15. ročník, úloha II . S ... paradoxy *(7 bodů; průměr ?; řešilo 37 studentů)*

a) *Působením rychlých částic kosmického záření vznikají vysoko v atmosféře částice zvané mezony μ. Tyto částice žijí po dobu $\tau = 2.10^{-6}$ s a pak se rozpadají na jiné částice. Typická rychlost vzniklých mezonů μ je $v = 0{,}998c$. Mezony μ tudíž urazí vzdálenost $v\tau = 600$m. Jak je tedy možné, že jsou detekovány na zemském povrchu, když vznikají ve výškách větších než 6km? Tento paradox vysvětlete jak z hlediska soustavy spojené se zemským povrchem tak z hlediska soustavy spojené s mezonem μ.*

b) *Mějme raketu, která odstartuje ze Země k jedné vzdálené hvězdě. Po dosažení hvězdy se opět vrátí zpět na Zemi. Na své cestě se raketa pohybuje konstantní rychlostí v blízkou rychlosti světla. Užitím diletace času dostaneme, že z hlediska pozorovatele na Zemi půjdou pomaleji hodiny na raketě. Podle pozorovatele na raketě však půjdou pomaleji hodiny na Zemi. Tento paradox se nazývá paradoxem dvojčat (hodiny na raketě a na Zemi lze nahradit dvojčaty). Užitím Lorentzovy transformace ukažte, že ve skutečnosti oba pozorovatelé dojdou ke stejnému závěru. Určete, ve kterém případě je diletace času užita chybně, a vysvětlete proč.*

c) *V mnohých knihách naleznete následující vysvětlení paradoxu dvojčat: Raketa není inerciální soustavou, neboť se alespoň v některých fázích letu musí pohybovat se zrychlením, a proto nelze užít STR. Přeformulujte tedy paradox dvojčat tak, aby se vše odehrávalo v inerciálních systémech. (Nápověda: K přenosu informace lze užít například elektromagnetický signál).*

a) Pro rychlost 0,998c je hodnota faktoru γ rovna přibližně 16. Uvedená hodnota doby života τ mezonu μ odpovídá případu, kdy je tato částice vůči pozorovateli v klidu. Z hlediska pozorovatele na Zemi bude tedy doba života mezonu μ vlivem diletace času šestnáctkrát delší. Mezon μ v této soustavě tudíž urazí šestnáctkrát větší vzdálenost. To znamená, že může dorazit až k zemskému povrchu.

Ke stejnému výsledku dojdeme i v soustavě spojené s mezonem μ. Vlivem kontrakce délek jsou totiž pro mezon μ všechny „pozemské vzdálenosti“ šestnáctkrát kratší. Na počátku je tak zemský povrch ve vzdálenosti pouhých 375m od mezonu μ a přibližuje se k němu téměř rychlostí světla. Zemský povrch tedy „dopadne“ na mezon μ dříve, než se mezon stačí rozpadnout.

b) Vzdálenost Země a hvězdy v soustavě spojené se Zemí označme l_0. Celková doba letu je v obou vztažných soustavách rovna dvojnásobku doby letu ze Země ke hvězdě. Stačí se tedy omezit na první polovinu letu. Počátek prostorových souřadnic zvolme na Zemi. Čas $t = 0$ nechť odpovídá okamžiku startu rakety ke hvězdě. Souřadnice v soustavě spojené s raketou volme tak, aby bylo možné užít speciální Lorentzovu transformaci (transformace odvozená v druhé kapitole).

Nejprve řešme problém z hlediska pozorovatele na Zemi. Start rakety má v této soustavě souřadnice $x = 0$, $t = 0$. Raketa dorazí ke hvězdě za čas $t_z = l_0/v$. Přílet rakety ke hvězdě tedy odpovídá souřadnicím $x = l_0$, $t = t_z$. Pomocí Lorentzovy transformace získáme souřadnice těchto událostí v soustavě spojené s raketou. Pro start rakety tak dostáváme $x' = 0$, $t' = 0$ a pro přílet rakety obdržíme souřadnice

$$x' = \gamma\left(l_0 - v\frac{l_0}{v}\right) = 0, \qquad t' = \gamma\left(\frac{l_0}{v} - \frac{vl_0}{c^2}\right) = \frac{l_0}{\gamma v}.$$

Pro pozorovatele na raketě bude tedy doba letu t_r rovna

$$t_r = \frac{t_z}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma v}.$$

Za náš vztažný systém nyní zvolme raketu. Start rakety má opět souřadnice $x = 0$, $t = 0$. Vzhledem ke kontrakci délek je vzdálenost hvězdy a Země v naší soustavě rovna $l = l_0/\gamma$. Hvězda i Země se vůči nám pohybují rychlostí $-v$. Hvězda k nám tedy doletí v čase $t = l/v = l_0/\gamma v$. Doba letu rakety t_r v našem systému je tedy rovna hodnotě $l_0/\gamma v$. Souřadnice příletu hvězdy v naší soustavě jsou $x = 0$, $t = t_r$. Lorentzovou transformací obdržíme odpovídající souřadnice v soustavě spojené se Zemí. Startu ze Země opět odpovídají souřadnice $x' = 0$, $t' = 0$. Souřadnice příletu hvězdy jsou dány vztahy

$$x' = \gamma v \frac{l_0}{\gamma v} = l_0, \qquad t' = \gamma \frac{l_0}{\gamma v} = \frac{l_0}{v}.$$

Pro pozorovatele na Zemi tudíž trvá let rakety po dobu t_z

$$t_z = \gamma t_r = \frac{l_0}{v}.$$

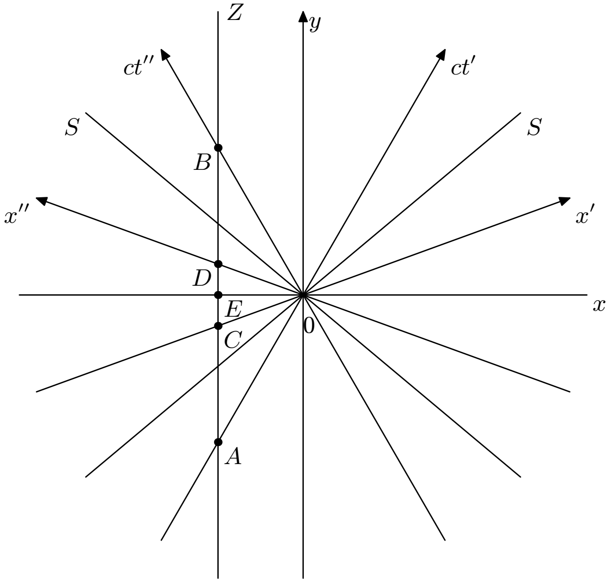
Vidíme tedy, že k žádnému paradoxu ve skutečnosti nedochází. Diletace času je chybně použita pozorovatelem na raketě. Diletaci času lze totiž užít pouze v případě, kdy jsou události v pohybující se soustavě soumístné (přesněji nastávají v rovině kolmé na rychlost), jak plyne z jejího odvození.

c) Mějme dvě rakety pohybující se proti sobě po spojnici Země a hvězdy. Obě rakety se pohybují rovnoměrně přímočaře rychlostí v vůči Zemi. Na obě rakety a na Zemi umístíme identické hodiny. Počáteční podmínky pohybu obou raket zvolme tak, aby se obě potkaly u hvězdy. V okamžiku, kdy první raketa mine Zemi, nastavíme na hodinách umístěných na první raketě a na Zemi čas nula. Při potkání obou raket u hvězdy nastavíme na hodinách druhé rakety čas z hodin umístěných na první raketě. Informaci o časovém údaji přeneseme z první rakety na druhou pomocí elektromagnetického signálu. V okamžiku průletu druhé rakety kolem Země pak přeneseme elektromagnetickým signálem informaci o čase, který uplynul na obou raketách během letu mezi Zemí a hvězdou, a porovnáme jej s časem uplynulým na Zemi. Výsledek tohoto porovnání pak nesmí záviset na volbě vztažné soustavy.

Nyní se veškeré „stárnutí dvojčat“ odehrává pouze v inerciálních systémech. Paradox tedy musí být řešitelný v rámci STR, neboť v opačném případě by STR nebyla vnitřně konzistentní teorií.

Paradox dvojčat lze rovněž objasnit znázorněním celé situace v časoprostoru (viz obr. 1). V našem případě vystačíme s dvourozměrným časoprostorem, neboť vše podstatné se odehrává pouze v jednom prostorovém směru. Nečárkované souřadnice odpovídají pozorovateli spojenému se Zemí. Inerciální soustavy spojené s pozorovatelem na raketě mají čárkované souřadnice. Cestě ke hvězdě odpovídají jednou čárkované souřadnice. Dvakrát čárkovanými souřadnicemi je popsán inerciální systém spojený s raketou při zpátečním letu.

Souřadnice v námi uvažovaných systémech jsou zvoleny tak, že světočára (dráha v časoprostoru – celá historie daného objektu) hvězdy splývá s osou ct a světočára pozorovatele na raketě je složena z částí splývajících se světočárou Země označenou Z a s osami ct' a ct''. Do obrázku jsou také zakresleny světočáry označené písmenem S odpovídající světelným signálům, které přicházejí a opouštějí událost O, což je přílet rakety ke hvězdě. Souřadnice všech inerciálních pozorovatelů jsou vůči světočárám S symetrické. To je dáno principem konstantní rychlosti světla. Start rakety ze Země je označen písmenem A. Událost B odpovídá návratu rakety zpět na Zemi.



Obr. 1

Z obrázku vidíme, že v soustavě S je s událostí O současná událost E, zatímco v soustavě S' jsou současné události O a C. Platí tedy $\Delta t'_{OA} = \Delta t'_{CA}$. K získání vztahu mezi $\Delta t'_{CA}$ a Δt_{CA} můžeme použít diletaci času, neboť události C a A jsou v soustavě spojené se Zemí soumístné. Dostáváme tak vztah

$$\Delta t_{CA} = \frac{\Delta t'_{OA}}{\gamma}.$$

Doba odpovídající polovině letu rakety na Zemi je však dána časovým intervalem mezi událostmi A a E. Diletaci času tedy chybně užívá pozorovatel na raketě. Chybějící časový interval mezi událostmi C a E určíme pomocí Lorentzovy transformace. Vzdálenost hvězdy a Země je v soustavě S' dána vztahem $l = v\Delta t'_{OA}$. Dostáváme tedy vztah

$$\Delta t_{EC} = \Delta t_{OC} = \gamma\left(\Delta t'_{OC} + \frac{vl}{c^2}\right) = \gamma\frac{v^2}{c^2}\Delta t'_{OA}.$$

Polovina doby letu rakety na Zemi tudíž trvá

$$\Delta t_{EA} = \left(\gamma\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma}\right)\Delta t'_{OA} = \gamma\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\Delta t'_{OA} = \gamma\Delta t'_{OA}.$$

Tento vztah je identický se vztahem, který obdrží pozorovatel na Zemi užitím diletace času, neboť události E a O jsou v soustavě spojené se Zemí současné a události A a O jsou pro pozorovatele na raketě soumístné.

Události, které se nacházejí mezi událostmi C a D na světočáře Z, se v soustavě spojené s raketou odehrají v jeden okamžik současně s událostí O. Tento „nesmysl“ je způsoben nespojitou změnou rychlosti rakety u hvězdy. Pokud budeme uvažovat rychlou ale spojitou změnu rychlosti rakety, potom se v okolí události O začne rychle natáčet osa x (současnost) pozorovatele na raketě z původní polohy x' do nové polohy x''. Události mezi C a D pro pozorovatele na raketě sice opět proběhnou velmi rychle, ale v tomto případě již různým událostem mezi C a D odpovídají i různé, s nimi současné, události na raketě.

Pokud by na palubě rakety byla lidská posádka, potom by předchozí manévr u hvězdy zřejmě nepřežila z důvodu příliš velkého přetížení. Raketa s lidskou posádkou se tak musí pohybovat se zrychlením po nezanedbatelnou část doby letu. Čas odpovídající letu rakety, který naměří její posádka, lze v tomto případě určit sečtením (integrací) jednotlivých časových intervalů, které posádka stráví ve svých klidových inerciálních soustavách. Ve všech případech vychází, že se posádka rakety vrátí zpět na Zemi mladší, než budou její vrstevníci, kteří zůstanou na Zemi. K tomuto problému se ještě vrátíme v poslední kapitole seriálu, která bude věnována obecné teorii relativity.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.