14. ročník, úloha IV . 3 ... *měděný drát* *(3 body; průměr ?; řešilo 38 studentů)*

Máme 50 kg mědi. Jaký nejdelší drát z tohoto množství materiálu lze vytvořit pro přenášení elektrického proudu 1 A, je-li okolní teplota 20 °C ? (Tepelnou kapacitu okolního vzduchu a přírody považujte za nekonečnou.) *Úlohu navrhl Miroslav Panoš.*

V důsledku vnitřního odporu měděného drátu (s kruhovým průřezem) vzniká při průchodu elektrického proudu výkon, který se projevuje jako Jouleovo teplo a drát se zahřívá. Jedinou podmínkou je, aby se drát neroztavil. Uvnitř drátu vzniká tepelný výkon P daný vztahem $P = RI^2$, kde I je konstatní proud 1 A a R je elektrický odpor drátu daný vztahem vyjadřujícím zároveň závislost el. odporu na termodynamické teplotě T $R = \varrho_0[1 + \beta(T - T_v)]\, l/\pi\, r^2$, kde T_0 je teplota, při níž má měď měrný el. odpor ϱ_0, β je teplotní součinitel el. odporu mědi a r je poloměr drátu.

Drát se na povrchu ochlazuje tepelnou výměnou s okolím a tepelným zářením. Protože ze zadání uvažujeme okolí s nekonečně velkou tepelnou kapacitou, výměnu tepla bude charakterizovat pouze přestup tepla na rozhraní měď-vzduch daný vztahem $Q_1 = \gamma(T - T_v)\, 2\pi\, r\, l$, kde Q_1 tepelný výkon přestupu tepla, T_v je teplota vzduchu a γ je příslušný koeficient.

Budeme-li považovat drát za absolutně černé těleso, bude tepelný výkon zářením Q_2 daný Stefan-Boltzmannovým vztahem $Q_2 = \sigma(T^4 - T_v^4)\, 2\pi\, r\, l$, kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta. Celkový ochlazující tepelný výkon je tedy součet Q_1 a Q_2: $Q = Q_1 + Q_2$. Mezi výkony P a Q musí nastat rovnováha při teplotě T, která leží těsně pod bodem tání mědi, z čehož získáme minimální poloměr drátu $r_{\min}$.

$$\frac{\varrho_0[1 + \beta(T - T_0)]\, l\, I^2}{\pi\, r^2} = [\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)]\, 2\pi\, r\, l,$$

vyjádřením r

$$r_{\min}^3 = \frac{\varrho_0[1 + \beta(T - T_0)]\, I^2}{[\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)]\, 2\, \pi^2}.$$

Uvážíme-li navíc teplotní roztažnost mědi, zkorigujeme poloměr i jednotku délky faktorem $[1 + \alpha(T - T_v)]$, kde α je součinitel délkové roztažnosti

$$r_{\min}^3 = \frac{\varrho_0[1 + \beta(T - T_0)]\, I^2}{[\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)]\, [1 + \alpha(T - T_v)]^3\, 2\, \pi^2}.$$

Nyní, známe-li $r_{\min}$ vypočteme maximální délku drátu L (za normální teploty) takto tenkého drátu o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{kg}$. Zřejmě platí $L = m/\varrho\, \pi r_{\min}^2$ a tedy

$$L = \frac{m\, \pi^{1/3}\, [1 + \alpha(T - T_v)]^2}{\varrho} \left(\frac{[2\, \gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)]}{\varrho_0[1 + \beta(T - T_0)]\, I^2} \right)^{2/3}.$$

Po dosazení tabulkových hodnot $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 10\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$, $T = 1356\,\mathrm{K}$, $T_0 = 273\,\mathrm{K}$, $\varrho = 8930\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a námi dané teploty vzduchu $T_v = 293\,\mathrm{K}$ a hmotnosti $m = 50\,\mathrm{kg}$ lze získat odhad $L \approx 2200\,\mathrm{km}$.

Proto, abychom mohli spojit vznik tepla uvnitř vodiče a jeho ochlazení na povrchu, je třeba uvážit tepelnou vodivost drátu, díky níž se dostane teplo k povrchu. Aby tomu tak bylo, musí být ale určitý rozdíl teplot mezi středem a povrchem drátu, čímž ale vznikne i rozdílný měrný el. odpor a tím i nižší výkon uprostřed drátu, který tak částečně zpětně reguluje zvýšenou teplotu.

Samozřejmě lze problém řešit diferenciální rovnicí 2. řádu v polárních souřadnicích, která však nakonec ukáže, že díky velmi dobré tepelné vodivosti mědi a velmi malé závislosti odporu na teplotě bude rozdíl teplot zanedbatelný. Navíc relativně špatné ochlazování na povrchu limituje teplotní spád uvnitř drátu.

Další problémy s řešením se objevily v souvislosti s konstantou přestupu tepla. Jednak byl problém ji najít a jednak tato konstanta už zahrnuje výměnu tepla zářením. Ale lze tedy předpokládat, že platí pro malé teploty a tím pádem při vyšších teplotách, kdy tok zářením roste se čtvrtou mocninou přejde lineární vztah pouze ve vztah pro výměnu tepla vedením.

Jakub Holovský

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.