

**13. ročník, úloha I. 3 ... zahřívání a ochlazování (5 bodů; průměr ?; řešilo 83 studentů)**

Do nádoby s vodou dáme ponorný ohřívač a zapneme jej do zásuvky. Závislost teploty na čase po zapnutí ohřívače vidíme na grafu na obrázku 1. Poté, co teplota dosáhne  $60^\circ\text{C}$  (trvalo to tři minuty), ohřívač vypneme. S pomocí grafu odhadněte, za jak dlouho nádoba s vodou vychladne na  $50^\circ\text{C}$ . A za jak dlouho na  $30^\circ\text{C}$ ? Tepelnou kapacitu a tepelnou setrvačnost ohřívače nevažujte.

Při řešení této úlohy použijeme následující předpoklady: výkon ohřívače ( $P$ ) a tepelná kapacita vody ( $C$ ) jsou konstanty a zanedbáváme vypařování vody. Při ohřívání se jen část dodané energie spotřebuje na ohřátí vody, zbytek unikne do okolí. Označme  $P_z$  ztrátový výkon (je to energie, která unikne do okolí za jednotku času). Platí rovnice

$$Pt - P_z t = C\Delta T,$$

kde  $t$  je čas, za který se voda ohřeje o teplotu  $\Delta T$ .  $P_z$  je přibližně úměrný rozdílu teploty okolí a vody. Při ohřívání z  $20^\circ\text{C}$  na  $30^\circ\text{C}$  je tento rozdíl malý, můžeme si tedy dovolit ztráty v tomto úseku zanedbat ( $P_{z1} = 0\text{W}$ ). Díky tomu odhadneme výkon ohřívače jako

$$P = C \frac{\Delta T_1}{t_1},$$

$\Delta T_1$  a  $t_1$  vyčteme z grafu. Při dalším ohřívání už  $P_z$  zanedbat nelze, řekněme, že v každém z intervalů  $30^\circ\text{C}$  až  $40^\circ\text{C}$ ,  $40^\circ\text{C}$  až  $50^\circ\text{C}$  a  $50^\circ\text{C}$  až  $60^\circ\text{C}$  je  $P_z$  přibližně konstantní, pak platí

$$P_{zi} = P - C \frac{\Delta T_i}{t_i} = C \left( \frac{\Delta T_1}{t_1} - \frac{\Delta T_i}{t_i} \right), \quad i = 2, 3, 4.$$

Když vypneme ohřívač, voda se z  $60^\circ\text{C}$  na  $50^\circ\text{C}$  ochladí výkonem  $P_{z4}$  za čas  $t_4^*$ , z  $50^\circ\text{C}$  na  $40^\circ\text{C}$  výkonem  $P_{z3}$  za  $t_3^*$  a konečně ze  $40^\circ\text{C}$  na  $30^\circ\text{C}$  výkonem  $P_{z2}$  za  $t_2^*$ . Přičemž platí

$$P_{zi} t_i^* = C \left( \frac{\Delta T_1}{t_1} - \frac{\Delta T_i}{t_i} \right) t_i^* = C \Delta T_i, \quad i = 2, 3, 4,$$

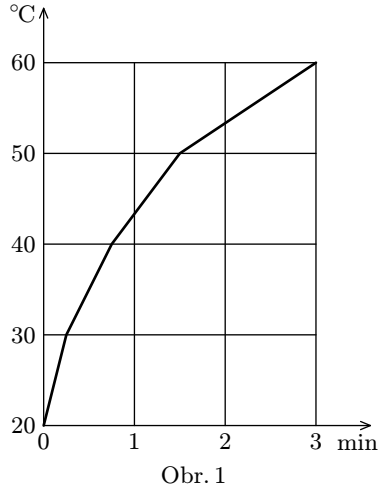
$\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = \Delta T_4 = 10^\circ\text{C}$  a tedy se pokrátí. Po úpravě vyjde

$$t_i^* = \frac{t_1 t_i}{t_i - t_1}.$$

Z grafu vyčteme tyto hodnoty:  $t_1 = 15\text{ s}$ ,  $t_2 = 30\text{ s}$ ,  $t_3 = 45\text{ s}$ ,  $t_4 = 90\text{ s}$ . Po dosazení dostaneme, že na  $50^\circ\text{C}$  se voda ochladí asi za  $t_4^* = 18\text{ s}$  a na  $30^\circ\text{C}$  za  $t_4^* + t_3^* + t_2^* = 70\text{ s}$ .

Ve skutečnosti ztráty v prvním úseku nebudou nulové, tedy skutečný výkon vařiče bude větší, proto i ztrátové výkony budou větší a časy chladnutí kratší.

Někteří úlohu řešili tak, že graf ohřívání otočili kolem osy odpovídající  $40^\circ\text{C}$  a tento považovali za graf chladnutí. Dostali tak odhad  $t_4^* = 15\text{ s}$  a  $t_4^* + t_3^* + t_2^* = 90\text{ s}$ . Ne všichni si ovšem uvědomili, že takto by úloha šla řešit pouze v případě, že by teplota okolí byla  $20^\circ\text{C}$  a voda



by byla ohřívána dostatečně dlouho (aby se ztrátový výkon vyrovnal ohřívacímu) a dostatečně malým výkonem (aby se voda nevypařila).

Další možnost pro ty, kteří umí řešit diferenciální rovnice, je, že předpokládáme  $P_z$  přímo úměrný rozdílu teploty vody a okolí ( $T_0$ ). Vyřešíme rovnici

$$P dt - K(T - T_0) dt = C dT.$$

Je-li  $T_0$  i počáteční teplota vody, vyjde

$$T = \frac{P}{K} \left(1 - e^{-\frac{K}{C}t}\right) + T_0.$$

Konstanty hledáme tak, aby graf v zadání tuto rovnici splňoval. Přibližně vychází  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $P/K = 45^\circ\text{C}$  a  $K/C = \frac{1}{80} \text{s}^{-1}$ . Pro ochlazování řešíme

$$-K(T - T_0) dt = C dT \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{C}{K} \ln \frac{T - T_0}{T^* - T_0},$$

kde  $T^*$  je teplota na počátku chladnutí, tedy  $60^\circ\text{C}$ . Číselně vychází, že ochlazování na  $50^\circ\text{C}$  trvá 23 s a na  $30^\circ\text{C}$  asi 110 s, což je více než v předchozích odhadech.

Těžko ovšem můžeme říci, který z odhadů je nejlepší, neboť o ohřívání a ochlazování nevíme nic bližšího. Nedá se tedy jednoznačně určit, které ze zanedbání, jež jsme provedli, vnáší do výsledku větší chybu.

*Lenka Zdeborová*