13. ročník, úloha VI . 1 ... brouček *(4 body; průměr ?; řešilo 28 studentů)*

Brouček o hmotnosti m stojí na obruči o hmotnosti M a poloměru r, tato obruč leží na absolutně hladkém vodorovném stole. Náhle se brouček něčeho lekne a dá se do běhu. Poběží po obruči. Vaším úkolem je popsat trajektorii středu obruče (za předpokladu nulového tření mezi obručí a stolem).

Vyjdeme z 1. Newtonova zákona, který říká, že soustava, na kterou nepůsobí žádné vnější síly, setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Naše soustava byla na začátku v klidu, proto těžiště musí v klidu zůstat i po tom, co se brouček rozběhne. Když si umístíme počátek souřadné soustavy do těžiště, platí

$$m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2 = 0\,, \tag{1}$$

kde m je hmotnost broučka, M je hmotnost kruhu, $\boldsymbol{r}_1$ je poloha broučka a $\boldsymbol{r}_2$ je poloha středu kruhu. Dále víme, že vzdálenost broučka od středu kruhu je $r = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$. Dosadíme z (1)

$$r = \left|\boldsymbol{r}_2 + \frac{M}{m}\,\boldsymbol{r}_2\right| = \frac{M+m}{m}\,r_2\,.$$

Vidíme tedy, že vzdálenost středu kruhu od těžiště je konstantní, tedy střed obruče bude opisovat nějakou část kruhu. Jakou, to zjistíme, když si napíšeme zákon zachovaní momentu hybnosti (ZZMH) a hybnosti (ZZH).

$$I\omega + mr_1v_1 + Mr_2v_2 = 0\,, \tag{2}$$

$$m\boldsymbol{v}_1 + M\boldsymbol{v}_2 = 0\,. \tag{3}$$

Z (3) vidíme, že $v_1 \sim v_2$. Z toho a z (2) vidíme, že $\omega \sim v_1$, tedy ω bude konstantní. Takže kroužek bude obíhat s konstantní úhlovou rychlostí. Ještě je otázka, zda tato rychlost nebude nulová. To ověříme velice jednoduše ze ZZMH. Kdyby byla nulová, to znamená, že by střed kroužku stál, což ze ZZH znamená, že rychlost broučka vůči stolu by byla nulová, a točil by se jedině kroužek, to je však z rozporu z ZZMH. Výsledek je, že se střed obruče pohybuje po kružnici.

Miroslav Kladiva

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.