

**13. ročník, úloha V. E ... modul pružnosti vlasu** (8 bodů; průměr ?; řešilo 27 studentů)

Změřte periodu torzních kmitů lidského vlasu. Z ní pak určete modul pružnosti vlasu ve smyku. Napovíme vám, že pro krouticí moment síly  $M$  působící na válec délky  $l$  a poloměru  $r$ , který je vyroben z materiálu o modulu pružnosti ve smyku  $G$ , platí vztah  $M = \pi r^4 G \varphi / 2l$ , kde  $\varphi$  je úhel stočení spodní podstavy vůči horní podstavě (zkuste si jej odvodit). Pokud nedisponujete dostatečně dlouhými vlasy, požádejte nějakou dlouhovlasou osobu o darování několika exemplářů a směle se pusťte do měření.

Dílčí části této úlohy bylo možné řešit několika způsoby, postup řešení úlohy jako celku byl však u všech řešitelů přibližně stejný. Základem bylo odvození vztahu pro výpočet modulu pružnosti vlasu ve smyku a naměření potřebných veličin.

Vlas budeme považovat za těleso válcového tvaru délky  $l$  a poloměru  $r$ . Rozdělíme si jej na tenké válcové slupky. Poloměr jedné takové slupky bude  $x$ , kde  $0 < x \leq r$ . Budu-li na tuto slupku působit tečnou silou  $F$ , vyvolám tečné napětí o velikosti  $\tau = F/S$ , kde  $S$  je podstava slupky a ze vztahu pro obsah kruhu snadno odvodíme, že  $S = 2\pi x dx$ . Z Hookova zákona platí pro  $\tau$  také vztah  $\tau = Gx\varphi/l$ , kde  $\varphi$  je úhel natočení horní podstavy vůči dolní a výraz  $x\varphi$  tedy udává vzájemné posunutí těchto podstav.

Pro krouticí moment válcové slupky vůči ose válce  $dM$  platí  $dM = dFx = 2\pi G\varphi x^3 dx/l$ . Pro celý válec potom dostáváme

$$M = \int_0^r dM = \int_0^r \frac{2\pi G\varphi x^3 dx}{l} = \frac{\pi r^4 G\varphi}{2l},$$

což jsme měli ověřit.

Tento moment uděluje závažíčku na konci vlasu zrychlení  $\varepsilon$  a podle 2. věty impulsové  $J\varepsilon = M = -\pi r^4 G\varphi/2l$ . Záporné znaménko je dáno působením momentu proti výchylce z rovnovážné polohy. Dosazením do předchozího vztahu dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\pi r^4 G}{2lJ} \varphi = 0.$$

Jedná se o rovnici harmonických kmitů s úhlovou frekvencí  $\omega = \sqrt{\pi r^4 G/2lJ}$ . Dosazením  $\omega = 2\pi/T$  získáme vztah pro výpočet modulu pružnosti ve smyku

$$G = \frac{8\pi lJ}{T^2 r^4}.$$

Z tohoto vztahu vycházela většina řešitelů. Moment setrvačnosti vypočteme podle vztahu odpovídajícího konkrétnímu tvaru použitého závaží. Délku vlasu  $l$  a periodu kmitů  $T$  měříme klasicky. Měření tloušťky vlasu se vyskytlo jako samostatná úloha v jednom z předchozích ročníků našeho semináře. Ve vzorovém řešení je popsáno několik postupů, které zde nebudeme opakovat. Jedná se například o metodu přímého měření, kapkovou metodu, namotávání na špejli, nebo difrakci v laserovém svazku. Většina z vás využila některé z těchto možností i nyní.

Při měření jsme použili válcové závaží o známé hmotnosti, k němuž jsme izolepou upevnili vlas tak, aby osa otáčení procházela osou válce. Pro moment setrvačnosti závaží v tomto případě platí  $J = mr_z^2/2$ , kde hmotnost závaží  $m = 10$  g. Z několika měření posuvným měřidlem jsme určili poloměr závaží  $r_z = (5,0 \pm 0,1)$  mm. U hmotnosti závaží neuvažujeme žádnou chybu a zanedbáváme také hmotnost izolepy.

Tloušťku vlasu jsme určili pomocí mikroskopu s kalibrovanou mikrometrickou stupnicí. Provedli jsme několik měření průměru v různých částech vlasu, z nichž jsme obdrželi poloměr  $r = (43 \pm 7) \mu\text{m}$ . Při tomto měření jsme neuvažovali deformaci vlasu při jeho zatížení.

Periodu kmitů jsme stanovili při dvou různých délkách vlasu  $l_1 = (9,6 \pm 0,1) \text{ cm}$  a  $l_2 = (29,9 \pm 0,1) \text{ cm}$ , změřených pomocí pásového měřidla. Stopkami určíme trojnásobek periody, získané hodnoty jsou uvedeny v tabulce. Z nich jsme spočetli  $T_1 = (9,86 \pm 0,27) \text{ s}$ ,  $T_2 = (17,7 \pm 0,4) \text{ s}$ .

1. měření: 3 $T_1$ [s]	30,2	28,7	29,5	30,4	29,6	29,0
2. měření: 3 $T_2$ [s]	52,7	51,3	54,2	53,8	54,0	52,9

Chyby  $s$  veličin měřených vícekrát spočteme jako  $s = \sqrt{3s_{\text{sm}}^2 + s_{\text{sys}}^2}$ , kde  $s_{\text{sm}}$  je směrodatná odchylka a  $s_{\text{sys}}$  je systematická chyba, kterou odhadneme. Chybu měření délky vlasu jsme odhadli z přesnosti odčítání na stupnici měřidla. Celkovou chybu  $G$  potom dostaneme jako

$$\delta G = \sqrt{(2\delta T)^2 + (4\delta r)^2 + (\delta l)^2 + (2\delta r_z)^2},$$

kde  $\delta x$  označuje relativní chybu veličiny  $x$ .

Ze dvou výše uvedených měření dostaneme dvě hodnoty  $G$ , jejichž průměr je  $G = (8,9 \pm 4,7) \cdot 10^8 \text{ Pa}$ . Chyba je dána především chybou měření poloměru vlasu. Získaný výsledek není možné srovnat s tabulkovou hodnotou, ale ve svých řešeních jste se převážně dopracovali k hodnotám řádu ( $10^8$ – $10^{10}$ ) Pa.

**Libor Sedláček**