14. ročník, úloha II . 3 ... šroubovice *(5 bodů; průměr ?; řešilo 14 studentů)*

Mějme nekonečný drát stočený do pravotočivé šroubovice (helixu). Drát je rovnoměrně nabitý a osa helixu je totožná s osou z. Do vzniklého pole pošleme nabitou částici (drát je tenký, takže do něj částice nenarazí). V jistém časovém okamžiku známe její p_z a L_z, tedy z-ové komponenty hybnosti a momentu hybnosti. Můžeme v jiném okamžiku určit p_z, známe-li v tomto okamžiku L_z?

(Problém lze vyřešit zcela exaktně. Naproti tomu není určitě nezajímavé zkusit situaci počítačově simulovat a dostat tak hledanou závislost v podstatě experimentálně, případně ověřit teoretickou předpověď.) *Navrhl Ruda Sýkora.*

Tato úloha měla za cíl demonstrovat postup řešení fyzikální úlohy na základě symetrie. Toto částečně všichni řešitelé pochopili (mimo jiné proto, že se to zdá velmi přirozené). Bohužel nikdo nenašel symetrii úlohy zadané, ale jen úlohy zjednodušené, kde vzniká symetrie daleko nápadnější. Šlo o zanedbání vlastní vlastnosti spirály – toho, jak vlastně vypadá – má závity. Většina z vás z ní totiž udělala symetrický nabitý válec (jakoby velice hustá spirála), u kterého se pak z důvodu, že budí pěkné radiální pole nezávislé na z-ové souřadnici, zachovává nezávisle p_z i L_z (podél osy z nepůsobí na částici žádná síla, zachovává se p_z; síla působící na částici míří vždy ve směru procházejícím osou, má tedy nulový moment vůči ose, což znamená zachování L_z).

Pro naši zadanou úlohu bylo podstatné si všimnout následující symetrie. Když jsme v nějakém bodě a posuneme se o jistý úhel φ (pro jednoduchost v kladném smyslu) okolo z-ové osy (zachovavše vzdálenost od osy) zároveň s tím, že se ve shodě se stoupaním spirály ještě posuneme mírně nahoru (pro pravotočivou spirálu), dostaneme se do bodu, ve kterém vše vypadá stejně, jako v bodě původním. Tím myslíme to, že se při takovém posunutí nezměnil potenciál. Ale to také znamená, že podél směru „dokola šikmo nahoru“ nepůsobí síla! Kdyby působila a my se posunuli popsaným způsobem, konali bychom práci, což by bylo v rozporu s konstantností potenciálu. A toho teď využijeme, napíšeme kolmost síly na náš směr matematicky.

Sílu působící na částici v určitém bodě (označme vzdálenost částice od osy r) můžeme rozložit na složky ve válcových souřadnicích F_r, F_φ a F_z (F_r je složka síly ve směru kolmo od osy, F_φ leží stejně jako F_r v rovině kolmé na osu a je na F_r kolmá, obíhajíce osu v kladném smyslu, F_z je složka rovnoběžná s osou). V těchto souřadnicích můžeme náš směr „dokola šikmo nahoru“ psát v daném bodě jako vektor s válcovými souřadnicemi $(0, 2\pi r, h)$ (h je stoupání spirály; to, že je to správný vektor poznáme z toho, co říká – když půjdete kousek podél mě, zvednete se na tomto kousku o správnou vzdálenost, která odpovídá faktu, že jednou dokola musí znamenat zdvih h). Náš závěr o kolmosti síly na tento směr vyjádříme nulovostí skalárního součinu

$$(F_r, F_\varphi, F_z) \cdot (0, 2\pi r, h) = 0\,.$$

Dále si už jen uvědomíme, že platí $F_z = \mathrm{d}p_z/\,\mathrm{d}t$ a $rF_\varphi = M_z = \mathrm{d}L_z/\,\mathrm{d}t$. Pak se předchozí rovnice píše

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}2\pi r + \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}h = 0\,.$$

Dostáváme tedy

$$L_z + p_z\frac{h}{2\pi} = \mathrm{konst}\,,$$

což je námi hledaná souvislost mezi L_z a p_z.

Pokud by se tedy někdo pokusil úlohu úspěšně modelovat (simuloval by let částice a kreslil by v různých časech graf např. L_z proti p_z), měl by dostat body okolo přímky.

Ruda Sýkora

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.