Zadání III. série

Termín odeslání: 8. ledna 2000

Milí řešitelé,

konečně dostáváte do rukou autorská řešení první série Fykosu společně se svými opravenými úlohami. Na konci brožurky najdete výsledkovou listinu. Je možné, že některé vaše údaje ve výsledkové listině nesouhlasí se skutečností nebo jsou neúplné. Pošlete nám tedy doplňující informace s řešením další série. Dejte pozor na to, abyste svá řešení posílali včas a správně ofrankovaná.

Řešitelé předchozích ročníků si jistě všimli několika drobných změn. U vzorového řešení je u zadání uveden navrhovatel a původ úlohy, u autora řešení je nově i email pro případné konzultace.

Novinkou ve výsledkové listině je sloupeček s vaší procentuální úspěšností. Udává, kolik procent bodů jste získali z úloh, které jste řešili.

Přejeme vám všem krásné Vánoce a úspěšný nový rok 2001.

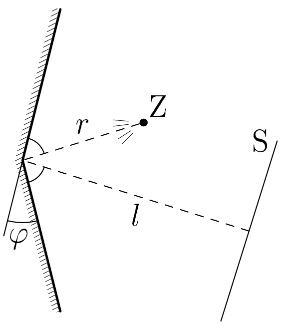
Organizátoři Fykosu

Úloha III . 1 ... *rotující koule*

Nad vodorovnou podložkou se nachází homogenní koule o poloměru R, která rotuje úhlovou rychlostí ω_0 kolem vodorovné osy. Jakou rychlostí v_0 ji musíme vrhnout ve vodorovném směru kolmém na osu rotace, aby se po sérii dopadů na podložku zastavila? Valivý odpor je nulový, nikoliv však smykové tření.

Úloha III . 2 ... *interference na zrcadlech*

Mějme bodový zdroj (Z) monochromatického světla umístěný přede dvěma rovinnými zrcadly (obr. 1). Vzdálenost zdroje od bodu dotyku zrcadel je r a vzdálenost tohoto bodu od stínítka (S) je l. Na stínítku se zobrazují světlé a tmavé proužky. Dva sousední světlé proužky jsou od sebe ve vzdálenosti d. Spočtěte úhel φ mezi zrcadly, můžete předpokládat, že je velmi malý. Předpokládejte též, že ze zdroje nedopadá žádné světlo přímo na stínítko.



Obr. 1

Úloha III . 3 ... *dnem vzhůru*

Ve velké nádobě s vodou je částečně ponořena dnem vzhůru válcová sklenice. Hladina vody v nádobě i ve sklenici je stejná a je vzdálena $l = 10\,\mathrm{cm}$ ode dna sklenice. Teplota vzduchu je $t_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ a atmosférický tlak je $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$. O jakou výšku h stoupne hladina vody ve sklenici, jestliže se teplota sníží o $\Delta t = 10\,^\circ\mathrm{C}$ a tlak stoupne o $\Delta p = 2{,}0\,\mathrm{kPa}$?

Úloha III . 4 ... *výpar vody*

Za jak dlouho se vypaří voda ze sklenice o výšce $h = 10\,\mathrm{cm}$ za normálních podmínek? Předpokládejte, že vlhkost vzduchu těsně nad hladinou je neustále 99%.

Úloha III . P ... *občasný pramen*

Na Slovensku ve Slovenském krasu je zajímavý pramen. Většinu času tento pramen vypadá, jako by byl vyschlý, a potom z něj najednou začne po nějakou dobu vytékat voda, a poté opět nic. Toto se stále opakuje. Jednotlivé intervaly jsou docela pravidelné (a dlouhé). Jak to funguje?

Úloha III . Exp ... *kapacita člověka*

Změřte co nejvíce zdraví neohrožujícími způsoby elektrickou kapacitu člověka.

Řešení I. série

Úloha I . 1 ... *levitace* *(4 body, řešilo 118 studentů)*

Představme si, že elektrický náboj zeměkoule začne najednou z ničeho nic růst. To znamená, že i vy se začnete nabíjet. Může to dojít tak daleko, že coulombovská síla vyrovná gravitační a vy se odlepíte od Země. Vysvětlete, proč není možné, aby se různě velká tělesa stejné hustoty odlepila ve stejný okamžik. Pro zjednodušení uvažujte, že všechna tělesa mají tvar koule.

Navrhl Miroslav Kladiva na motivy jedné ruské sbírky z fykosí knihovničky.

Těleso se začne vznášet právě v okamžiku, kdy se vyrovná působení přitažlivé gravitační síly a odpudivé elektrické síly. Aby se začala vznášet všechna tělesa v jeden okamžik, musely by se tyto síly vyrovnat pro všechna tělesa zároveň. Pro gravitační sílu působící na těleso platí:

$$F_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g \ . \tag{1}$$

Nyní určíme, jak závisí odpudivá elektrická síla na poloměru tělesa. Země a těleso tvoří dohromady vodivou soustavu, na které se náboj rozloží tak, aby ve všech místech byl stejný potenciál, a tedy intenzita kolmá k povrchu. Protože Země je mnohem větší než těleso, můžeme ji nahradit rovinou. Potřebujeme zjistit, jak se rozložení náboje na takové soustavě mění s poloměrem tělesa. Předpokládejme, že pro určité r_0 víme, jaká je v každém místě soustavy plošná hustota náboje σ, ve velké vzdálenosti od tělesa se velikost plošné hustoty náboje bude blížit hodnotě σ_0. Pokud pro každé místo na povrchu soustavy Země–těleso známe σ, můžeme spočítat elektrickou intenzitu v libovolném bodě pomocí vztahu:

$$\boldsymbol{E} = \int\limits_{(S)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\ \mathrm{d}S \ , \tag{2}$$

což není nic jiného než Coulombův zákon pro spojitě rozložený náboj. Integruje se přes celou soustavu Země–těleso.

Zjistíme nyní, jak se změní rozložení náboje, pokud změníme k-krát všechny rozměry soustavy. Náboj se zřejmě rozloží jediným způsobem. Rozloží-li se tak, že v odpovídajících si místech této a nezměněné soustavy bude plošná hustota náboje stejná, bude v odpovídajících si místech i stejná intenzita, to přímo plyne ze vztahu (2). Intenzita bude tedy opět všude kolmá na povrch a náboj se proto rozloží přesně tímto způsobem.

Síla působící na těleso se určí pomocí vztahu:

$$\boldsymbol{F} = \int\limits_{(T)} \sigma \boldsymbol{E}\ \mathrm{d}S \ , \tag{3}$$

kde se integruje přes celé těleso. Jediné na co má v tomto vztahu změna všech rozměrů vliv, je dS (vzroste k^2-krát), protože $\boldsymbol{E}$ i σ v odpovídajících si místech jsou stejné. Odpudivá síla tedy roste s druhou mocninou poloměru, zatímco přitažlivá roste s třetí, z toho už je vidět, že se nemohou odlepit všechna tělesa zároveň, protože rovnice typu $Ar^2 = Br^3$ nejde splnit pro všechna r zároveň (pokud se A i B zároveň nerovnají nule, což není náš případ).

Karel Kouřil & Karel Kolář
kkouril@centrum.cz

Úloha I . 2 ... *kondenzátor v kapalině* *(5 bodů, řešilo 51 studentů)*

Do kapalného dielektrika jsou svisle ponořeny dvě čtvercové paralelní vodivé desky o straně a. Nejsou-li desky nabity, vystoupí hladina mezi deskami do výšky h_0 (měřeno od dolního okraje desek). O jakou vzdálenost Δh se zvýší hladina kapaliny mezi deskami, nabijeme-li desky na napětí U? Permitivita kapaliny je ε, hustota je ρ a vzdálenost desek je d ($d \ll a$).

Jan Prokleška se inspiroval sbírkou úloh Příklady z elektřiny a magnetismu.

Tato úloha byla asi nejsnáze řešitelná přes energie. Jedna z definic rovnováhy je, že se systém ustálí v takové poloze, v níž je jeho celková potenciální energie minimální.

V případě nenabitého kondenzátoru působí na kapalinu ve vertikálním směru tíhová a kapilární síla, které způsobí ustálení hladiny ve výšce h_0. Kapilární jevy závisí pouze na kolmém průřezu „kapiláry“, hustotě a povrchovém napětí, a ty se v našem případě nemění (zanedbáme-li změnu teploty způsobenou průchodem proudu). Dále tedy kapilární sílu nemusíme uvažovat.

Předpokládejme, že po připojení zdroje se kondenzátor nabije rychleji, než se hladina stačí pohnout. Při nabíjení se jistá část energie ztratí na odporech vodičů a zdroje. Od okamžiku, kdy je kondenzátor nabitý, již ale k žádným ztrátám energie nedochází, protože je napětí na vodičích nulové. Můžeme tedy spočítat celkovou potenciální energii systému, která bude součtem tíhové potenciální energie kapaliny, energie nabitého kondenzátoru a energie zdroje.

Tíhová energie je rovna tíze vystouplé kapaliny násobené výškou jejího těžiště nad místem, v němž zvolíme nulovou hladinu této energie. Nejjednodušší pro výpočet je volit nulovou hladinu ve výšce h_0. Kapalina zaujímá objem tvaru kvádru, a má tedy hmotnost $m = \varrho V = \varrho da\Delta h$. Poloha těžiště je v polovině výšky Δh, odtud

$$E_G = \frac{1}{2}\varrho dag(\Delta h)^2 \ .$$

Elektrostatická energie kondenzátoru se spočítá dle vztahu $E_C = CU^2/2$. Kondenzátor je tvořen dvěma nabitými deskami, mezi nimiž je v části kapalina a v části vzduch. Zanedbáme-li vzájemné ovlivňování kapaliny a vzduchu jako dielektrik, můžeme si kondenzátor představit jako paralelní spojení kondenzátoru s kapalným dielektrikem a vzduchového kondenzátoru. Plocha kondenzátoru s kapalinou je $a(h_0 + \Delta h)$, plocha kondenzátoru se vzduchem je $a\,(a - h_0 - \Delta h)$. Pro kapacitu kondenzátoru s dielektrikem o permitivitě ε, plochou S a vzdálenostmi desek d platí $C = \varepsilon S/d$ (za předpokladu, že jsou rozměry desek hodně větší než jejich vzdálenost). Protože kapacita paralelního spojení dvou kondenzátorů je rovna součtu jejich kapacit, je celková kapacita našeho kondenzátoru rovna

$$C = \varepsilon\,\frac{a(h_0 + \Delta h)}{d} + \varepsilon_0\,\frac{a\,(a - h_0 - \Delta h)}{d} = \frac{a\,(h_0 + \Delta h)\,(\varepsilon - \varepsilon_0) + a^2\varepsilon_0}{d} \ .$$

Energie zdroje je rovna součinu napětí a kapacity zdroje. (Kapacita zdroje je náboj, který je zdroj schopný přenést, na akumulátorech bývá uvedena v A·h.) Označme Q_0 kapacitu zdroje před připojením ke kondenzátoru a $Q = CU$ náboj přenesený na kondenzátor. Po nabití kondenzátoru potom pro energii zdroje platí

$$E_z = U(Q_0 - Q) = UQ_0 - CU^2 \ .$$

Celková potenciální energie systému je tedy

$$E_p = \frac{1}{2}\varrho dag(\Delta h)^2 + \frac{1}{2}CU^2 + UQ_0 - CU^2 \ .$$

Hladina se ustálí v takové výšce, ve které je tato energie minimální, dosadíme tedy za C:

$$E_p = \frac{1}{2}\varrho dag(\Delta h)^2 - \frac{1}{2}U^2\,\frac{a\,(h_0 + \Delta h)\,(\varepsilon - \varepsilon_0) + a^2\varepsilon_0}{d} + UQ_0$$

a doplníme vztah na úplný čtverec:

$$E_p = \frac{1}{2}\varrho dag\left((\Delta h)^2 - 2\cdot\frac{U^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varrho d^2 g}\cdot\Delta h + \frac{U^4(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{4\varrho^2 d^4 g^2}\right) + K =$$

$$= \frac{1}{2} \varrho d a g \left(\Delta h - \frac{U^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varrho d^2 g} \right)^2 + K \ ,$$

kde K nezávisí na Δh. Minimální energie bude tedy pro

$$\Delta h = \frac{U^2 \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)}{2\varrho d^2 g} \ .$$

Protože $\varepsilon > \varepsilon_0$, bude $\Delta h > 0$ a hladina stoupne.

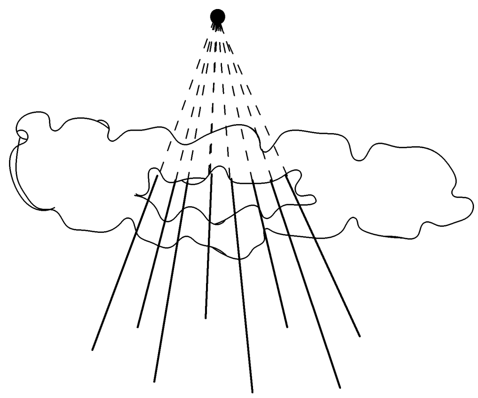
Martin Zdráhal & Jana Čurdová & Jan Houštěk
zdram9am@menza.mff.cuni.cz

Úloha I . 3 ... *sluneční paradox* *(3 body, řešilo 108 studentů)*

Hlavně večer a ráno můžeme někdy pozorovat sluneční paprsky jdoucí skrz mezery v mracích. Vidíme, že se tyto paprsky rozbíhají. Kdybychom si v jejich myšleném průsečíku představili Slunce, vyšlo by nám, že je několikrát (2 – 5) dále než mraky, tzn. řádově deset kilometrů nad Zemí. Tak proč nám všichni tvrdí, že Slunce je od Země 150 mil. km?

Lenka Zdeborová se inspirovala článkem z loňského ročníku časopisu Školská fyzika.

Vzhledem ke vzdálenosti Země od Slunce můžeme považovat paprsky procházející dírou v mraku za rovnoběžné. Rozbíhající se paprsky vidíme kvůli tomu, že díra v mraku je od nás dále než místo, kam paprsky dopadají (stejně tak nám připadá, že se sbíhají kolejnice).



Obr. 2

Poznámky k došlým řešení: Lom paprsků na rozhraní vakuum–vzduch můžeme s klidem zanedbat. Maximální hodnota, o jakou se může paprsek takto odchýlit, je 35 úhlových minut.

Mrak nefunguje jako velká rozptylka, protože má nepravidelný tvar a pohybuje se. Díra v mraku je příliš veliká na to, aby mohla fungovat jako štěrbina a docházelo k ohybu světla.

Rozptyl světla na mraku by nám nevytvořil pravidelné a intenzivní svazky paprsků. Někteří řešitelé uvažovali nad tím, že paprsky přicházejí z různých částí Slunce a potom se kříží nad mrakem, kde tvoří fiktivní zdroj. I křížící paprsky však spolu svírají jen malý úhel, což je v rozporu s tím, co vidíme.

Jan Houfek
jhoufek@post.cz

Úloha I . 4 ... *ponorka* *(4 body, řešilo 91 studentů)*

Mějme širokou otevřenou válcovou nádobu o výšce h, průřezu S a hmotnosti m. Položíme ji na hladinu a ona zaujme rovnovážnou polohu. Poté uprostřed dna uděláme malou dírku o průřezu $S^* \ll S$. Do nádoby začne vtékat voda, vaším úkolem je určit, za jak dlouho se ponoří.

Úlohu navrhl Miroslav Kladiva.

Nejprve vypočteme hloubku počátečního ponoření h_0. V rovnovážné poloze musí být tíhová síla kompenzována silou vztlakovou:

$$V_0 \rho g = S \ h_0 \rho g = mg \ ,$$
$$h_0 = \frac{m}{S\rho} \ .$$

Stěžejní částí úlohy byla následující úvaha. Do nádoby nateče voda o objemu V a tím vzroste celková tíhová síla. V důsledku zachování rovnováhy sil vzroste o stejnou velikost i síla vztlaková, a tak se objem ponořené části zvětší rovněž o objem V. Například, když hladina v nádobě stoupne o 1 mm, ponoří se nádoba o 1 mm hlouběji. Z toho plyne, že rozdíl výšek okolní hladiny a hladiny v nádobě se s časem nemění a odpovídá počáteční hodnotě h_0. V otvoru uprostřed dna je tedy konstantní hydrostatický tlak a jemu odpovídá rychlost, kterou voda vtéká do nádoby:

$$v = \sqrt{2gh_0}\ .$$

Jako „potopení“ je nejvhodnější uvažovat okamžik, kdy se horní okraj nádoby dotkne okolní hladiny. Nádoba tedy poklesne o výšku $h - h_0$. Nyní již není problém vypočítat čas potápění:

$$t = \frac{S}{S^*} \cdot \frac{h - h_0}{v} = \frac{S}{S^*} \frac{\rho S\ h - m}{\sqrt{2gmS\ \rho}}\ .$$

Miroslav Pištěk
tallmido@hotmail.com

Úloha I . P ... *jedna paní povídala* *(5 bodů, řešilo 95 studentů)*

Jeden krátkozraký kamarád mi říkal, že když si z prstů před okem utvoří malý otvor, tak vidí věci kolem sebe ostřeji než normálně. Je na tom něco pravdy nebo si vymýšlí? Svůj názor fyzikálně zdůvodněte.

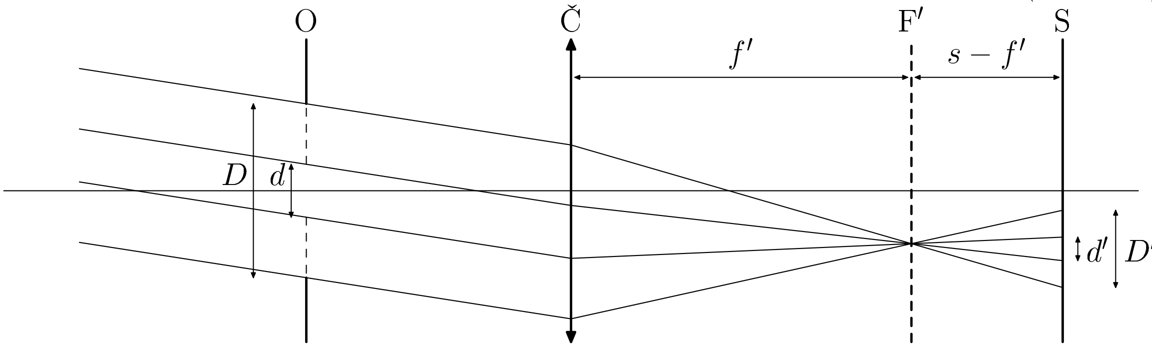
Úloha z krátkozrakého života Lenky Zdeborové.

Podstata ostrosti vidění je v tom, že bod (u vzdálenějších předmětů malá ploška) pozorovaného předmětu se zobrazí na sítnici jako bod. Tedy paprsky vycházející z pozorovaného bodu jsou čočkou v oku lámány tak, aby se setkávaly na sítnici opět v jednom bodě. Je třeba podotknout, že narozdíl od skleněných čoček, oční čočka netrpí přílišnou otvorovou vadou. Předpokládáme tedy, že paprsky se protínají skutečně v jednom bodě.

Krátkozrakost spočívá v tom, že čočka nedokáže pomocí akomodace posunout své ohnisko až na úroveň sítnice. Při pozorování vzdálených předmětů se téměř rovnoběžné paprsky po průchodu čočkou (Č) setkávají v ohniskové rovině (F') ve vzdálenosti f', a pak se dál rozbíhají než dopadnou na sítnici (S) ve vzdálenosti s od čočky, kde vytvoří místo bodu kroužek o průměru D', který vyjadřuje „neostrost“ viz obr. 3. Je-li „neostrost“ srovnatelná s rozlišovací schopností sítnice, je obraz zcela ostrý. „Neostrost“ je dána jednoduchým vztahem (z podobnosti trojúhelníků).

$$d' = d\frac{s - f'}{f'}\ .$$

Pokud si tedy kamarád dal před oko clonu v podobě otvoru z prstů (O), zmenšil tak průměr otvoru d, kterým do oka vniká světlo, a tím se i podle uvedeného vztahu zmenšila "neostrost" d'. Současně však snížil intenzitu světla vytvářející obraz, což ale tolik nevadí, protože oko je schopno svoji citlivost zvýšit až 10 000 krát. Toto odůvodnění jme považovali za správné (fyzikální).



Obr. 3

Svůj vliv má samozřejmě i soustředěnost na menší část obrazu, jsou-li zastíněny některé části zorného úhlu, ale to podle odborníků neplatí jen u někoho a jen v určitém věkovém rozmezí, tedy to zkrátka nelze považovat za pravidlo. Navíc máme vyzkoušeno, že lze vytvořit clonu (ne z prstů) tak blízko oka, že neomezuje zorný úhel, a efekt přesto funguje. Lze tak například pozorovat předměty naopak pro zdravé oko příliš blízké na zaostření.

Mnozí z vás také psali, že je příčina v ohybu světla. Ohyb světla jistě hraje svoji roli, sice malou, ale díky svým vlastnostem je spíše nežádoucí, než aby přispěl k zostření obrazu.

Jakub Holovský
j.holovsky@cbox.cz

Úloha I . Exp ... *natahování špaget* *(8 bodů, řešilo 67 studentů)*

Určete Youngův modul pružnosti v tahu uvařených špaget.

Bláznivý nápad Honzy Houšťka.

Chyby měření

Z praktických důvodů zde uvádíme základní poznatky z teorie chyb.

Chyby systematické

Jde o chyby způsobené použitou metodou, měřícími přístroji a některé chyby experimentátora. Systematické chyby obvykle zkreslí výsledek, buď k trvale vyšším nebo trvale nižším hodnotám.
1) Chyby metody — např. považujeme odpor spirály za konstantní a on se s teplotou mění.
2) Chyba měřidla — nedokonalost a nepřesnost stupnic (např. vzdálenost mezi jednotlivými dílky teploměru odpovídá 0,99 K namísto 1 K).
3) Některé chyby osobní — jsou dány nedokonalostí našich smyslů apod.

Systematické chyby nelze zmírnit velkým počtem měření!

Chyby náhodné

Při opakování měření za týchž podmínek zjistíte, že jednotlivé výsledky se navzájem poněkud liší. Měření je ovlivněno malými změnami teploty či tlaku, změnou polohy oka, prouděním vzduchu, ... Takových navzájem nezávislých jevů bývá mnoho a těžko bychom hledali přesnou příčinu odchylky, proto náhodné chyby připisujeme skutečně náhodě. Několikerým opakováním měření je můžeme potlačit.

Chyby hrubé

Jsou to velké chyby, které vznikají nedostatečným soustředěním experimentátora. Objevíme je, jestliže měření opakujeme vícekrát (viz níže). Měření zatížené hrubou chybou vyřadíme ze souboru hodnot.

Zpracování výsledku dostatečné k řešení experimentální úlohy

Uvádíme zde jednoduchý algoritmus, který vám doporučujeme použít na zpracování dostatečného počtu měření (alespoň deseti). Body 1) až 5) se týkají jen statistické chyby.

1) Určíme z naměřených hodnot aritmetický průměr.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \,.$$

Dá se dokázat, že za jistých předpokladů je pro nekonečně mnoho měření aritmetický průměr shodný se střední hodnotou měřené veličiny (viz literatura).

2) Stanovíme pro každou hodnotu odchylku od průměru Δx_i.

3) Vypočteme standardní odchylku

$$s_{\mathrm{st}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} \,.$$

4) Vyloučíme hrubé chyby. K tomu se používá takzvané 3-s kritérium. Vyloučíme všechny hodnoty, které se od aritmetického průměru liší o více jak $3s_{\mathrm{st}}$ a opakujeme předchozí body.

5) Určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru (statistickou odchylku)

$$s_{\mathrm{sm}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} \,.$$

6) Určíme systematickou chybu. Za chybu přístrojů můžeme považovat např. půlku nejmenšího dílku stupnice. Chybu metody, kterou neumíme spočítat, musíme alespoň fundovaně odhadnout.

7) Určíme celkovou chybu dle vzorce

$$s_{\mathrm{celk}} = \sqrt{(3s_{\mathrm{sm}})^2 + s_{\mathrm{sys}}^2}\ ,$$

pro malý počet měření dle přibližného vzorce $s_{\mathrm{celk}} = 3s_{\mathrm{sm}} + s_{\mathrm{sys}}$.

8) Chybu zaokrouhlíme na jednu platnou číslici, jen je-li jí jednička, na dvě. Aritmetický průměr zaokrouhlíme na řád poslední platné cifry chyby.

9) Výslednou hodnotu uvádíme jako $x = (\bar{x} \pm s_{\mathrm{celk}})$.

Ještě byste měli vědět, k čemu se vůbec chyby počítají. Odchylka nám udává, jak přesně jsme danou veličinu změřili. Dá se odvodit, že přesná hodnota leží v uváděném intervalu s pravděpodobností 99,7 %.

Literatura: J. Brož a kol.: Základy fysikálních měření (I), SPN, Praha 1967
E. Svoboda: Přehled středoškolské fyziky, Prometheus, Praha 1996

Řešení úlohy

Vypracování experimentální úlohy by mělo obsahovat na začátku trochu teorie popisující danou problematiku, následuje stručný, ale srozumitelný popis měření, na škodu není ani výčet pomůcek. Nezbytná je tabulka naměřených hodnot, výpočet odchylky měření (viz Chyby měření) a závěr s diskuzí výsledku, kde srovnáváte jednotlivé metody, výsledky apod.

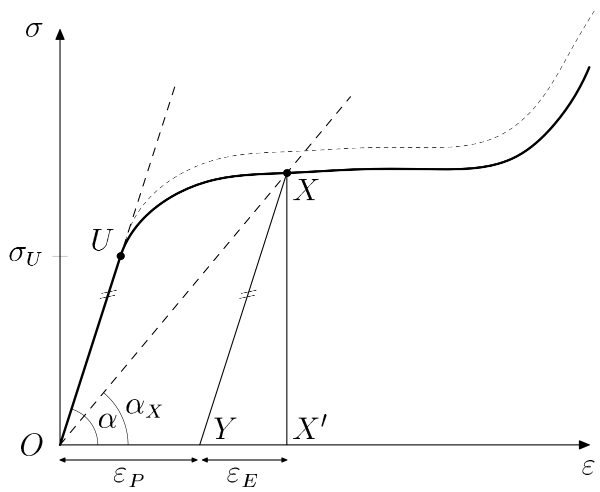
Tato experimentální úloha, jako první v pořadí, byla spíše na procvičení měření a zpracování získaných výsledků. Většina z vás věděla, co má měřit a i to naměřila. Takže vrhněme se do toho.

Teorie

Každý z vás už potkal Hookův zákon pro pevná tělesa, který píšeme ve tvaru $\sigma = E\varepsilon$, kde $\varepsilon = \Delta l/l_0$ je poměrné prodloužení, které určíme jako poměr skutečného prodloužení Δl a původní délky l_0, $\sigma = F/S$ je napětí, které vypočteme jako podíl zatěžující síly F a průřezu $S = \pi(d/2)^2$, a E je Youngův modul pružnosti. Z toho máme:

$$E = \frac{F}{S} \cdot \frac{l_0}{l - l_0}\ . \qquad (4)$$

Tento vztah ovšem platí jen do napětí σ_U, tzv. meze úměrnosti, dokud závislost σ na ε je lineární (viz obr. 4).



Obr. 4

Na obr. 4 je schématicky znázorněna závislost σ na ε (od σ_U vůbec nezáleží na tom, jaký má přesný průběh), kde plná čára představuje závislost tzv. smluvního napětí, které počítáme jako poměr zatěžující síly a původního průřezu. Přerušována čára naopak představuje napětí závisící na aktuálním průřezu. Vidíme, že do napětí σ_U se smluvní napětí téměř rovná skutečnému napětí ve špagetě. Z toho pak vidíme, že dokud nenastává trvalá deformace, a ta nastává jakmile překročíme napětí σ_U, poloměr špagety se významněji nemění.

Jestliže napínané těleso (tyč, drát, špagetu, …) v libovolném bodě X odlehčíme, odpruží se dle úsečky $XY \parallel OU$. (Pokud by OU neexistovala, pak by XY byla rovnoběžná s tečnou v bodě O.) Úsečka $|X'Y| = E\varepsilon$ představuje pružnou část, úsečka $|OY| = \varepsilon_P$ plastickou část celkové poměrné deformace odpovídající bodu X. Vidíme, že

$$\varepsilon_P + \varepsilon_E = \frac{l_2 - l_0}{l_0} \qquad \text{a} \qquad \varepsilon_P = \frac{l_{02} - l_0}{l_0}$$

a z toho plyne $\varepsilon_E = (l_2 - l_{02})/l_0$ a také

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_X}{\varepsilon_E} = E\ .$$

Nyní upravíme vztah (4):

$$E = \frac{F}{S}\frac{l_0}{l - l_{02}} \ .$$

Ti z vás, kteří překročili napětí σ_U, tj. měřili prodloužení až do přetrhnutí, určovali vlastně

$$E = \operatorname{tg}\alpha_X = \frac{\sigma_X}{\varepsilon_X} \ ,$$

což vedlo k nesprávnému výsledku. Naším úkolem bude tedy špagetu připravit, zatížit, odlehčit a po každém tomto kroku změřit její délku. Budeme muset zachovávat linearitu experimentu (nepřekročit mez úměrnosti), což se dá dosáhnout tím, že si pokaždé zjistíme deformaci, a když bude trvalé prodloužení větší než 1 mm (tedy nejmenší dílek měřidla), pak měření vyloučíme.

Pomůcky

Špagety Delvita Levně bezvaječné, milimetrový papír, mikrometr, sponky na papír, niť, papír, lepící páska, 3 velké mikrotenové sáčky, sada lehkých závaží, přesný odhad.

Postup měření

1. Uvaříme několik špaget podle návodu (tedy s olejem a se solí). Musíme zabezpečit, aby před každým měřením byly čerstvě uvařené, jinak mohou velice změnit své vlastnosti, takže pro více měření je potřeba opakovaně vařit nové špagety.

2. Mezitím na vodorovnou podložku připevníme ocejchované milimetrové papíry (v rozsahu minimálně 40 cm kolmo ke hraně stolu) a přikryjeme je rozstříhnutými sáčky, napneme a přilepíme je na stůl. Z niti a sponek vytvoříme háčky se závěsem na uchycení špagety na stůl a na spojení špagety se závažím - dosti dlouhým, neboť závaží musí viset ze stolu.

3. Z igelitového sáčku odstřihneme roh, složíme do jakéhosi nového sáčku a propíchneme dalším háčkem ze sponky (vidíte, kde všude se hodí sponky?).

4. Uvařenou a vybranou špagetu opláchneme v teplé vodě a její konce upravíme podle obr. 2. Konec ovineme několikrát proužkem papíru, mezi to zavineme ohnutou sponku a obtočíme lepící páskou. Papír nám zabezpečí, že závěs ze špagety nesklouzne (obr. 5).

Obr. 5

5. Mikrometrem změříme její průměr a to tak, že mikrometr utahujeme dokud je ještě špageta mezi čelistmi volná (pootočíme o 1 – 2 dílky a zkontrolujeme, zda je volná, znovu pootočíme a zkontrolujeme, ...).

6. Místo, kam budeme ukládat špagetu, polejeme tenkou vrstvou oleje – jedlého, pak špagetu zahákneme na háček na stole, volně uložíme na olejovou vrstvu a změříme její délku l_0. Na její druhý konec zahákneme druhou soustavu háček–niť–háček. Na ze stolu visící háček zavěsíme připravený sáček se závažíčky a zaznamenáme její novou délku l_1. Následně ji uvolníme a znovu zjistíme její novou délku a deformaci Δl_{def}.

7. Toto uděláme pro více špaget a různé zatížení. Zatížení volíme tak, aby deformace nebyla moc veliká. Dbáme taky na to, aby špagety, již uvařené, nestály ve vodě víc jak 20 minut, jinak napuchnou a změknou a při další manipulaci se velmi lehce lámou a trhají.

Naměřené údaje

Při výpočtu použito $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

č. m.	$d/10^{-5}$m	l_0/mm	m/g	l_2/mm	Δl/mm	def	E/Pa	ΔE/Pa	$(\Delta E)^2/\mathrm{Pa}^2$
1	254	261	5	282	21	x	–	–	–
2	241	273	2,90	282	21	x	–	–	–
3	237	247	2,65	285	12	x	–	–	–
4	240	332	1,40	339	7	–	143900	-5570	31024900
5	246	303	1,35	309	6	–	140660	-2330	5428900
6	260	330	1,80	339	9	x	–	–	–
7	257	249	1,30	245	5	–	122390	15940	254083600
8	248	211	1,20	215	4	–	128510	9820	96432400
9	239	155	1,35	159	4	–	152470	-1414	1999396
10	244	317	1,00	322	5	–	132970	5360	28729600
11	241	281	0,90	285	4	–	135920	2410	5808100
12	254	290	0,75	293	3	–	140310	-1980	3920400
13	250	282	1,40	287	5	–	157750	-19420	377136400
14	252	326	0,80	330	4	–	129200	10130	102616900
15	250	292	0,95	296	4	–	138550	-220	48400

Kolonka def je zaškrtnutá a ostatní údaje se nevypočítávají, jestliže trvalá deformace překročila 1 mm.

Aritmetický průměr: $\overline{E} = 138330\,\mathrm{Pa}$.

Standardní odchylka: $s_{st} = 9500\,\mathrm{Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka: $s_{sm} = 2900\,\mathrm{Pa}$.

Systematická chyba měření průřezu: 5%,

měření změny délky: 25%,

s_{sys} tedy asi 30 kPa.

Celková chyba: $s_{celk} = 35\,\mathrm{kPa}$.

Diskuze a závěr

Námi naměřená hodnota Youngova modulu pružnosti patří do intervalu (140 ± 40) kPa. Nejvíce ji kazí chyba systematická, která je způsobená nepřesným měřením prodloužení $\Delta l = l_2 - l_0$. Ta se dá snížit jenom přesnějším délkovým měřidlem (otázka je jakým), ale v žádném případě ne zvětšováním napětí σ.

Jiné možné metody (nebo něco na zamyšlení): Mnozí z vás špagetu pověsili za jeden konec, a pak měřili prodloužení. Málokdo si přitom dělal těžkou hlavu z hmotnosti špagety. A to byla chyba. Délková hustota průměrné špagety je asi $0{,}08\,\mathrm{g\cdot cm^{-1}}$ (průměrná hodnota z vašich řešení), tedy 25 cm dlouhá špageta má hmotnost 2 g. A při takové váze je horní část špagety už dávno zdeformována.

Jaroslava Schovancová se pokoušela určit E ze svislých kmitů tělesa o hmotnosti M zavěšeného na špagety. Pro periodu těch kmitů vychází:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M l_0}{S_{\text{aktuální}} E}}\,.$$

Pro jemnost špagety je však zapotřebí pracovat s lehkým tělesem a malými kmity. Tady pak hraje roli i relaxační čas materiálu – špagety.

Nabízejí se i jiné možnosti realizace:

Miloslav Havelka navrhl a Petr Houštěk i naměřil takovéto provedení: Narovnat špageto, připevnit její konce a natahovat její střed. Tato metoda však vyžaduje přesnější měření kolmo působící tahové síly.

Jan Kratochvíl a Pavol Mikčo navrhli zjistit E z naměřeného modulu pružnosti ve smyku metodou dynamickou (met. torzních kmitů), přičemž platí vztahy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2lJ}{\pi G r^4}}\,,$$
$$G = \frac{mE}{2(m+1)}\,,$$

kde J je moment setrvačnosti zavěšeného tělesa, G je torzní modul pružnosti, m je Poissonova konstanta, pro každou látku jiná.

Nápověda pro toho, kdo má chuť zjistit si Poissonovou konstantu pro špagetu:

$$m = -\frac{\varepsilon}{\eta}\,,$$

kde η je relativní příčné zkrácení. Pokud se průměr špagety zkrátí z původního poloměru r_0 na poloměr r pak, platí

$$\eta = \frac{r - r_0}{r_0}\,.$$

Eva Skopalová a Zdeněk Čejka jako jediní zjišťovali E i v závislosti na času vaření. Vyšlo jim, že dvakrát méně vařené špagety mají třikrát menší modul pružnosti – jsou tvrdší a méně jedlé.

Nějaká statistika vašich měření: Naměřené hodnoty se pohybovaly v rozmezí od 75 Pa do 16 MPa. Dají se rozdělit do dvou velkých skupin: okolo 120 kPa a okolo 400 kPa.

Na závěr Vám ještě děkujeme za slovní hříčky typu: Moje naměřená hodnota $E = 144550{,}28 \pm 35504{,}37$ Pa je velice nepřesná …

Milan Berta
bertm0am@milada.troja.mff.cuni.cz

Úloha S . I … *autíčka* *(4 body, řešilo 90 studentů)*

a) Autíčko o hmotnosti m se rozjíždí z klidu tak, že výkon P je konstantní. Určete závislost zrychlení, rychlosti a polohy na čase. Návod: znáte-li výkon, je jednoduché určit závislost kinetické energie autíčka na čase.

b) Autíčko jede při maximálním výkonu do kopce rychlostí $v_1 = 95\ \mathrm{km.h^{-1}}$. Ze stejného kopce dolů jede při plném výkonu rychlostí $v_2 = 162\ \mathrm{km.h^{-1}}$. Jak rychle pojede po rovině? Odporová síla je úměrná v^2.

Zadali jak jinak než autoři seriálu Lenka Zdeborová a Honza Houštěk.

a) Práce motoru se mění na kinetickou energii autíčka, tedy

$$Pt = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\,.$$

Tento vztah odvodili téměř všichni řešitelé správně a udělovali jsme za něj jeden bod. Zrychlení autíčka je derivací jeho rychlosti podle času. Stačí tedy zderivovat vzorec pro v podle t a dostaneme

$$a = \sqrt{\frac{2P}{m}}\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2} = \sqrt{\frac{P}{2mt}}\,.$$

Tento vztah však můžeme odvodit i elegantněji bez použití derivace dosazením $P = Fv = mav$. Dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{2mavt}{m}}\,, \qquad \text{tedy} \qquad a = \frac{v}{2t} = \sqrt{\frac{P}{2mt}}\,.$$

Dráhu, kterou urazí autíčko za čas t , vypočteme integrací jeho rychlosti od 0 do t , tj.

$$s = \int_0^t \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2P}{m}}\cdot\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2Pt^3}{m}}\,.$$

Nejfrekventovanější chybou bylo používání vzorců pro rovnoměrně zrychlený pohyb při výpočtu a a s (typicky $a = v/t = \sqrt{2P/mt}$). Ale takto postupovat nemůžete!!! Vzorce $v = at$ a $s = at^2/2$ platí pouze za předpokladu, že $a = \text{const}$, což pro naše autíčko není splněno.

b) Označme F složku tíhové síly působící na autíčko rovnoběžnou s vektorem jeho rychlosti a k konstantu úměrnosti ve ve vztahu $F_o = kv^2$, kde F_o je odporová síla. Protože výkon je součin síly a rychlosti, můžeme psát

$$P = kv_1^3 + Fv_1 \ , \qquad P = kv_2^3 - Fv_2 \ .$$

Vydělením první rovnice v_1 druhé v_2 a jejich sečtením dostaneme

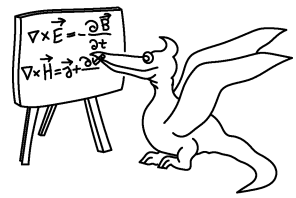
$$P\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = k\left(v_1^2 + v_2^2\right) \ ,$$

$$\frac{P}{k} = \frac{\left(v_1^2 + v_2^2\right) v_1 v_2}{v_1 + v_2} \ .$$

Při jízdě po rovině platí $P = kv^3$. Rychlost jízdy po rovině je tedy

$$v = \sqrt[3]{\frac{\left(v_1^2 + v_2^2\right) v_1 v_2}{v_1 + v_2}} = 128\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \ .$$

Pavel Augustinský
augup0bm@milada.troja.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 3: Zákony zachování

Na úvod 3. dílu seriálu si připomeneme základní pojmy z vyšší matematiky, které je dobré znát. Derivace funkce f v bodě x je

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{pro } h \to 0 \ .$$

Pro derivace platí následující vztahy

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \ ,$$
$$(cf(x))' = cf'(x) \ ,$$
$$(fg)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ ,$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x) \ .$$

Derivace mocninných a goniometrických funkcí jsou

$$y = x^r \quad \to \quad y' = rx^{r-1} \ ,$$
$$y = \sin x \quad \to \quad y' = \cos x \ ,$$
$$y = \cos x \quad \to \quad y' = -\sin x \ .$$

S derivacemi se ve fyzice setkáváme na každém kroku, neboť udávají rychlost změny veličin. Např. rychlost je derivace dráhy podle času, proud derivace náboje podle času, síla je (až na znaménko) derivace potenciální energie podle souřadnice …

Inverzní operace k derivování se nazývá integrování. Zintegrovat nějakou funkci znamená najít funkci, jejíž derivaci máme předem danou, tedy např. spočítat uraženou dráhu, známe-li závislost rychlosti na čase. Tato funkce je zřejmě určená až na konstantu, protože derivace konstanty je nula. Symbolicky integrál zapíšeme například takto:

$$\int (\cos x + \sin x)\ \mathrm{d}x = \sin x - \cos x + c$$

$$\text{(To znamená to samé jako} \quad (\sin x - \cos x + c)' = \cos x + \sin x\ ) .$$

Pokud je vám některý z pojmů zmíněných v předchozích odstavcích cizí, pročtěte pozorně minulé díly seriálu, popřípadě se poraďte s odbornou literaturou nebo se svým učitelem fyziky či matematiky. Nebojte se, není to nijak zvlášť obtížné, a pokud se chcete intenzivněji zabývat fyzikou, stejně na derivace a integrály dříve či později (raději dříve) narazíte. Navíc jde o velice užitečné prostředky, pomocí kterých lze jednoduše vyřešit mnoho na první pohled složitých problémů.

Zákon zachování hybnosti

Při řešení problémů je vždy výhodné najít nějakou veličinu, jejíž hodnota se nemění, ať se se systémem děje cokoliv. V případě, že na soustavu hmotných bodů nepůsobí žádné vnější síly, je takovou veličinou celková hybnost soustavy. 2. N. z. pro i-tý bod soustavy je

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum \boldsymbol{F}_{ij} \ ,$$

kde $\boldsymbol{F}_{ij}$ je síla, kterou působí j-tý bod na i-tý. Podle 3. N. z. je ale $\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} = \boldsymbol{0}$, odtud pro celkovou hybnost soustavy dostáváme

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \sum \dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{0} \ .$$

Z poslední rovnice zřejmě plyne, že se $\boldsymbol{p}$ s časem nemění. Toho lze s výhodou využít např. při řešení různých srážek.

Zákon zachování energie

Další veličinou, která se za určitých okolností zachovává, je celková mechanická energie. Její definice je

$$E = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 + V_i\left(\boldsymbol{r}_i\right) \right) \ .$$

Potenciální energie i-tého bodu V_i má tu vlastnost, že její derivace[1]) podle souřadnic je až na znaménko rovna síle působící na i-tý bod, tedy

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = -F_{i,x} \qquad \text{podobně pro } y, z \ .$$

Derivujeme-li[2]) definici energie podle času (pro jednoduchost předpokládejme, že máme pouze souřadnici x), dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(m_i v_{i,x} \dot{v}_{i,x} + \frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \right) = \sum_i v_{i,x} \left(m a_{i,x} - F_{i,x} \right) \ .$$

Závorka je ovšem podle 2. N. z. nulová, energie se proto s časem nemění.

Příklad 6: Najděte potenciální energii pro homogenní a radiální gravitační pole a zapište zákon zachování energie.

---

[1]) Značka ∂ místo d značí, že derivovaná funkce může být funkcí více proměnných a my derivujeme podle jedné z nich, přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty.

[2]) Použijeme dvakrát pravidlo pro derivaci složené funkce, jednou pro funkci $\left(v_{i,x}(t)\right)^2$, podruhé pro funkci $V_i\left(x(t)\right)$.

Síla působící na hmotný bod v homogenním gravitačním poli je $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ ($\boldsymbol{g}$ je konstanta co do velikosti i do směru). V kartézských souřadnicích, kde osa z míří proti směru $\boldsymbol{g}$, pak musí platit

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0\ , \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = mg\ .$$

To je splněno pro $V = mgz$, což znáte již ze základní školy.

V radiálním poli působí ma hmotný bod síla závisející pouze na vzdálenosti r od centrálního tělesa o hmotnosti M (předpokládáme, že $M \gg m$, takže se toto těleso nepohybuje). Síla působí směrem do centra a její velikost je podle Newtonova gravitačního zákona $F = GMm/r^2$, kde G je gravitační konstanta někdy též označovaná κ. Pro potenciál musí platit

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad V = GMm \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{GMm}{r} + V_0\ .$$

Konstantu V_0 můžeme volit libovolně, je ale výhodné položit ji rovnou nule. Zákon zachování energie má tedy tvar

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E.$$

Zákon zachování momentu hybnosti

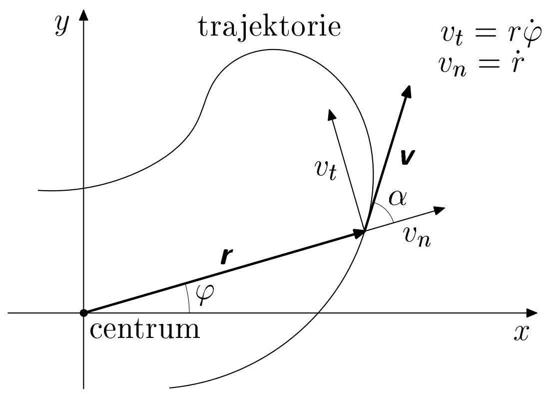
Moment hybnosti hmotného bodu je definován jako vektorový součin[3] $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Předpokládejme, že na hmotný bod působí pouze nějaká centrální síla. Časová derivace jeho momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ pak je

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}\ ,$$

neboť vektor rychlosti je rovnoběžný s vektorem hybnosti a centrální síla působí ve směru $\boldsymbol{r}$. Našli jsme tedy veličinu, která se zachovává, působí-li pouze centrální síly. Pro pohyb v rovině můžeme velikost $\boldsymbol{L}$ vyjádřit pomocí úhlové rychlosti ω. Platí totiž $r\omega = v_t = v \sin\alpha$, kde v_t je složka rychlosti kolmá na $\boldsymbol{r}$ (viz obr. 6), odtud $L = mrv\sin\alpha = mrv_t = mr^2\omega$.

Keplerovy zákony

Teď si konečně ukážeme nějakou pořádnou aplikaci předchozích poznatků. Odvodíme ze ZZE a ZZMH vám dobře známé Keplerovy zákony pro pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli.



Obr. 6

Polohu tělesa popíšeme jeho vzdáleností r od centra a úhlem φ, který svírá jeho průvodič s osou x. Gravitační síla je centrální silou, tedy platí $mr^2\omega = L = \text{konst.}$ Po vydělení obou stran rovnice $2m$ dostáváme $w = rv_t/2 = L/2m$. Veličina w má význam plochy opsané průvodičem za jednotku času. Odvodili jsme tedy 2. Keplerův zákon, který říká, že $w = \text{konst.}$

Nyní zapíšeme zákon zachování energie. Potenciální energii jsme již odvodili, kinetická energie je $mv^2/2$. Rychlost rozložíme na tečnou složku v_t a normálovou složku v_n. Už víme, že $v_t = \omega r$. Pro v_n zřejmě platí $v_n = \dot r$. Po dosazení vypadá ZZE takto:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\omega^2\right) - \frac{GMm}{r} = E\ .$$

Naším cílem je nalézt vztah, který udává, jak r závisí na φ, tím je totiž dán tvar trajektorie. Abychom si zjednodušili práci, zavedeme veličinu u tak, že $r = 1/u$, a místo $r(\varphi)$ budeme hledat $u(\varphi)$. Derivujeme-li r podle času, dostáváme

$$\dot r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u(\varphi(t))}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u(\varphi(t))}{\mathrm{d}t} = -r^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\dot\varphi = -\frac{L}{m}u'\ ,$$

[3]) Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je vektor kolmý na $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a jeho velikost je $c = ab\sin\alpha$, kde α je úhel sevřený vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Vektorový součin se derivuje jako obyčejný součin.

protože $\dot{\varphi} = \omega$. Označili jsme u' derivaci u podle φ. Protože platí také $r\omega = (L/m)u$, můžeme do ZZE za všechna r dosadit a dostáváme

$$\frac{L^2}{2m}\left(u'^2 + u^2\right) - GMmu = E\ .$$

Derivujme nyní tuto rovnici podle φ.

$$\frac{L^2}{2m}\left(2u'u'' + 2uu'\right) - GMmu' = 0\ ,$$

dělením výrazem L^2u'/m dostáváme tzv. Binetův vzorec

$$u'' + u\ = \frac{GMm^2}{L^2}\ .$$

Výraz na pravé straně má rozměr m^{-1}, označme tedy jeho převrácenou hodnotu p. Po dosazení za L pomocí plošné rychlosti w dostáváme

$$p = \frac{4w^2}{GM}\ . \tag{5}$$

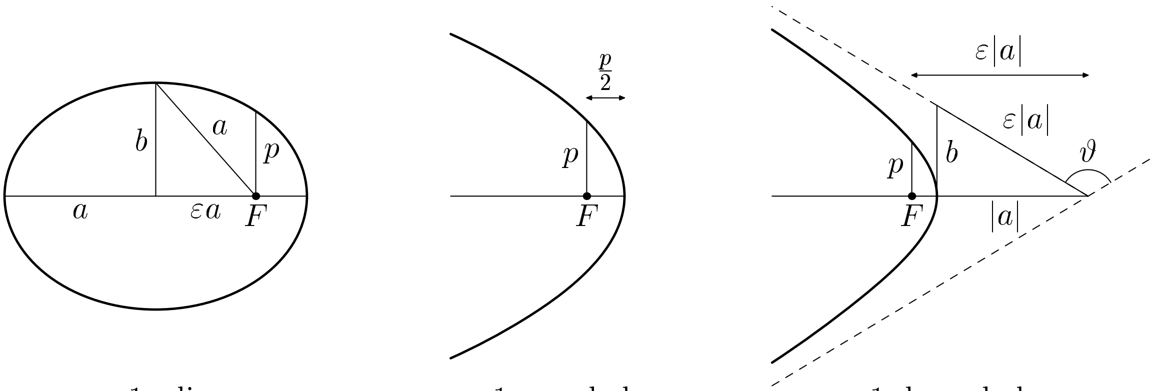
Z minulého dílu víme, že řešení rovnice $u''+u = 0$ je $u = A\cos(\varphi+B)$, kde A, B jsou konstanty závislé na počátečních podmínkách. Řešení stejné rovnice s pravou stranou $1/p$ dostaneme z těchto řešení pouze přičtením $1/p$. Volíme-li navíc souřadnou soustavu tak, že $B = 0$, a označíme-li $\varepsilon = Ap$, můžeme řešení zapsat ve tvaru $u = (1 + \varepsilon\cos\varphi)/p$, tedy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\ . \tag{6}$$

Tato rovnice je pro $\varepsilon = 0$ rovnicí kružnice, pro $0 < \varepsilon < 1$ elipsy, pro $\varepsilon = 1$ paraboly a pro $\varepsilon > 1$ hyperboly. Ohnisko kuželosečky leží vždy v centru. Tím je dokázán 1. Keplerův zákon.

Na následujících obrázcích jsou zobrazeny některé parametry těchto křivek, přitom jsme označili

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}\ , \qquad b = \sqrt{p|a|}\ .$$



$\varepsilon < 1$, elipsa $\qquad$ $\varepsilon = 1$, parabola $\qquad$ $\varepsilon > 1$, hyperbola

Ze školy možná znáte popis kuželoseček v kartézských souřadnicích. Není těžké odvodit, že je našemu popisu ekvivalentní, a že platí uvedené vztahy mezi a, b, p, ε. Pokud vás to zajímá, nahlédněte do nějaké matematické knížky nebo si zkuste pohrát s programem, který kreslí grafy v polárních souřadnicích.

Příklad 7: Určete parametry trajektorie tělesa, které vypustíme ve vzdálenosti R od středu Země rychlostí v kolmou na spojnici tělesa a středu Země. Rychlost v je větší, než kruhová rychlost $v_k = \sqrt{GM/R}$.

Plošná rychlost tělesa je $w = vR/2$. Podle (5) platí

$$p = \frac{4w^2}{GM} = \frac{v^2R^2}{GM}\ .$$

Dosadíme-li $\varphi = 0$ do (6), dostáváme

$$R = \frac{p}{1+\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{p}{R} - 1 = \left(\frac{v}{v_k}\right)^2 - 1\ .$$

Vidíme, že pro $v < v_u = \sqrt{2}\,v_k$ je $\varepsilon < 1$, trajektorií je elipsa, pro $v = v_u$ je $\varepsilon = 1$ a trajektorií je parabola a pro $v > v_u$ se těleso pohybuje po hyperbole. Dopočítat parametry trajektorie je už jen technickou záležitostí.

Všimněme si, jak užitečný je zde vztah (5) a rovnice kuželoseček v polárních souřadnicích. Před důkazem 3. Keplerova zákona odvodíme ještě jeden velmi užitečný vzoreček.

Vyjádříme celkovou mechanickou energii E pomocí parametrů trajektorie. V bodě $\varphi = 0$ platí $r = p/(1+\varepsilon)$ a $v = 2w/r$, tedy

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{4w^2}{p^2}(1+\varepsilon)^2 - \frac{GMm}{p}(1+\varepsilon) = \frac{GMm}{2p}\left(\varepsilon^2 - 1\right) = -\frac{GMm}{2a}\ .$$

Podle ZZE je ale energie stejná pro každý bod, vyjádříme tedy v pomocí r a dostáváme

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}\ .$$

Právě tento vztah použijeme k výpočtu periody oběhu po eliptické trajektorii. Pro rychlost v_a ve vzdálenosti a od ohniska platí

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a}}\ .$$

Vyjádříme nyní w a periodu oběhu T:

$$w = \frac{1}{2}v_a b\ , \qquad T = \frac{S}{w} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}bv_a} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}\ .$$

Z posledního vzorce již jasně plyne $T^2 : a^3 = \text{konst}$, což je přesně tvrzení 3. Keplerova zákona.

Gratulujeme všem, kteří se dočetli až na konec tohoto poněkud obsáhlejšího dílu. Nešlo rozhodně o triviální věci, takže pokud jste nějaká odvození nepochopili, nic se neděje, zkuste si nejprve spočítat různé příklady. Pokud se vám naopak odvození zdálo pochopitelné, zkuste zopakovat stejný postup pro odpuzující se tělesa, např. atomové jádro a α-částice ze známého Rutherfordova experimentu.

V příštím díle opustíme problematiku hmotných bodů a budeme se zabývat pohybem tuhých těles. Tím vyčerpáme většinu důležitých částí mechaniky. Téma zbývajících dvou či tří dílů bychom rádi přizpůsobili vašim přáním, takže k řešení úlohy seriálu můžete psát, co z minulých dílů byste chtěli vysvětlit podrobněji, co dalšího vás z mechaniky zajímá, nějaké zajímavé problémy a jiné náměty. Jen tak namátkou, můžeme napsat něco o neinerciálních soustavách a setrvačných silách, o tlumených kmitech a rezonancích, o rovnováze a stabilitě mechanických systémů, o deformacích … Pro náročnější se můžeme pokusit stručně popsat nějaké pokročilejší partie jako např. variační principy v mechanice nebo relativistickou mechaniku. Takže neváhejte a pište!

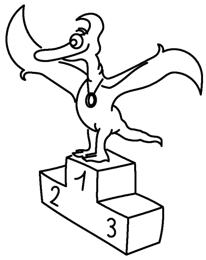
Úloha III . S ... *sonda k Jupiteru*

Uvažujme družici letící k Jupiteru kolmo na jeho dráhu. Její rychlost ve velké vzdálenosti od Jupitera je $v_0 = 10000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Družice proletí za Jupiterem, její minimální vzdálenost od jeho středu je přitom rovna trojnásobku Jupiterova poloměru. Určete výsledný směr a velikost rychlosti sondy.

Nápověda: Nejprve proveďte přechod do soustavy, ve které je Jupiter v klidu. V této soustavě pak spočtěte úhel ϑ, o který se při pohybu po hyperbole změní směr rychlosti.

Naše adresa:

FYKOS
Matematicko-fyzikální fakulta UK — ÚTF
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8
http://fykos.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kategorie čtvrtých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S1	%	I
	Student	*Pilný*	*F.1*	*MFF UK*	*4*	*5*	*3*	*4*	*4*	*8*	*4*	*100*	*32*
1	Peter	Čendula	3.B	G Liptovský Mikuláš	2	5	4	3	1	8	4	84	27
2 - 3	Jan	Kratochvíl	3.K	SPŠST Praha - Panská	4	—	—	4	4	8	4	100	24
2 - 3	Jan	Kunc	3.A	G Kolín	0	4	4	4	1	8	3	75	24
4	Karel	Žídek	3.E	G Opava	2	1	3	4	4	5	3	69	22
5	Vladimír	Fuka	sexta A	G Rakovník	4	—	3	4	4	3	3	78	21
6 - 7	Zoltán	Mics	3.B	G Šahy	2	4	3	4	2	—	4	79	19
6 - 7	Ondřej	Plašil	septima B	G Praha - Chodovická	2	3	0	4	1	5	4	59	19
8 - 9	Jaromír	Chalupský	sexta A	G Sušice	4	3	0	5	0	0	4	50	16
8 - 9	Jaroslav	Tykal	3.C	G Jihlava	4	5	—	3	0	—	4	76	16
10 - 12	Juraj	Feilhauer	B	G Bratislava	2	4	—	4	0	2	2	48	14
10 - 12	Patrik	Hudec	III.C	G Bílovec	4	—	0	4	2	—	4	74	14
10 - 12	Miroslav	Kozel			3	—	3	2	3	3	0	52	14
13 - 16	Ladislav	Benda		GJKT	4	2	0	4	—	—	3	65	13
13 - 16	Martin	Beránek	VI.	G Praha - Ohradní	3	—	—	3	4	—	3	81	13
13 - 16	Pavol	Mikčo	3.B	G Stropkov	—	1	0	1	—	8	3	54	13
13 - 16	Martin	Sikora		G Bílovec	4	—	0	4	1	—	4	68	13
17 - 18	Martin	Holík	3.C	G Bílovec	2	—	0	4	1	—	4	58	11
17 - 18	Pavel	Janda	sexta	G Telč	4	—	—	4	1	—	2	69	11
19	Michal	Bláha	M	SPŠST Praha - Panská	2	—	—	4	—	—	4	83	10
20 - 22	Nina	Benešová		G Praha	4	—	0	—	0	4	1	39	9
20 - 22	Ivan	Dovica		G Košice	2	—	0	4	0	—	3	47	9
20 - 22	Jakub	Levic	sexta B	G Louny	2	3	0	2	—	—	2	45	9
23 - 24	Martin	Jakl	5.D	G Pardubice	—	—	3	4	0	—	1	53	8
23 - 24	Martin	Šimek	sexta	G Telč	4	—	—	4	—	—	—	100	8
25 - 27	Jan	Alster	septima A	G Holešov	3		—	4	—	—	—	54	7
25 - 27	Pavel	Kočica	3.A	G Uh. Brod	0	5	0	—	0	—	2	35	7
25 - 27	Michal	Tarana		G Žilina	0	3	0	1	0	—	3	29	7
28 - 30	Zdeněk	Cejnar	3.A	G Říčany	1	0	0	4	0	0	1	19	6
28 - 30	František	Havlůj		G Praha	0	0	0	2	0	2	2	19	6
28 - 30	Peter	Valachovič	3.B	SPŠ Trenčín	2	—	3	—	—	—	1	55	6
31 - 33	Martin	Hrba	sexta A	G Sušice	—	—	0	—	1	—	4	45	5
31 - 33	Pavel	Řezanka	3.C	G Praha - Zborovská	0	—	0	2	—	—	3	33	5
31 - 33	Lukáš	Sobek			—	1	—	1	—	3	—	29	5
34 - 39	Petra	Dobroucká	6.BV.	G Moravská Třebová	—	—	0	4	—	—	—	57	4
34 - 39	Dáša	Eisenmannová	3.A	G Praha - Mezi šk.	0	—	3	—	1	—	0	27	4
34 - 39	Petr	Krčmář		GTMPL Rožnov	1	—	3	—	—	—	—	57	4
34 - 39	Michal	Nejezchleb		G Rožnov p. R.	1	—	3	—	—	—	—	57	4
34 - 39	Michal	Talík		G Broumov	2	—	1	—	1	—	—	36	4
34 - 39	Vojtěch	Uhlíř		G Uherské Hradiště	0	—	—	—	—	—	4	50	4
40 - 44	Petra	Adamová	3.A	G Benešov	0	0	—	—	—	3	—	18	3
40 - 44	Luďek	Michera		G Rychnov n. K.	0	—	—	—	3	0	—	19	3
40 - 44	Jaroslava	Plasová	septima C	G Klatovy	—	0	0	1	2	—	—	19	3
40 - 44	Lukáš	Schmiedt	3.D	SG Olomouc	0	—	0	—	3	—	—	27	3
40 - 44	Martin	Szablatura		SPŠ Karviná	0	—	3	—	0	—	—	27	3
45 - 47	Ivan	Banas	5.G	G Martin	2	0	0	—	0	—	0	10	2
45 - 47	Pavel	Hančar		SPŠ Jičín	0	—	0	2	0	—	—	13	2
45 - 47	Tomáš	Leško			1	0	0	—	0	—	1	10	2

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S1	%	I
	Student	*Pilný*	*F.1*	*MFF UK*	*4*	*5*	*3*	*4*	*4*	*8*	*4*	*100*	*32*
48 - 51	Alice	Koželuhová		G Brno	1	0	0	—	0	0	0	4	1
48 - 51	Tomáš	Michalička		GOA Jaroměř	0	—	0	—	—	1	—	7	1
48 - 51	Leoš	Veselý			0	0	0	0	1	—	—	5	1
48 - 51	Pavel	Vraspír	sexta	G Polička	1	—	0	—	—	—	0	9	1
52 - 55	Jan	Bauer	sexta A	G Praha - Sladk.	0	—	0	—	0	0	0	0	0
52 - 55	Martin	Pavel	3.A	G Dobruška	0	—	—	—	—	—	—	0	0
52 - 55	Lukáš	Svoboda	A	G Chomutovské	0	—	0	—	—	—	—	0	0
52 - 55	Martin	Tkáčik			0	—	—	—	—	—	—	0	0

Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S1	%	I
	Student	*Pilný*	*F.1*	*MFF UK*	*4*	*5*	*3*	*4*	*4*	*8*	*4*	*100*	*32*
1	Eva	Skopalová		G Poprad	4	5	3	2	0	7	4	78	25
2 - 3	Michael	Komm	sexta	G Praha - Parléřova	2	5	0	4	2	6	4	72	23
2 - 3	Václav	Matouš	2.A	G Klatovy	2	—	3	4	3	8	3	85	23
4 - 5	Tomáš	Buchta		G Praha-Zborovská	4	4	3	4	2	5	0	69	22
4 - 5	Jan	Fröhlich	6.A	G Praha - Mezi šk.	4	5	0	4	1	4	4	69	22
6	Jakub	Galgonek		GPB Frýdek-Místek	4	—	—	4	—	7	3	90	18
7	Zdeněk	Čejka		G Praha - U Lib. zámku	2	—	—	4	1	8	2	71	17
8 - 9	Ľuboš	Bednárik	2.F	G Trenčín	2	—	3	—	5	4	2	70	16
8 - 9	Michal	Hajn		G Jihlava	2	2	—	3	—	8	1	64	16
10 - 11	Miroslav	Šulc	kvinta B	G Ústí n. L. - Stavbařů	1	0	0	2	4	4	4	47	15
10 - 11	Ondřej	Vencálek	4.B	G Frýdek-Místek - ČSA	—	—	0	5	—	7	3	79	15
12 - 13	Matej	Dubový	2.B	G Trenčín	2	—	3	—	4	2	2	57	13
12 - 13	Jiří	Palek	2.A	G Nové Strašecí	2	—	—	—	3	8	0	65	13
14	Pavel	Kwiecien	2.A	G Dvůr Králové	—	—	—	4	—	6	2	75	12
15	Jakub	Kratochvíl		G Čáslav	—	—	0	4	4	3	—	58	11
16	Lenka	Beranová	sexta C	G Klatovy	—	—	—	—	—	7	2	75	9
17 - 19	Miroslav	Frost	kvinta A	G Brno - Elgartova	0	—	0	—	0	5	3	35	8
17 - 19	Milan	Jalový	kvinta A	G Blansko	2	2	—	4	—	—	—	62	8
17 - 19	Karol	Martinka	2.G	G Trenčín	—	—	3	—	1	4	—	53	8
20 - 22	Miroslav	Kačena	septima	G Trenčín	1	—	0	4	—	2	—	37	7
20 - 22	Jiří	Kosina	sexta	G Blansko	2	1	—	4	—	—	—	54	7
20 - 22	Jaroslava	Schovancová		G Praha	0	1	0	1	0	4	1	22	7
23 - 25	Matěj	Görner		G Praha	0	—	0	4	0	—	2	32	6
23 - 25	Zdenka	Marková	A	G Holešov	2	—	—	2	—	2	0	30	6
23 - 25	Jana	Nováková	A	G Žďár n. Sázavou	—	—	—	1	4	—	1	50	6
26 - 28	Iva	Kouřilová	2.B	OA Blansko	1	—	3	1	—	—	0	33	5
26 - 28	Miroslav	Krůs	2.A	G Klatovy	0	—	—	3	—	—	2	42	5
26 - 28	Michal	Zapletal	P2C	G Rožnov p. R.	—	—	0	4	0	—	1	33	5
29 - 31	Jiří	Eliášek	2.B	G Trutnov	0	—	—	3	—	—	—	38	3
29 - 31	Zuzana	Svobodová		G Zlaté Moravce	0	—	3	—	0	—	0	20	3
29 - 31	David	Šubrt		G Děčín	0	—	0	—	3	—	—	27	3
32 - 35	Petr	Čech	2.A	G Přerov	2	—	—	—	—	—	—	50	2
32 - 35	Anna	Fučíková		G Třebíč	1	0	0	0	0	1	0	6	2
32 - 35	Michal	Kabát	2.A	G Púchov	—	—	—	2	—	—	—	50	2
32 - 35	Jindřich	Šťástka	2.E	G Sokolov	2	0	0	—	—	—	—	17	2
36	David	Herčík		G Liberec	0	0	0	—	1	—	—	6	1
37 - 46	Otakar	Dokoupil	2.B	G Přerov	0	—	0	—	—	—	—	0	0
37 - 46	Eva	Haluzová	2.B	G Uh. Brod	—	—	0	—	0	—	—	0	0
37 - 46	Peter	Murárik	2.G	G Trenčín	0	—	0	—	0	—	—	0	0
37 - 46	Lenka	Němcová	2.A	SGŠ Bratislava	—	—	0	—	—	—	—	0	0
37 - 46	Jakub	Ondráček	A	G Zábřeh	—	—	0	0	0	—	—	0	0
37 - 46	Stanislav	Páca	2.A	COP Hronov	—	—	0	—	—	—	—	0	0
37 - 46	Ondřej	Srba	B	G Příbor	0	—	0	—	0	—	—	0	0
37 - 46	Šárka	Staňková		G Sedlčany	0	—	0	—	—	—	0	0	0
37 - 46	Jiří	Tobola			0	0	0	—	0	—	—	0	0
37 - 46	Stanislav	Trtek		G Uherské Hradiště	0	—	0	—	—	—	—	0	0

Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S1	%	I
	Student	*Pilný*	*F.1*	*MFF UK*	*4*	*5*	*3*	*4*	*4*	*8*	*4*	*100*	*32*
1	Miroslav	Hejna	5A8	G Rychnov n. K.	4	6	0	4	5	8	4	97	31
2	Luboš	Matásek	kvinta A	G Plzeň - Mikuláš. nám.	2	—	3	4	3	7	3	81	22
3 - 5	Michal	Bareš	kvinta A	G Plzeň - Mikuláš. nám.	1	—	3	2	3	5	4	67	18
3 - 5	Petr	Šimek	1.A	G Blansko	2	2	1	4	2	6	1	56	18
3 - 5	Jaroslav	Trnka	B	G Praha	2	2	3	3	0	4	4	56	18
6 - 7	Václav	Cviček	3.A	G Frýdek-Místek - ČSA	2	—	0	3	0	7	4	59	16
6 - 7	Marek	Vyšínka		G Brno	0	5	—	4	0	6	1	55	16
8 - 9	Karel	Tůma	kvinta A	G Moravská Ostrava	2	—	0	4	1	4	4	56	15
8 - 9	Václav	Varvařovský	kvinta A	G Plzeň - Mikuláš. nám.	2	—	3	4	1	3	2	56	15
10	Lukáš	Chvátal	5A8.	G Brno - Vejrostova	2	—	3	4	1	—	4	74	14
11	Tibor	Vansa		G Moravská Ostrava	2	1	0	0	—	6	4	46	13
12 - 13	Petr	Pošta		G Pardubice	—	—	—	3	4	—	4	92	11
12 - 13	Jan	Prachař		G Rychnov n. K.	2	—	0	2	0	3	4	41	11
14 - 15	Barbora	Galaczová	B	G Třinec	—	—	—	4	—	5	—	75	9
14 - 15	Jan	Klusoň	kvinta	G Litomyšl	—	—	0	2	0	7	—	47	9
16	Vít	Šípal	V5.B	G Ústí n. L. - Jateční	0	—	—	4	0	3	1	33	8
17 - 18	Markéta	Růžičková	A	G Cheb	—	—	—	—	1	6	—	44	7
17 - 18	Jan	Smrek		G Bratislava	0	0	3	—	0	3	1	25	7
19	Pavel	Čížek	kvinta	G Kralupy n. Vl.	—	—	3	—	—	—	3	86	6
20	Miroslav	Zgažar		SPŠCH Ostrava	0	2	—	2	—	—	1	29	5
21 - 23	Petr	Gibas	A	G Praha - Zborovská	0	—	3	1	0	—	—	27	4
21 - 23	Zuzana	Kopová		G Pardubice	—	—	3	1	—	—	—	57	4
21 - 23	Lukáš	Snášel	1.B	COP Hronov	—	1	—	—	—	—	3	44	4
24 - 27	Ondrej	Klučka		G Bratislava	0	—	3	—	—	—	—	43	3
24 - 27	Jan	Křivka	B	COP Hronov	0	1	0	—	0	0	2	11	3
24 - 27	Jaroslav	Kudlička	kvinta A	G Hodonín	—	—	—	—	—	3	0	25	3
24 - 27	Lenka	Pinkavová	sexta	G České Budějovice	—	—	—	3	—	—	—	75	3
28 - 30	Jitka	Bačová		G Olomouc	—	—	—	2	0	—	—	25	2
28 - 30	Tereza	Cvejnová		G Písek	1	—	0	1	—	—	—	18	2
28 - 30	Miroslav	Havelka		G Zastávka	0	1	0	0	0	1	0	6	2
31	Stanislav	Mlenský	1.B	COP Hronov	0	1	0	—	0	—	—	6	1
32 - 34	Pavel	Klouda		G Kyjov	0	—	0	—	0	—	—	0	0
32 - 34	Martina	Kosová		G Blovice	0	—	—	—	0	—	0	0	0
32 - 34	Zdeněk	Stupňánek		G Znojmo	0	—	—	—	—	—	—	0	0

Kategorie prvních ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S1	%	I
	Student	*Pilný*	*F.1*	*MFF UK*	*4*	*5*	*3*	*4*	*4*	*8*	*4*	*100*	*32*
1	Alexadr	Kazda		G Praha	3	—	0	4	3	1	4	56	15
2	Martin	Váňa	D	SPSŠ Praha	2	5	0	4	0	0	1	38	12
3	Petr	Houštěk	tercie	G Pelhřimov	0	—	3	2	0	3	4	44	12
4	Mária	Šedivá	A	ZŠ Trenčín	—	—	3	—	1	2	—	40	6
5 - 7	Jan	Kuchař		GJKT	0	3	0	—	—	2	—	25	5
5 - 7	Přemysl	Rubeš		G Pardubice	0	—	3	2	—	—	—	45	5
5 - 7	Hana	Suchomelová	A	ZŠ Trenčín	—	—	3	—	0	2	—	33	5
8	Michal	Havel		COP Hronov	—	1	—	—	—	—	2	33	3
9 - 10	Miroslav	Frantes		G Benešov	0	—	0	2	—	—	—	18	2
9 - 10	Lucie	Vasická		G Most	—	—	0	0	2	—	—	18	2
11 - 13	Jana	Babováková		G Most	1	—	0	0	0	—	—	7	1
11 - 13	Markéta	Novotná		G Hranice	—	—	—	1	—	—	—	25	1
11 - 13	Zdeněk	Váňa	B	COP Hronov	—	1	—	—	—	—	—	20	1
14 - 17	Filip	Kozel	A	COP Hronov	—	—	0	—	0	0	—	0	0
14 - 17	Jan	Křetínský		G Brno	0	—	—	—	—	—	—	0	0
14 - 17	Jan	Musil		G Jihlava	0	—	0	0	0	—	—	0	0
14 - 17	Zbyněk	Pospíšil		G Litovel	0	—	0	—	0	—	0	0	0

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením vnějších vztahů a propagace MFF UK, je organizován studenty MFF UK za podpory Ústavu teoretické fyziky MFF UK a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.