineární, tzn. množství pohlcených fotonů je úměrné intenzitě dopadajícího světla. V silných polích ale dojde ke změně. Elektrony excitované přes zakázaný pás obsazují stavy na dně pásu vodivostního. Zde musíme připomenout něco z prvního dílu seriálu. V polovodiči se sice vytvářejí pásy povolených energií, ovšem v pásech jsou jednotlivé hladiny kvazispojité, tzn. je jich konečný počet. Protože tento počet je velký, běžně se neuvažuje Pauliho vylučovací princip, který má za následek zaplňování hladin, ale v silných elektrických nebo optických polích je obsazování hladin na dně vodivostního nezanedbatelné, takže pro nové elektrony je stále obtížnější nějaký volný stav najít. Tím dochází k saturaci absorpce, tzn. absorpce silně závisí na intenzitě dopadajícího světla tak, že s rostoucí intenzitou klesá. Saturace absorpce se v silných polích projevuje u mnoha látek, v polovodičích má význam pro polovodičovou laserovou techniku a pro optické komunikace obecně, pokud se snažíme zmenšovat polovodičové aktivní prvky (všelijaké vysílače, přijímače, prepínače).

Nelineární optické jevy

Optika, se kterou se člověk běžně setkává, je lineární. To znamená, že látky, se kterými optické záření interaguje, se chovají „normálně“. Mají index lomu nezávislý na intenzitě světla, atd.

Nelineární jevy, kdy parametry materiálu jsou závislé na intenzitě dopadajícího světla, se začínají projevovat až v silných laserových polích, proto není možné setkat se s nimi v běžném životě. Pro fyziku však mají velký význam.

Jednou z významných nelinearit je nelinearita druhého řádu, která je zodpovědná za generování vlny druhé harmonické od vlny dopadající. Posvítíme-li na krystal zářením o frekvenci ω , z krystalu vystupují svazky o frekvenci ω (původní) a 2ω (harmonická). Této vlastnosti se využívá ke generování záření o vysoké energii v modré a UV oblasti, protože sestrojít modrý laser je velmi obtížné nejenom z hlediska vhodných materiálů, ale i kvůli malé účinnosti, která principiálně nemůže překročit určitou hranici. Mnohem výhodnější je použít červený nebo IČ laser ke generování primárního svazku a v nelineárním krystalu se generuje modrý nebo UV svazek.

Z hlediska polovodičů má nelinearita druhého řádu zcela zanedbatelný význam, protože pro generování druhé harmonické se běžně používají dielektrické krystaly (izolanty). Zcela fundamentální význam má ale nelinearita třetího řádu. Jednak vede ke generování třetí harmonické, mnohem významnější je ovšem samoovlivňování indexu lomu. Index lomu materiálu je úměrný intenzitě dopadajícího záření, tudíž laserový svazek si sám moduluje svou dráhu. Důsledkem je deformace vlnoplochy svazku a následně může dojít k samofokusaci nebo samodefokusaci. V původně homogenním materiálu se díky přítomnosti elektromagnetického pole vytvoří čočka, která se chová buďto jako spojná, nebo rozptylná (intenzita pole v laserovém svazku není homogenní, ale největší je uprostřed a směrem ke kraji klesá, stejný profil tudíž bude mít i indukovaný index lomu tvořící čočku). V důsledku toho se svazek fokusuje nebo defokusuje.

Zajímavější je ovšem interakce dvou svazků. V objemu polovodiče spolu dva svazky interferují, vytvoří se interferenční proužky a v místech, kde je intenzita výsledného pole největší, se moduluje index lomu. Tak vznikne difrakční mřížka. Pokud přidáme ještě třetí, podstatně méně intenzivní svazek, bude se na mřížce ohýbat a budeme pozorovat difrakční obrazec, jehož kontrast je úměrný kvalitě mřížky a tedy i velikosti nelinearity. Při užití všech tří svazků o stejné frekvenci dojde k takzvané fázové konjugaci; málo intenzivní svazek se odrazí zpět na dráhu, po které přiletěl, s obrácenou fází, takže de facto dojde u tohoto svazku k inverzi času. Tak sestrojíme jakési zrcadlo, jehož odrazivost může být dokonce větší než 1. Nahradíme laserové svazky optickými pulsy o délce trvání maximálně desetiny pikosekundy. Je zřejmé, že za nelineárními jevy stojí pohyb elektronů a děr s nenulovou hmotností a tudíž i setrvačností v polovodiči, takže nelinearity nekopírují přesně v čase optické pulsy. Zvláště důležité je sledovat, jak nelinearity „dohasínají“ v čase. Dva pulsy nejprve vygenerují v polovodiči mřížku a po nějakém čase na polovodič dopadne puls, který se na mřížce ohýbá. Ze závislosti účinnosti difrakce na zpoždění posledního, sondovacího pulsu, můžeme sledovat, jak rychle nelinearita „dohasíná“, odborně řečeno relaxuje. Kombinací několika měření můžeme říci, jak vypadá rozptyl elektronů na nečistotách, na fononech, atd., je možné velmi podrobně studovat dynamické procesy v polovodiči na úrovni částic a kvazičástic.

Excitony

Až doposud by čtenář mohl nabýt dojmu, že v polovodičové technice není co řešit. Máme elektrony, díry, fonony (tepelné kmity krystalové mřížce), takže všechno se dá krásně popsat. Trochu problémy dělají nelineární jevy ať už modulace indexu lomu, nebo saturace absorpce. Nepříjemnosti nastanou, když si uvědomíme existenci coulombické interakce. Díry jsou kladně nabitě, elektrony záporně. Zcela logicky se musí přitahovat. To právě přináší velké problémy, ale naopak i hezké jevy. Vzpomeňme si na atom vodíku — ten má také kladně nabitě jádro a záporně nabitý elektron. S dírou a elektronem je to úplně stejné, jenom s tím rozdílem, že „jádro“ má menší hmotnost. To ale nevádí po přechodu do těžišťové souřadné soustavy (počátek souřadnic je v těžišti mezi elektronem a dírou), řešení je stejné jako u atomu vodíku. Dostaneme tedy základní 1s stav se zápornou vazebnou energií (tedy pod vodivostním pásem) a pak následují 2s, 2p, ... stavy. Všechny jsou pod dnem vodivostního pásu, zatímco dno odpovídá ionizaci excitonu, tedy odtržení elektronu od díry. Hladiny excitonů se projevují v absorpčním spektru — záření odpovídající energii nějaké hladiny excitonu je silně absorbováno a vytváří se tak spektrální čáry podobně jako u atomu vodíku či jiných plynů. V absorpčním spektru směrem k vyšším energiím fotonů za sérií několika čar následuje spojitý pás absorpce odpovídající mezipásovým přechodům, tedy přechodu přímo do ionizovaného stavu excitonu.

Právě popsané analogy atomu vodíku se nazývají excitony a jsou to opět kvazičástice. Mohou se dokonce srážet s jinými kvazičásticemi, např. fonony, ale i mezi sebou navzájem. Tyto procesy jsou velmi rychlé a až v dnešní době je možné úspěšně provést jejich experimentální prozkoumání, protože je třeba optických pulsů délky řádově desítek femtosekund. Laserové systémy generující tak krátké pulsy jsou dostupné pouze posledních několik let.

Malá zajímavost na závěr části o excitonech: stejně jako atomy vodíku tvoří molekuly H_2 , excitony se také párují a tvoří „molekuly“. Hovoříme o biexcitonech, které mají ještě nižší energii než dvojice volných excitonů.

Luminiscence

Stejně jako elektron může pohltnout foton a přejít do stavu s vyšší energií, může přecházet z energeticky vyššího do základního stavu spolu s emisí fotonu. To lze provést dvěma způsoby. První se nazývá indukovaná emise. Předpokládá foton dopadající na elektron s energií rovnou právě energii fotonu. Elektron přejde do základního stavu a zatímco dopadající foton nezmění směr, polarizaci ani fázi, elektron emituje další foton se stejným směrem, polarizací a fází jako foton dopadající. Na tomto principu indukované emise pracují optické zesilovače a když takový zesilovač zavřeme mezi dvě zrcadla, dostaneme laser.

Druhý možný způsob přechodu elektronu do základního stavu je spontánní emise fotonu. K tomu není třeba žádný asistující foton, po nějaké době se prostě elektron rozhodne, že přejde do nižšího energetického stavu a vyzáří foton. Pokud budeme mít velké množství takových elektronů, nevyzáří všechny elektrony naráz, jedná se o proces náhodný, proto intenzita emitovaného záření bude exponenciálně klesat. Luminiscence je právě spontánní přechod elektronů z vyšší hladiny na nižší. Měření luminiscence sleduje střední dobu, za kterou se vyzáří foton, a dává další informace o dynamice procesů v polovodiči. Experimentálně se měření provádí tak, že pulsem se excitují elektrony v měřené materiálu o předem zvolenou energii a poté se rychlým detektorem sleduje rychlost dohasínání luminiscence, ze které snadno spočteme střední dobu života elektronu na horní energetické hladině.

Závěr

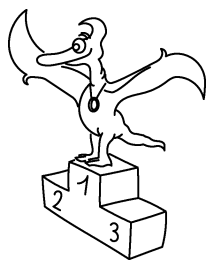
Naskytá se otázka: k čemu ale všechno to měření je? Odpověď by pro laika nebyla snadná, pro člověka s aspoň rámcovými znalostmi problematika je jednodušší. V současnosti se snažíme využívat polovodiče v počítačích, v komunikacích, atd. Narozdíl od minulosti ale není možný inženýrský přístup: prostě to zmenšíme a uvidíme, co se stane. Dostali jsme se co do intenzit polí a rozměrů prvků za hranici, kdy se začnou silně projevat nelineární a kvantové jevy. Abychom zlevnili výrobu součástek, musíme porozumět těmto jevům a teprve na základě jejich znalosti konstruovat konkrétní prvky.

Dalším hnacím motorem je snaha o ověření teorie pevných látek v praxi. Ultrarychlou spektroskopii jsme schopni měřit dynamiku elektronů v pevných látkách; právě dynamiku částic se po celé toto století snaží teoretičtí fyzikové popsat, jenom jim chyběly a stále chybí experimentální metody, které by jejich teorie potvrdily.

Celou dobu byla řeč o polovodičích. To z toho důvodu, že celý seriál je na polovodiče zaměřen, ale i proto, že polovodiče jsou nejjednodušší pevné látky se zakázaným pásem, který má šířku srovnatelnou s energií viditelného záření. Proto s optickým zářením intenzivně interagují. Samozřejmě excitují i jiné látky s podobným zakázaným pásem a i s mnohem zajímavějšími vlastnostmi, např. mnoho organických molekul. Na jejich detailní prozkoumání si ale ještě budeme muset několik desítek let počkat. V současnosti se zkoumají procesy fotosyntézy, které jsou také velmi rychlé, proto se využívá metod ultrarychlé spektroskopie stejně jako u polovodičů. Cílem by mělo být okopírování přírodního vzoru a získávání energie ze slunečního záření.

Úloha VI. S ... *nelinearita třetího řádu*

Nelinearita třetího řádu ve formě změny indexu lomu optickým polem má význam pokud je součin intenzity světla I_{min} a nelineárního koeficientu n_2 řádově větší než 0,005. Určete, jak by musel být velký výstupní výkon kontinuálně pracujícího laseru k překročení uvedené meze pro $n_2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{GW}$ při fokusaci svazku na průměr $50 \mu\text{m}$. Srovnajte vypočtený výkon s výkonem žárovek, zářivek, Slunce, Měsíce a dalších podobných klasických zdrojů záření.



Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	4	3	4	5	5	8	5	34	135
1	Jan	Houštěk	septima	G Pelhřimov	4	3	0	5	6	8	2	28	129
2	Pavel	Augustinský	septima B	G Havřov	4	2	4	3	1	8	4	26	110
3	Jiří	Chaloupka		G Židlochovice	4	3	4	4	0	6	5	26	100
4	Karel	Kouřil	sexta B	G Blansko	4	2	4	4	2	6	0	22	91
5	Jakub	Kulaviak	sexta B	G Blansko	4	3	4	5	5	5	—	26	82
6 - 7	Milan	Berta	IV.A	G Velké Kapušany	2	3	0	6	4	4	0	19	80
6 - 7	Tomáš	Matoušek	VII.C	G Karlovy Vary	4	1	0	4	2	5	3	19	80
8	Stanislav	Hugec		G Michalovce	4	1	4	4	1	2	—	16	74
9	Jan	Houfek	septima	G Uh. Hradiště	4	3	0	3	1	4	—	15	64
10	Ondřej	Novák	oktáva	G Liberec	—	0	0	4	—	4	—	8	52
11	Juraj	Suchár	4.	G Dubnica n. Váhom	—	—	—	—	—	—	—	0	49
12	Tomáš	Linhart	septima	GOA Sedlčany	—	—	—	—	—	—	—	0	38
13	Petr	Schimm	VII.C	G Karlovy Vary	—	0	0	—	0	5	—	5	36
14 - 16	Jiří	Novák	septima	G Ledec	—	—	4	4	—	—	—	8	25
14 - 16	Jan	Novotný	septima	G Mělník	—	—	—	—	—	—	—	0	25
14 - 16	Tomáš	Páleník	4.A	G Trenčín	—	—	—	3	—	6	—	9	25
17 - 18	Andrej	Pavlík	4.D	G Trenčín	—	—	—	—	—	—	—	0	17
17 - 18	Martin	Pieš	4.C	G Košice - Šrobárova	—	—	—	—	—	—	—	0	17
19 - 20	Jan	Gruber	7.A	G Frenštát p. R.	1	0	0	—	0	—	—	1	16
19 - 20	Ondřej	Souček	4.	G Jablonec n. N. - Bal.	—	—	—	—	—	—	—	0	16
21	Petra	Dobroucká	6.BV.		—	0	—	—	—	—	—	0	15
22 - 24	Martin	Benčo			—	—	—	—	—	—	—	0	13
22 - 24	Lenka	Knopová	6.M	G Pardubice	—	—	—	—	—	—	—	0	13
22 - 24	Zbyněk	Šrubař	septima A	G Frenštát p. R.	—	—	0	—	—	—	—	0	13
25 - 26	Marie	Svobodová	septima	G Uh. Hradiště	—	—	—	—	—	—	—	0	12
25 - 26	Martin	Vitikáč	4.B	G Spišská Nová Ves	—	—	—	—	—	—	—	0	12
27	Stanislav	Hampl	septima	GOA Sedlčany	—	—	—	—	—	—	—	0	11
28 - 30	Radek	Chromý		G Telč	—	—	—	—	—	—	—	0	10
28 - 30	Marián	Majerík	4.F	G Trenčín	—	1	—	3	—	2	—	6	10
28 - 30	Petr	Nachtigall	septima A	G Frenštát p. R.	—	—	—	—	—	—	—	0	10
31 - 32	Marek	Rybčák	4.A	G Bardejov	—	—	—	—	—	—	—	0	9
31 - 32	Ondřej	Schmid			—	—	—	—	—	—	—	0	9
33 - 34	František	Kolář	sexta	G Praha - Nad Kavalírkou	—	—	—	—	—	—	—	0	8
33 - 34	Ondřej	Škoda		G Benešov	—	—	—	—	—	—	—	0	8
35	Martin	Macášek	4.	G Dačice	—	—	—	—	—	—	—	0	6
36 - 38	Ondřej	Bačo		G Košice - Šrobárova	—	—	—	—	—	—	—	0	5
36 - 38	Matěj	Koudelka	4.A	SSPŠ Praha - Preslova	—	—	—	—	—	—	—	0	5
36 - 38	Jiří	Krejsa	sexta	G Semily	—	—	—	—	—	—	—	0	5
39 - 41	Lukáš	Florner	5.B	SPŠ Havlíčkův Brod	—	—	—	—	—	—	—	0	4
39 - 41	Miroslav	Šimko	4.A	G Nitra	—	—	—	—	—	—	—	0	4
39 - 41	Naděžda	Vaškovicová	4.A	G Uh. Hradiště	—	—	0	—	—	—	—	0	4
42	Tomáš	Lindouský	4.D	G Nové Zámky	—	—	—	—	—	—	—	0	3
43	Pavel	Lupač		G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	0	1

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>34</i>	<i>135</i>
44 - 49	Anežka	Christovová			—	—	—	—	—	—	—	0	0
44 - 49	Martin	Kozák	septima A	G Klatovy	—	0	—	—	—	—	—	0	0
44 - 49	Pavel	Kučera	5.	OA Příbram	—	—	—	—	—	—	—	0	0
44 - 49	Michal	Štěpán			—	—	—	—	—	—	—	0	0
44 - 49	Dagmar	Uchytlová			—	—	—	—	—	—	—	0	0
44 - 49	Petr	Žejdl	VI.	G Hlučín	—	—	—	—	—	—	—	0	0

Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>34</i>	<i>135</i>
1	Peter	Čendula	3.B	G Liptovský Mikuláš	4	0	0	4	1	6	3	18	112
2	Jan	Kunc	3.A	G Kolín	2	4	5	4	3	10	0	28	89
3	Karel	Žídek	3.E	G Opava	1	3	0	3	3	4	3	17	85
4	Martin	Beránek	VI.	G Praha - Ohradní	4	3	0	4	1	5	4	21	83
5	Petr	Nečesal	V.C	G M. Budějovice	4	3	2	3	4	5	2	23	82
6	Jaromír	Chalupský	sexta A	G Sušice	4	3	4	5	3	4	—	23	80
7	Ondřej	Plašil	septima B	G Praha - Chodovická	4	3	1	5	3	8	5	29	74
8	Vladimír	Fuka	sexta A	G Rakovník	4	—	—	4	—	6	3	17	62
9	Hedvika	Kadlecová	3.C	G Praha - Botičská	1	0	0	3	2	3	3	12	54
10	Pavel	Kočica	3.A	G Uh. Brod	1	1	0	3	0	—	2	7	46
11 - 12	Zoltán	Mics	3.B	G Šahy	3	3	0	4	1	—	2	13	45
11 - 12	Pavol	Mikčo	3.B	G Stropkov	1	0	0	—	0	3	3	7	45
13	Robert	Meixner	5.A	G Brno - Slov. nám.	1	3	0	4	0	—	2	10	43
14 - 15	Martin	Hrba	sexta A	G Sušice	4	3	0	5	3	—	—	15	41
14 - 15	Patrik	Hudec	IV.C	G Bílovec	3	0	—	—	—	8	—	11	41
16 - 17	Zdeněk	Cejnar	3.A	G Říčany	2	0	1	1	0	4	—	8	39
16 - 17	Lukáš	Dumský	sexta	GOA Sedlčany	4	1	2	3	—	5	—	15	39
18 - 19	Petr	Klíma	3.A	G Louny	1	0	0	2	0	5	—	8	36
18 - 19	Jakub	Levic	sexta B	G Louny	—	2	0	5	0	3	2	12	36
20	Lukáš	Schmiedt	3.D	SG Olomouc	2	1	—	1	0	2	—	6	35
21	Pavel	Janda	sexta	G Telč	1	—	0	5	—	—	—	6	33
22 - 24	Martin	Hejna	S3.A	SPŠE Dobruška	—	—	—	—	—	—	—	0	32
22 - 24	Martin	Holík	3.C	G Bílovec	—	3	—	—	—	7	—	10	32
22 - 24	Jan	Kratochvíl	3.K	SPŠST Praha - Panská	—	—	—	—	—	—	—	0	32
25	Ivo	Lazar		G Prachatice	—	—	—	—	—	—	—	0	31
26	Jiří	Tománek	V5.A	G Hranice	—	0	—	4	—	4	3	11	30
27	Dáša	Eisenmannová	3.A	G Praha - Mezi školami	—	0	0	—	—	1	—	1	25
28	Jan	Bauer	sexta A	G Praha - Sladkovského	—	0	0	—	—	4	—	4	20
29	Michal	Bláha	M	SPŠST Praha - Panská	—	0	0	2	0	—	—	2	19
30 - 32	Ladislav	Benda		G Hradec Králové - JKT	—	—	—	—	—	—	—	0	18
30 - 32	Martin	Jakl	5.D	G Pardubice	—	—	—	—	—	—	—	0	18
30 - 32	David	Kolovratník	3.E	SPŠS Chrudim	—	—	—	—	—	—	—	0	18
33 - 35	Ivan	Banas	5.G	G Martin	—	—	—	—	—	4	—	4	17
33 - 35	Miloš	Skalský	3.D	G Vsetín	—	—	—	—	—	—	—	0	17
33 - 35	Michal	Škoda	sexta B	G Turnov	—	—	—	—	—	—	—	0	17
36 - 38	Petra	Adamová	3.A	G Benešov	1	—	0	—	0	4	—	5	16
36 - 38	Jan	Alster	septima A	G Holešov	—	—	—	—	—	—	—	0	16
36 - 38	Pavel	Řezanka	3.C	G Praha - Zborovská	—	1	0	3	0	2	—	6	16
39	Jaroslav	Tykal	3.C	G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	0	15
40 - 41	Jan	Pšikal	3.F	SPŠE Pardubice	—	3	0	—	—	—	—	3	14
40 - 41	Peter	Valachovič	3.B	SPŠ Trenčín	—	0	—	3	—	3	—	6	14
42 - 45	Jiří	Doubek	3.G	G Praha Arabská	—	—	—	5	—	—	—	5	13
42 - 45	Vlastislav	Filgas	3.D	G Vsetín	—	—	—	—	—	—	—	0	13
42 - 45	Jaroslava	Plasová	septima C	G Klatovy	—	—	—	—	—	—	—	0	13
42 - 45	Libor	Tomšík	3.F	SPŠE Plzeň	—	—	—	—	—	—	—	0	13
46 - 47	Jaroslav	Kočíšek	3.C	G Čadca	—	—	—	—	—	—	—	0	11
46 - 47	Martin	Šimek	sexta	G Telč	1	—	—	—	—	—	—	1	11
48 - 50	Petra	Nytrková	V.C	G Frýdek-Místek - ČSA	—	—	—	—	—	—	—	0	10
48 - 50	Andrea	Oravcová	7.D	G Partizánske	0	0	0	—	0	0	—	0	10
48 - 50	Zuzana	Vlčková	septima	G Košice - Alejová	—	—	—	—	—	—	—	0	10
51 - 52	Daniel	Reitzner	3.C	G Košice - Šrobárova	—	—	—	—	—	—	—	0	8

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>34</i>	<i>135</i>
51 - 52	Břetislav	Šopík	3.B	G Žďár n. Sáz.	1	0	0	0	0	5	—	6	8
53 - 58	Michal	Janoušek	sexta	G Zastávka	—	—	—	—	—	—	—	0	7
53 - 58	Pavel	Kolář	3.D	SPŠS Chrudim	—	—	—	—	—	—	—	0	7
53 - 58	David	Krayzel	3.A	G Chrudim	—	—	—	—	—	—	—	0	7
53 - 58	Miroslav	Patočka	3.C	G Ivančice	—	—	—	—	—	—	—	0	7
53 - 58	Martin	Pavel	3.A	G Dobruška	0	—	0	—	—	—	—	0	7
53 - 58	Pavel	Vraspír	sexta	G Polička	—	—	—	—	—	—	—	0	7
59 - 61	Tomáš	Bouda	sexta B	G Jablonec n. N. - Randy	—	—	0	—	—	—	—	0	6
59 - 61	Lukáš	Brázda	3.C	G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	0	6
59 - 61	Ján	Uhrin	3.E	G Michalovce	—	—	—	—	—	—	—	0	6
62 - 64	Andrej	Mičica	3.C	G Čadca	—	—	—	—	—	—	—	0	5
62 - 64	Marek	Skarka	sexta	G Vítkov	—	—	0	—	—	—	—	0	5
62 - 64	Jan	Zikán	3.E	G Praha - Arabská	—	—	—	—	—	—	—	0	5
65 - 66	Ondřej	Pánek	3.C	G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	0	4
65 - 66	Norbert	Požár	7.A	G Bruntál	—	—	—	—	—	—	—	0	4
67 - 68	Martina	Havrdová	VI.A7	G Olomouc - Hejčín	—	—	—	—	—	—	—	0	3
67 - 68	Petr	Hřebačka	6.A	G Brno - Křenová	—	—	0	—	—	—	—	0	3
69 - 70	Hana	Besedová	3.B	G Frenštát p. R.	—	—	—	—	—	—	—	0	1
69 - 70	Michal	Hamran	3.C	G Martin	—	—	—	—	—	—	—	0	1
71	Tomáš	Tetur		G J.G. Mendela Brno	—	—	—	—	—	—	—	0	0

Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>34</i>	<i>135</i>
1	Jan	Fröhlich	6.A	G Praha - Mezi školami	2	0	0	4	3	3	—	12	61
2	Miroslav	Šulc	kvinta B	G Ústí n. L. - Stavbařů	—	—	2	4	3	8	1	18	54
3	Petr	Kavánek	sexta	G Čáslav	—	0	0	4	—	—	—	4	43
4	Miroslav	Frost	kvinta A	G Brno - Elgartova	—	4	1	4	0	—	—	9	34
5	Matej	Dubový	2.B	G Trenčín	—	0	—	3	—	8	—	11	30
6	Michael	Komm	sexta	G Praha - Parlérova	3	1	—	3	0	4	—	11	27
7	Václav	Matouš	2.A	G Klatovy	—	0	0	—	—	—	—	0	25
8	Lenka	Beranová	sexta C	G Klatovy	—	1	—	—	0	5	—	6	23
9	Milan	Jalový	kvinta A	G Blansko	—	—	4	—	—	—	—	4	22
10	Jiří	Vlach	kvinta	GOA Sedlčany	—	1	0	3	—	2	—	6	21
11	Ľuboš	Bednárik	2.F	G Trenčín	—	0	—	3	—	7	—	10	19
12	Jiří	Klímeš	2.B	G Náchod	—	—	—	—	—	—	—	0	17
13 - 15	Michal	Hajn		G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	0	16
13 - 15	Marie	Hůlková	2.B	G Náchod	—	—	—	—	—	—	—	0	16
13 - 15	Stanislav	Páca	2.A	COP Hronov	—	1	0	—	—	2	—	3	16
16 - 20	Otakar	Dokoupil	2.B	G Přerov	—	—	—	—	—	—	—	0	13
16 - 20	Tomáš	Hanzák	2.	G Kladno	—	—	—	—	—	—	—	0	13
16 - 20	Pavel	Kwiecien	2.A	G Dvůr Králové	—	—	0	5	—	—	—	5	13
16 - 20	Karol	Martinka	2.G	G Trenčín	—	—	—	2	—	—	—	2	13
16 - 20	Peter	Murárik	2.G	G Trenčín	—	0	—	—	0	4	—	4	13
21	Jiří	Eliášek	2.B	G Trutnov	—	0	2	—	—	—	—	2	12
22 - 26	Václav	Bouše	6.A	G Praha - Mezi školami	—	3	—	—	0	1	—	4	11
22 - 26	Zdeněk	Čejka		G Praha - U Lib. zámku	—	—	—	—	—	2	—	2	11
22 - 26	Aleš	Ducháč	2.B	COP Hronov	—	—	—	—	—	—	—	0	11
22 - 26	Miroslav	Krůs	2.A	G Klatovy	—	—	0	3	—	—	—	3	11
22 - 26	Karel	Martišek	kvinta A	G Brno - Elgartova	—	2	1	—	—	0	—	3	11
27 - 29	Iva	Kouřilová	2.B	OA Blansko	—	—	—	—	—	0	—	0	10
27 - 29	Jiří	Palek	2.A	G Nové Strašecí	—	—	—	2	—	3	—	5	10
27 - 29	Vít	Urbánek	kvinta B	G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	0	10
30	Eva	Haluzová	2.B	G Uh. Brod	—	—	—	—	—	—	—	0	9
31 - 34	Jan	Beneš	sexta	G Brno - Barvičova	—	0	0	—	—	—	—	0	8
31 - 34	Petr	Křístek	2.C	G Frýdek-Místek - TGM	—	—	—	—	—	—	—	0	8
31 - 34	Martin	Nývlt	2.B	G Náchod	—	—	—	—	—	—	—	0	8
31 - 34	Michal	Zapletal	P2C	G Rožnov pod Radhoštěm	0	0	—	0	—	—	—	0	8

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	4	3	4	5	5	8	5	34	135
35	Lukáš	Hunana	2.B	G Dubnica nad Váhom	—	—	—	—	—	—	—	0	7
36 - 39	Lenka	Blažková	2.B	G Kutná Hora	—	—	—	—	—	—	—	0	6
36 - 39	Matin	Hamrle	2.A	G Pelřimov	—	—	—	—	—	—	—	0	6
36 - 39	Rudolf	Kopřiva	2.C	G Frýdek-Místek - TGM	—	—	—	—	—	—	—	0	6
36 - 39	Mariana	Matýšková	4.B	G Třinec	—	—	0	—	—	—	—	0	6
40 - 42	Ondřej	Chochola		G Kladno	—	—	—	—	—	—	—	0	5
40 - 42	Kateřina	Jandová	sexta A	G Praha - Mezi školami	—	—	—	—	—	—	—	0	5
40 - 42	Ondřej	Srba	II.B	G Příbor	—	—	—	—	—	—	—	0	5
43 - 44	Michal	Kabát	2.A	G Púchov	—	—	—	—	—	—	—	0	4
43 - 44	Tomáš	Sábl		G Semily	—	—	—	—	—	—	—	0	4
45 - 46	Petr	Čech	2.A	G Přerov	—	—	—	—	—	—	—	0	3
45 - 46	Ondřej	Vencálek	4.B	G Frýdek-Místek - ČSA	—	—	—	—	—	—	—	0	3
47	Lenka	Němcová	2.A	SGŠ Bratislava	—	—	—	—	—	—	—	0	2
48	Lenka	Burešová	2.C	G Praha - Zborovská	—	—	—	—	—	—	—	0	1
49 - 50	Jan	Čechmánek	2.A	G Uh. Hradiště	—	—	—	—	—	—	—	0	0
49 - 50	Jindřich	Štáštka	2.E	G Sokolov	—	—	—	—	—	—	—	0	0

Kategorie prvních ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	4	3	4	5	5	8	5	34	135
1	Miroslav	Hejna	5A8	G Rychnov n. K.	4	3	4	5	6	5	4	31	118
2	Petr	Houštěk	tercie	G Pelhřimov	4	3	0	2	3	8	—	20	77
3	Michal	Bareš	kvinta A	G Plzeň - Mikuláš. nám.	—	—	—	—	—	—	—	0	61
4	Luboš	Matásek	kvinta A	G Plzeň - Mikuláš. nám.	—	3	—	4	—	8	—	15	57
5	Václav	Varvařovský	kvinta A	G Plzeň - Mikuláš. nám.	1	3	0	5	0	8	—	17	53
6	Karel	Tůma	kvinta A	G Moravská Ostrava	1	1	0	4	—	4	—	10	42
7	Tibor	Vansa		G Moravská Ostrava	—	—	0	3	3	4	—	10	37
8	Václav	Cviček	3.A	G Frýdek-Místek - ČSA	—	—	—	—	—	—	—	0	31
9	Vít	Šípál	V5.B	G Ústí n. L. - Jateční	—	0	4	3	—	6	—	13	27
10	Petr	Šimek	1.A	G Blansko	—	—	4	2	—	—	—	6	26
11 - 13	Lukáš	Chvátal	5A8.	G Brno - Vejrostova	3	0	—	—	2	—	—	5	21
11 - 13	Jan	Klusoň	kvinta	G Litomyšl	2	3	—	—	0	1	—	6	21
11 - 13	Jaroslav	Kudlička	kvinta A	G Hodonín	—	—	—	—	—	—	—	0	21
14	Ondřej	Honzl	kvinta	G Podbořany	3	—	—	—	—	—	—	3	20
15 - 16	Pavel	Čížek	kvinta		2	—	—	—	0	—	—	2	19
15 - 16	Jan	Chmelař	1.A	G Hranice	—	—	—	—	—	—	—	0	19
17	Zdeněk	Moravec	1.C	G Blansko	—	—	—	—	—	—	—	0	15
18 - 19	Martin	Rybář	kvarta A	G Blansko	1	1	—	0	—	6	—	8	14
18 - 19	Hana	Sucomelová	8.A	ZŠ Trenčín	—	—	—	2	—	6	—	8	14
20	Mária	Šedivá	8.A	ZŠ Trenčín	—	—	—	2	—	6	—	8	13
21	Jiří	Hampl	1.SP	SPŠ Příbram	0	1	0	0	3	1	—	5	12
22 - 24	Pavel	Jež	3.B	G Frýdek-Místek - ČSA	—	—	—	—	0	—	—	0	3
22 - 24	Stanislav	Mlenský	1.B	COP Hronov	—	—	—	—	—	—	—	0	3
22 - 24	Lukáš	Snášel	1.B	COP Hronov	—	—	—	—	—	—	—	0	3
25 - 26	Petr	Hrázský		G Frenštát p. R.	—	—	—	—	—	—	—	0	2
25 - 26	Martin	Vacek	1.A	G Nové Zámky	—	—	—	—	—	—	—	0	2
27	Michal	Záhorák	kvinta	G Sabinov	—	—	—	—	—	—	—	0	1
28	Marek	Mikloš	kvinta	G Sabinov	—	—	—	—	—	—	—	0	0

Naše adresa:

FYKOS

Matematicko-fyzikální fakulta UK — UTF

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

<http://www.mff.cuni.cz/news/fks>

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením vnějších vztahů a propagace MFF UK, je organizován studenty MFF UK za podpory Ústavu teoretické fyziky MFF UK a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.