13. ročník, úloha IV . 3 ... potápěčova bublina *(4 body; průměr ?; řešilo 67 studentů)*

Potápěč v hloubce 50 m pod ledem vypustí vzduchovou bublinu o poloměru 2 cm. Bublina doplave pod led. Předpokládejte, že se zdeformuje přibližně na pravidelný válec. Určete jaká bude její výška. Vše probíhá za normálního tlaku a teploty 0°C.

Velká bublina zaujme pod ledem zhruba tvar válce, neboť dolní podstava bude z velké časti rovná, na krajích bude sice zakřivená, ale to zanedbáme. Bublina má povrchovou, potenciální tíhovou a tlakovou energii. Systém zaujme takový tvar, aby součet těchto energií byl minimální. Tlakovou energii můžeme považovat za konstantní, neboť výška bubliny bude malá, a tedy tlak vzduchu v ní v dobrém přiblížení stále roven tlaku atmosférickému. Z čehož plyne, že objem bubliny těsně pod ledem bude také konstantní. Potenciální tíhová energie závisí na poloze těžiště a bude se rovnat práci, kterou bychom museli vykonat, abychom kapalinu z objemu bubliny přenesli na povrch, tedy $E_{\mathrm{pot}} = 1/2\, \varrho V g h$.

K určení energie budeme potřebovat velikost povrchu válce v závislosti na h a V. Tento povrch je

$$S = 2\left(\frac{V}{h} + \sqrt{\pi V h}\right).$$

Povrchová energie je, uvažujeme-li, že povrchové napětí mezi ledem a vzduchem je zhruba stejné jako mezi vodou a vzduchem

$$E_{\mathrm{pov}} = 2\sigma\left(\frac{V}{h} + \sqrt{\pi V h}\right).$$

Minimum nastává, když je derivace energie podle výšky rovna nule

$$0 = -\frac{2\sigma V}{h^2} + 2\sigma\sqrt{\frac{\pi V}{h}} + \frac{1}{2}\varrho V g\,.$$

Protože druhý člen je v porovnání s ostatními velmi malý, lze ho zanedbat. Dostaneme tedy

$$h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho g}} \doteq 5{,}5\,\mathrm{mm}\,.$$

Řešení pomocí energií má oproti rozboru působících tlaků jednu nespornou výhodu, energie je totiž v jistém smyslu pojem globální, tedy velikost energie v naší aproximaci bude zhruba stejná jako ve skutečnosti. Tlak je naopak pojmem lokálním, v místech zakřivení by bylo matematicky velmi obtížné s tím počítat, ale zato by výsledek byl přesnější. Aproximace válcem platí jen pro velké bubliny, pro menší nelze uvažovat, že zaujmou takový tvar.

Nejčastějšími chybami bylo neuvážení potenciální energie a chybná interpretace pravidelného válce jako válce s pevně závislými rozměry ($r = v$ nebo $2r = v$). V takovém případě výška bubliny vyšla přes 5 cm. Tento výsledek mohl každý po rozumné úvaze zavrhnout a začít hledat chybu.

Robert Vácha & Lenka Zdeborová & Karel Kolář

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.