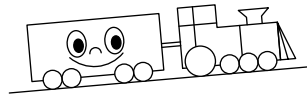


13. ročník, úloha II. 4 ... vláček motoráček (4 body; průměr ?; řešilo 84 studentů)

Železničáři v Lipce mají dlouhou chvíli a hrají si s vagony. Mají k dispozici strašně dlouhý kopec na Kubovu Huť se sklonem 2 % (na 100 m délky stoupne o 2 m). Předpokládáme, že kopec se najednou zvedá z roviny. Roztlačí-li dlouhou soupravu vagonků na rychlost 5 m/s, souprava vyjede částečně na kopec (nevyjede tam celá) a zase sjede dolů. Určete čas, po který bude alespoň jedním kolem na kopci. Celková délka soupravy je 120 m.



Obr. 1

Na vlak působí tíhová síla, ale zpomalení způsobuje jenom tečná složka tíhové síly působící na část vlaku, která je na kopci. Když uvažujeme, že vlak je homogenní, potom pro část vlaku délky x označíme

$$m' = \frac{x}{l} m,$$

kde l je délka vlaku a m jeho hmotnost. Tedy síla působící na vlak, který vyjel do vzdálenosti x na kopci, je

$$F = m' g \sin \alpha = \frac{x}{l} m g \sin \alpha.$$

Když se teď podíváme na vzorec, vidíme, že síla je přímo úměrná výchylce a působí v opačném směru. To značí, že pohyb je harmonický s koeficientem $k = m g \sin \alpha / l$ a periodou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}}.$$

V našem případě však nastane jenom půlka kmitu. Tedy výsledný čas je

$$t = \frac{T}{2} = 77,7 \doteq 78 \text{ s}$$

(za $\sin \alpha$ jsme dosadili 0,02).

Takto bychom dostali výsledný čas kdyby vlak vyjel na kopec jenom částečně. To se pokusíme ověřit ze ZZE.

$$\frac{E_p}{m} = g \frac{l}{2} \sin \alpha = 11,72 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2},$$

tedy kinetická energie $E_k/m = v^2/2 = 12,5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ je o málo větší, proto vlak vyjede na kopec celý. Kdybychom chtěli náš postup výpočtu opravit, tak bychom museli do okamžiku $x = l$ uvažovat harmonický pohyb, poté by však pokračoval pohyb rovnoměrně zpomalený až do bodu, kdy je rychlost nulová. Pak by vlak sjel přesně stejně zpátky. Výsledný čas je přibližně 77,9 s, což je přibližně také 78 s.

Miroslav Kladiiva