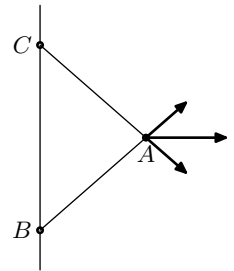


14. ročník, úloha IV. 1 ... vesmírná stříkačka (5 bodů; průměr ?; řešilo 20 studentů)

Představte si, že ve vakuu mimo gravitační pole stříkáme vodní paprsek. Kromě tohoto paprsku je zde kolmo (mimoběžně) k jeho původnímu směru umístěn nabitý nekonečný drát s délkovou hustotou náboje λ . Voda je stříkána z velmi velké vzdálenosti s počáteční rychlostí v . Vzdálenost přímky, ve které je stříkána voda (ve které se na začátku pohybuje vodní paprsek) a drátu je d . Spočítejte úhel, o který se odchýlí vodní paprsek od původního směru. Molekuly vody si představte jako elektrické dipóly, jejich vzájemné působení zanedbejte a také zanedbejte jejich moment setrvačnosti (tj. představte si, že všechna hmotnost molekuly je soustředěna uprostřed mezi náboji, které jsou nehmotné).

Zadal Karel Kouřil unešen odchylováním vody tekoucí z kohoutku pomocí nabitého hřebínku.

Nejprve musíme vypočítat sílu, kterou nabitý drát působí na jednu molekulu vody. K tomu je potřeba určit elektrické pole drátu – viz obrázky 1 a 2. Nejdrívě uvažujeme případ, kdy je drát nabitý kladně (pro tento případ jsou obrázky 1 a 2 nakresleny). Výsledné pole \mathbf{E} v bodě A je dáno sečtením příspěvků $\Delta\mathbf{E}$ od jednotlivých bodů drátu. Celkový příspěvek $\Delta\mathbf{E}$ od bodů B a C , které jsou symetrické vůči bodu S , leží v rovině kolmé na drát a má směr spojnice bodů A a S . Tuto vlastnost má i výsledné pole \mathbf{E} v libovolném bodě, což je důsledkem nekonečnosti drátu. Zbývá tedy určit velikost E tohoto pole. To lze udělat sečtením (v tomto případě integrací) příspěvků od jednotlivých bodů drátu. V našem případě lze užít také Gaussovu větu, která říká, že celkový tok elektrické intenzity \mathbf{E} uzavřenou plochou S (integrál na levé straně) je přímo úměrný celkovému náboji Q v prostoru vymezeném plochou S

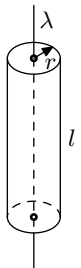


Obr. 1

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Uvažujme válec o poloměru r a výšce l , jehož osa splývá s drátem (viz obrázek 2). Celkový náboj Q uvnitř válce je roven λl . Tok elektrické intenzity podstavami pláště je nulový, neboť vektor \mathbf{E} leží v rovině podstav. Protože je elektrická intenzita \mathbf{E} kolmá na plášť válce ve všech bodech a její velikost je na celém plášti stejná, je tok pláštěm válce rovný součinu povrchu pláště a velikosti elektrické intenzity E . Gaussova věta má tedy tvar

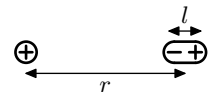
$$2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$



Obr. 2

Pokud by byl drát nabitý záporně, potom se změnil pouze směr elektrického pole na opačný.

Ze známého elektrického pole drátu již můžeme určit sílu působící na jednu molekulu vody (neuvažujeme vzájemné působení molekul vody). Označme r vzdálenost středu molekuly od drátu. Molekulu si můžeme představit jako dva pevně spojené náboje opačného znaménka o velikosti Q , jejichž vzájemná vzdálenost je l . Nejprve opět uvažujeme případ, kdy je drát nabitý kladně. Pokud je moment setrvačnosti dostatečně malý, potom je spojnice obou nábojů v každém okamžiku rovnoběžná s vektorem \mathbf{E} elektrické intenzity – viz obrázek 3. Blíže k drátu je vždy záporně nabitá část molekuly, neboť tato poloha je narozdíl od opačné (ta je také



Obr. 3

rovnovážná) stabilní. Molekula vody je tedy k drátu přitahovaná silou F , pro kterou platí:

$$F = Q \left[E\left(r - \frac{l}{2}\right) - E\left(r + \frac{l}{2}\right) \right] = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2}} - \frac{1}{r + \frac{l}{2}} \right) = \frac{\lambda Q l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 - \frac{l^2}{4}}.$$

Součin Ql je roven velikosti elektrického dipólového momentu p jedné molekuly vody. Vzdálenost nábojů l je mnohem menší než vzdálenost r molekuly od drátu. Na jednu molekulu vody tudíž působí přitažlivá síla o velikosti

$$F = \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Snadno nahlédneme, že v případě záporně nabitého drátu je výsledná síla stejná včetně směru působení.

Protože zanedbáváme vzájemné působení molekul, bude výsledný pohyb vodního paprsku stejný jako pohyb jedné molekuly. (Molekuly mezi sebou působí poměrně značnými silami a pohybují se velkými rychlostmi v důsledku tepelného pohybu. Výslednice mezimolekulových sil působících na jednu konkrétní molekulu je však prakticky nulová, neboť mezimolekulové síly mají různé směry. Tepelný pohyb molekul je chaotický, a proto k pohybu kapaliny jako celku nepřispívá. To znamená, že pokud bychom chtěli zpsnit náš výpočet uvažováním vzájemného působení molekul, potom by bylo nejdůležitější vzájemné působení elektrických dipólů molekul, které se v důsledku působení vnějšího pole (pole drátu) orientují. Nami použitá aproximace má tedy oprávnění.)

Vzhledem k počátečním podmínkám pohybu a charakteru silového působení drátu na molekulu bude pohyb vodního paprsku rovinný. (Pro obecnou počáteční rychlost to ale není pravda!) Síla působící na molekulu v této rovině klesá s druhou mocninou vzdálenosti od drátu. Pohyb molekul v tomto poli bude tedy stejný jako pohyb hmotného bodu pohybujícího se v gravitačním poli způsobeném bodovým tělesem umístěným v průsečíku drátu a roviny pohybu vodního paprsku. Vodní paprsek se tedy bude pohybovat po hyperbole. Zbývá určit parametry této trajektorie. To stejným způsobem jako v úlohu ze III. dílu seriálu.

Délku hlavní poloosy hyperboly označme a a délku vedlejší poloosy b . Z geometrie hyperboly plyne $b = d$ a podle seriálu platí

$$a = \frac{k}{mv^2}.$$

Úhel ϑ je úhel, o který se vodní paprsek odchýlí od původního směru. Mezi úhlem φ (úhel asymptoty a hlavní osy) a úhlem ϑ platí vztah $\vartheta = \pi - 2\varphi$. Dostáváme tedy

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{a}{b} = \frac{k}{mv^2 d}.$$

Vodní paprsek se tedy odchýlí od původního směru o úhel

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 m v^2 d}.$$

Hmotnost jedné molekuly vody lze snadno určit z Avogadrovy konstanty a z molární hmotnosti vody (určí se z relativních atomových hmotností vodíku a kyslíku). Velikost elektrického dipólového momentu jedné molekuly vody lze například určit měřením statické elektrické permitivity vody.

Námi odvozený vztah pro odklon vodního paprsku bude se skutečností souhlasit tím více, čím menší bude teplota vody (musí ale zůstat kapalná). Je to způsobeno tím, že při vyšší teplotě je energie tepelného pohybu větší. Tepelný pohyb se totiž netýká pouze translačních stupňů volnosti ale i vnitřních stupňů volnosti molekul (např. rotačních a vibračních). Vzhledem k tepelné energii v rotačních stupních volnosti nedojde k úplné orientaci elektrického dipólu do směru vnějšího elektrického pole. Důsledkem je pak menší přitažlivá síla a tedy i menší odklon vodního paprsku. Naše řešení rovněž neuvažuje skutečnost, že vlivem vnějšího pole dochází k polarizaci molekul vody (zvětšuje se velikost jejich elektrického dipólového momentu). V tomto případě tento jev není příliš výrazný (narozdíl od jiných kapalných dielektrik), neboť velikost permanentního dipólového momentu molekul vody je poměrně velká.

Karel Kolář