Zadání II. série

Termín odeslání: 4. prosince 2000

Milí řešitelé,

držíte v rukou zadání druhé série úloh 14. ročníku Fykosu. Připomeňme na tomto místě několik důležitých organizačních záležitostí:

Řešení úloh 1. série s průběžnou výsledkovou listinou dostanete se zadáním 3. série začátkem prosince. Pokud jste 1. sérii neřešili, není nic ztraceno, můžete se zapojit i nyní.

Aby pravděpodobnost, že pošta doručí vaše řešení až k nám, byla co největší, je vhodné posílat řešení doporučeně. Každému, kdo nám pošle (třeba e-mailem) svůj e-mail, budeme vždy poté, co nám od něj dojde řešení, posílat krátkou zprávu, ve které potvrdíme, že řešení skutečně došlo. Předejde se tak nepříjemným překvapením, neboť jinak řešitel zjistí ztrátu svého řešení až ve výsledkové listině.

Pokud sledujete pravidelně webovské stránky FYKOSu, tak jste si jiste všimli jejich nové grafické úpravy. Doufáme, že tato změna přispěje k jejich větší přehlednosti.

Jan Prokleška

Úloha II . 1 ... ***lampa na hladině***

Jdete večer kolem řeky šířky L. Na protějším břehu stojí lampa ve výšce h nad hladinou řeky. Když se podíváte na hladinu, uvidíte na vodě obraz lampy. Je-li hladina rozčeřená, tento obraz se "rozmaže". Určete úhlovou šířku a délku pod jakou tento útvar vidíte. Předpokládejte, že vaše oči jsou ve stejné výšce nad hladinou jako lampa. Zčeřenou hladinou rozumíme vlnky s maximálním náklonem α ve všech směrech a výškou zanedbatelnou vůči h.

Úloha II . 2 ... ***skoky do nebe***

Ze střechy 10 m vysokého domu pouštíme s nulovou počáteční rychlostí gumové míčky na chodník. Míčky jsou všechny stejně velké, mají však hodně rozdílné hmotnosti. Do jaké maximální výšky může některý z míčků vyskočit, máme-li jich k dispozici a) 2, b) n. Všechny rázy považujme za dokonale pružné, veškeré odpory prostředí zanedbejme.

Úloha II . 3 ... ***šroubovice***

Mějme nekonečný drát stočený do pravotočivé šroubovice (helixu). Drát je rovnoměrně nabitý a osa helixu je totožná s osou z. Do vzniklého pole pošleme nabitou částici (drát je tenký, takže do něj částice nenarazí). V jistém časovém okamžiku známe její p_z a L_z, tedy z-ové komponenty hybnosti a momentu hybnosti. Můžeme v jiném okamžiku určit p_z, známe-li v tomto okamžiku L_z?

(Problém lze vyřešit zcela exaktně. Naproti tomu není určitě nezajímavé zkusit situaci počítačově simulovat a dostat tak hledanou závislost v podstatě experimentálně, v případě ověřit teoretickou předpověď.)

Úloha II . 4 ... ***the wall***

Kolmo proti stěně je postavený reproduktor, který vydává zvuk, jehož frekvence rovnoměrně roste v čase. Mezi stěnou a reproduktorem je pozorovatel. Co uslyší?

Úloha II . P ... ***problémovka z vody***

O prázdninách byli někteří organizatoři Fykosu sjíždět Vltavu a při této příležitosti je napadlo několik problémků, se kterými by od vás potřebovali poradit.

a) Za jak dlouho doteče voda z Českého Krumlova do Prahy?

b) Na jakou stranu alumatky (hliníkové karimatky, která má z jedné strany hliníkovou fólii a z druhé izolační pěnu) je výhodné si lehnout?

c) Jak se v makarónech dělají díry?

Úloha II . Exp ... *zvuk*

Změřte rychlost zvuku ve vzduchu.

Seriál na pokračování

Kapitola 2: Kmity

V tomto díle seriálu se budeme zabývat systémy v rovnováze, které mají tendenci se při vychýlení do této polohy vracet (říká se tomu stabilní rovnováha). Díky silám, které tento návrat způsobují, se však soustava po vychýlení v rovnováze většinou nezastaví, ale začne kolem ní oscilovat. S takovými systémy se setkáváme takřka na každém kroku, a vlastně velká část fyziky zkoumá jen různé druhy těchto systémů.

Pohybová rovnice kmitů

My se budeme zabývat jen takovými soustavami, jejichž konfiguraci lze popsat jedinou souřadnicí. Učebnicovým příkladem je závažíčko zavěšené na pružince. Při vychýlení z rovnovážné polohy o x působí pružinka na závažíčko silou $F = -kx$ (viz minulý díl). Pohybová rovnice má po úpravě tvar

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \tag{1}$$

kde $\omega^2 = k/m$. Uvidíte-li kdykoliv při vašem fyzikálním bádání rovnici podobnou této, *JÁSEJTE* !

Tato rovnice, která se nazývá *rovnice harmonických kmitů*, má totiž velmi jednoduché řešení, závislost výchylky x na čase je

$$x = A \ \sin{(\omega t + \gamma)} \ , \tag{2}$$

kde A a γ jsou konstanty závisející na počátečních podmínkách. Veličina ω má rozměr rad·s^{-1} a nazývá se *úhlová frekvence*. O tom, že (2) je řešením rovnice (1) se lze přesvědčit dosazením[1]). Na obr. 1 je znázorněna časová závislost výchylky (plná čára) společně s rychlostí (čárkovaná čára) a zrychlením (tečkovaná čára), platí

Obr. 1. Závislosti x, v, a na t.

$$v = \dot{x} = \omega A \ \cos{(\omega t + \gamma)} \ , \tag{3}$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \ \sin{(\omega t + \gamma)} \ .$$

Příklad 4: Jaká bude perioda kmitů vodní hladiny v duté trubici tvaru písmene „U“ ?

V rovnováze je hladina v obou částech trubice ve stejné výšce. Označme x vychýlení hladiny z této polohy. Celý vodní sloupec pak do rovnováhy vrací síla $F = -2Sx\varrho g$, kde S je průřez trubice. Pohybová rovnice pro sloupec vody je $ma = -2Sx\varrho g$. Označíme l délku sloupce, pro jeho hmotnost lze psát $m = Sl\varrho$, po dosazení dostáváme

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0$$

a můžeme jásat. Úhlová frekvence těchto kmitů je $\omega = \sqrt{2g/l}$, z čehož pro periodu dostáváme $T = 2\pi/\omega = \pi\sqrt{2l/g}$.

[1]) K tomu je třeba umět derivovat. Kdo to ještě neumí, nechť nahlédne např. do knížečky Matematika a řešení fyzikálních úloh od Z. Ungermanna (knihovnička FO), nebo do učebnic matematiky pro 4. ročník gymnázia. Určitě se vám to ještě bude (nejen) při čtení seriálu hodit.

Energie kmitů

Podíveme se nyní na energetickou bilanci pro případ závažíčka na pružince. Kinetická energie závaží je $E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Potenciální energie pružiny je rovna práci, kterou musíme vykonat, abychom závažíčko vychýlili do polohy x. Tato práce je rovna obsahu plochy pod grafem závislosti síly na výchylce $F' = kx$, tedy $E_p = \frac{1}{2}kx^2$. Protože jsme zatím nevzali v úvahu žádné energetické ztráty, měl by platit zákon zachování mechanické energie. Ověřit ho lze výpočtem celkové energie $E_{\mathrm{celk}} = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2)$, kde za x a $\dot{x}$ dosadíme ze vztahů (2) a (3). To nám napovídá další důležitý vztah mezi rychlostí a výchylkou kmitavého pohybu:

$$\omega^2 x^2 + \dot{x}^2 = \mathrm{konst.} \tag{4}$$

Platnost posledního vzorečku nám zejména u složitějších soustav dává možnost elegantněji hledat ω. Nejlépe si to ukážeme na příkladu.

Příklad 5: Nalezněte úhlovou frekvenci kmitů soustavy na obr. 2. Tyč je homogenní a má hmotnost m, obě pružiny mají tuhost k.

l k

k $l/2$

Obr. 2

Vzhled soustavy je popsán jedním parametrem – úhlovou výchylkou z vodorovné polohy (pružiny jsou nastaveny tak, aby vodorovná poloha tyče byla rovnovážná). Maximální výchylku označíme A, maximální úhlovou rychlost (při průchodu rovnovážnou polohou) označíme Ω. Protože při maximální kinetická energie nulová a naopak, můžeme ZZE psát ve tvaru

$$\frac{1}{2}J\Omega^2 = E_{k,\max} = E_{p,\max} = \frac{1}{2}k\,(Al)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{Al}{2}\right)^2 .$$

Z (4) plyne $\omega = \Omega/A$, tento podíl vyjádříme z předchozího vztahu, ve kterém dosadíme $J = \frac{1}{3}ml^2$. Výsledek je

$$\omega = \sqrt{\frac{15k}{4m}} .$$

Fyzické kyvadlo

Fyzickým kyvadlem rozumíme tuhé těleso, které se může volně otáčet kolem osy o neprocházející těžištěm T. Sestavme pohybovou rovnici pro kiwi takového tělesa. Za parametr popisující polohu tělesa volme opět úhlovou výchylku z rovnovážné polohy a označme ji φ. Vzhledem k ose o je těleso vraceno do rovnováhy momentem tíhové síly $M = -mgd\sin\varphi$, kde d je vzdálenost těžiště T od osy o. Podle 2. impulsové věty[2]) způsobuje tento moment úhlové zrychlení $\varepsilon = \ddot{\varphi} = M/J$, kde J je moment setrvačnosti tělesa kolem osy o. Pohybová rovnice má tedy tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{J}\sin\varphi = 0 .$$

Toto je rovnice tvaru $\ddot{\varphi} + f(\varphi) = 0$, zde konkrétně je $f(\varphi) = (mgd/J)\sin\varphi$. Taková rovnice nemá narozdíl od (1) obecně jednoduché řešení. Přesto se ji pokusíme řešit alespoň pro malé výchylky. Aby soustava měla pro $\varphi = 0$ stabilní rovnovážnou polohu, musí být $f(\varphi)$ v nule nulová, pro kladné výchylky kladná a pro záporné záporná. Tuto funkci většinou lze nahradit funkcí $f^*(\varphi) = \omega^2\varphi$, která pro malá φ dává přibližně stejné hodnoty jako $f(\varphi)$, a to tím přesněji, čím je φ bližší nule. Nejlepší možností je, když volíme $\omega^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ v bodě $x = 0$, což je ostatně vidět i z grafů obou funkcí.[3]) Dosadíme-li do pohybové rovnice místo $f(\varphi)$ funkci $f^*(\varphi)$, dostáváme již rovnici harmonických kmitů s úhlovou frekvencí ω.

Konkrétně pro fyzické kyvadlo nahradíme funkci $\sin\varphi$ funkcí φ a pro úhlovou frekvenci dostáváme

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}} .$$

[2]) Je to analogie 2. Newtonova zákona pro otáčivý pohyb.

[3]) Derivace funkce v bodě x je směrnicí tečny k jejímu grafu v tomto bodě.

Notoricky známý vztah pro periodu matematického kyvadla dostaneme dosazením $J = md^2$.

Na závěr tohoto dílu se zmíníme o tom, jak moc přesná je výše uvedená aproximace. Při přesném výpočtu se zjistí, že perioda závisí na amplitudě výchylky, pro malé výchylky ovšem náš přibližný vztah platí celkem přesně, pro rozkmit 5° se vypočtená a skutečná perioda liší asi jen 0,05%. Jakkoliv se to zdá málo, kyvadlové hodiny, které bychom zkonstruovali podle tohoto vztahu, by se za den zpožďovaly o necelou minutu. Pokud tento efekt uvážíme a chceme, aby hodiny šly s přesností 1 s/den a amplituda byla asi 5°, musíme ji nastavit s přesností 0,06°.

Úloha II . S ... *kmity*

a) Určete periodu kmitů soustavy na obr. 3. Tyčka je nehmotná.

b) Mějme dvě stejná závažíčka hmotnosti m spojené vláknem, které prochází dírou ve stolu (viz obr. 4). Závažíčko na stole obíhá bez tření kolem díry ve vzdálenosti r od ní tak, že soustava je v rovnováze. Zjistěte, co se bude dít, zatáhneme-li nepatrně za visící závaží.

c) Co má společného kiwi s kyvy?

m

k l k

l

Obr. 3

r

m

m

Obr. 4

Naše adresa:

FYKOS
Matematicko-fyzikální fakulta UK — ÚTF
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8
http://www.mff.cuni.cz/news/fks

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením vnějších vztahů a propagace MFF UK, je organizován studenty MFF UK za podpory Ústavu teoretické fyziky MFF UK a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.