

13. ročník, úloha VI. 2 ... odporová síť (3 body; průměr ?; řešilo 32 studentů)

Mějme drát, jehož jednotka délky má odpor R . Z rovnostranných trojúhelníků z něj vyrobených postavíme nekonečnou síť naznačenou na obr. 1 (nejdelší strana má jednotkovou délku). Jaký odpor bude mezi vrcholy největšího trojúhelníku?

Pro co největší zjednodušení využijeme symetrie. Podíváme-li se na uzel nacházející se mezi body A a B, zjistíme, že proud, který do něj vteče jednou větví, celý vyteče větví k této větví symetrické. Můžeme tedy tento uzel rozpojit na dva. Tím získáme zapojení, ve kterém se nachází obvod, který je podobný počátečnímu zapojení, jen je dvakrát menší. Protože bude mít stejnou vodivost, bude jeho odpor R_z poloviční než odpor celého zapojení.

Odpor celého zapojení již spočteme jednoduše pomocí pravidel pro sčítání odporů. Pro celkový odpor bude platit

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + RR_z/(R + R_z)} = \frac{2R + 3R_z}{R^2 + 2RR_z}.$$

Dosadíme-li nyní ze vztahu $2R_z = R_{AB}$ dostaneme rovnici

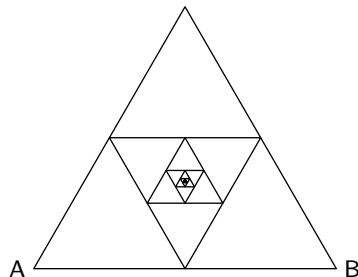
$$3R_{AB}^2 + 2RR_{AB} - 2R^2 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má řešení

$$R_{AB} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3} R.$$

Smysl má pouze kladný výsledek, tedy

$$R_{AB} = \frac{\sqrt{7} - 1}{3} R.$$



Obr. 1

Karel Honzl