14. ročník, úloha VI . P ... *domino* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 14 studentů)*

Určitě už jste si někdy hráli s dominem, tedy kvádry postavenými v řadě za sebou, které po shození prvního z nich lavinovitě padají. Pokuste se odhadnout rychlost, kterou se tato vlna šíří, a jak tato rychlost závisí na rozměrech a hmotnosti kvádrů, vzdálenosti kvádrů . . . Popište podrobně model, který ve svých úvahách použijete, a posuďte, nakolik odpovídá realitě.

Problém, který organizátorům již dlouho vrtal hlavou.

Předpokládejme, že kostky domina se nachází na dosti drsné podložce, a proto se po ní nesmeknou. V rovnovážné poloze se kostka otáčí úhlovou rychlostí ω_0. Ze ZZE pak odvodíme, že těsně před nárazem do sousední kostky bude mít rychlost

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2mg\left[\frac{h}{2}(1-\cos\varphi) + \frac{a}{2}\sin\varphi\right]/J}\,,$$

kde $\frac{1}{2}h(1-\cos\varphi)$ je pokles těžiště, $J \approx \frac{1}{3}mh^2$ je moment setrvačnosti vzhledem k ose O. Nyní k samotnému rázu se sousední kostkou. Předpokládejme, že rotace první kostky se po rázu prakticky zastaví (to není úplně pravda, protože první kostka ještě stále rotuje a sklouzává po druhé kostce, čímž je druhá kostka ještě urychlována). Při tomto předpokladu $Ih = J\omega_1$, druhá kostka získá moment hybnosti

$$J\omega_2 = (I\cos\varphi)h\cos\varphi\,.$$

Rychlost se ustálí, pokud bude $\omega_0 = \omega_2$.

$$\sqrt{\omega_0^2 + mg[h(1-\cos\varphi) - a\sin\varphi]/J}\cdot\cos^2\varphi = \omega_0\,,$$

$$\omega_2 = \omega_1\cos^2\varphi\,.$$

Přitom víme, že $\sin\varphi = d/h$, kde d je mezera mezi kostkami. Horní konec kostky se po rázu pohybuje rychlostí $\omega_0 h$. Pokud zanedbáme, že se pohybuje po kružnici, čímž se jeho vodorovná rychlost snižuje, pak rychlost šíření mezi dvěma rázy je pak $\omega_0 h$. První kostka narazí do zadního konce druhé kostky, ale spolu se zadním koncem se rozpohybuje i konec přední, vzruch tak přeskočí o tloušťku kostky. Rychlost šíření se tím zvýší v poměru $(d+a)/d$, kde a je tloušťka kostky. Pro rychlost pak

$$v_1 = \frac{d+a}{d}\sqrt{\frac{3g[h(1-\cos\varphi) - a\sin\varphi]\cos^4\varphi}{1-\cos^4\varphi}}\,, \tag{1}$$

kde $\sin\varphi = d/h$. Přitom musí být splněno

$$h(1-\cos\varphi) - a\sin\varphi \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \geq \frac{a}{h}\,.$$

Ve skutečnosti se vlna může šířit i pokud je $\operatorname{tg}(\varphi/2) \leq a/h$. Do rázu se totiž zapojuje více kostek, které dodají potřebnou energii k převrhnutí. Odtud vidíme, že model může být správný jen pro větší φ. Pro malé φ z modelu plyne, že se vlna vůbec šířit nemůže, což je v rozporu se skutečností. Tento model dává spodní odhad rychlosti šíření vlny.

Jiný model. Protože potenciální energie každé kostky se změní (při zanedbání tloušťky kostky) o $h(1-\cos\alpha)/2$, kde $\operatorname{tg}\alpha = d/a$, tak předpokládáme, že i maximální kinetická energie se bude řádově pohybovat kolem této hodnoty.

$$\frac{1}{2}J\Omega^2 \approx \frac{1}{2}mgh(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{h}}\,.$$

Pro jednoduchost pokládejme Ω za úhlovou rychlost poslední padající kostky. Kostky se mezi těmito dvěma nárazy otočí o $\varphi = \arcsin(d/h)$, což trvá dobu $t = \arcsin(d/h)/\Omega$. Za tuto dobu vlna urazí vzdálenost $a + d$. Pro rychlost vlny tedy platí

$$v_2 = \frac{(a+d)}{\arcsin\frac{d}{h}}\sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{h}}\,. \tag{2}$$

Pro rozměry běžných dominových kostek dávají oba výsledky řádově stejné výsledky $v \approx 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tento odhad je samozřejmě pouze řádový.

V autorském řešení bylo použito myšlenek Mirka Hejny.

Martin Soška

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.