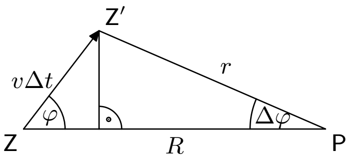
15. ročník, úloha III . S ... *rychlejší než světlo?* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 17 studentů)*

V roce 1994 bylo provedeno měření na rádiových vlnách emitovaných složeným zdrojem z naší Galaxie. Centrum tohoto zdroje je od nás vzdáleno $R = 3{,}86 \cdot 10^{20}$ m. V rádiovém spektru byly pozorovány dva objekty vzdalující se od centra v navzájem opačných směrech. Naměřené úhlové rychlosti těchto objektů byly $\omega_1 = 9{,}73 \cdot 10^{-13}$ rad·s^{-1} a $\omega_2 = 4{,}42 \cdot 10^{-13}$ rad·s^{-1}. Tomu odpovídají příčné lineární rychlosti $v_1 = R\omega_1 = 3{,}76 \cdot 10^8$ m·s^{-1} a $v_2 = R\omega_2 = 1{,}71 \cdot 10^8$ m·s^{-1}. První zdroj se tedy musí pohybovat nadsvětelnou rychlostí! Jak je to možné?

Uvažujte zdroj světla, který se pohybuje v soustavě spojené s pozorovatelem rychlostí v. Rychlost zdroje svírá se spojnicí zdroje a pozorovatele úhel φ. Vzdálenost zdroje a pozorovatele je rovna R. Vypočtěte, jakou úhlovou rychlost zdroje uvidí pozorovatel. Kdy bude úhlová rychlost zdroje odpovídat nadsvětelné příčné rychlosti?

Užitím předchozího výsledku určete, jakou skutečnou rychlostí se pohybují oba objekty za předpokladu, že rychlosti obou zdrojů jsou stejné.

Bod, ve kterém se nachází zdroj světla, označme písmenem Z. Podobně označme polohu pozorovatele bodem P. Vzdálenost bodů Z a P je rovna R. Zdroj se pohybuje rychlostí o velikosti v. Směr pohybu zdroje svírá s úsečkou ZP úhel φ. Za malý časový interval Δt se zdroj světla posune do bodu Z'. Pro vzdálenost r bodů Z' a P dostaneme užitím kosinové věty vztah



$$r^2 = R^2 + (v\Delta t)^2 - 2Rv\Delta t \cos\varphi = $$
$$= R^2 \left(1 + \left(\frac{v\Delta t}{R}\right)^2 - 2\frac{v\Delta t}{R}\cos\varphi\right).$$

Protože je Δt velmi malé, lze zanedbat člen obsahující jej v druhé mocnině. Užijeme-li dále přibližný vztah $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ platný pro $x \ll 1$, pak získáme následující rovnost

$$r = R\left(1 - \frac{v\Delta t}{R}\cos\varphi\right) = R - v\Delta t\cos\varphi.$$

Za čas Δt se změní úhlová poloha zdroje vůči pozorovateli o úhel $\Delta\varphi$. Užitím aproximací $r \approx R$ a $\sin x \approx x$ platné pro $x \to 0$ dostaneme

$$\Delta\varphi \approx \sin\Delta\varphi = \frac{v\Delta t \sin\varphi}{R}.$$

Časový rozdíl Δt_p, který zaznamená pozorovatel mezi světlem přicházejícím z bodů Z a Z', je dán vztahem

$$\Delta t_p = \Delta t + \frac{r - R}{c} = \Delta t\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right).$$

Pro úhlovou rychlost ω zdroje, kterou uvidí pozorovatel, tak platí

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t_p} = \frac{1}{R}\frac{v\sin\varphi}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}.$$

Tomu odpovídá příčná lineární rychlost

$$v_\perp = R\omega = \frac{v\sin\varphi}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}.$$

Rozborem předchozího vztahu snadno určíme podmínku, kdy bude pozorovaná příčná rychlost $v_\perp$ nadsvětelná. Podmínka $v_\perp > c$ je ekvivalentní nerovnosti

$$v\,(\sin\varphi + \cos\varphi) > c.$$

Jednoduchou úpravou (sečtením sinu a kosinu) tak dostáváme podmínku nadsvětelnosti pozorované rychlosti zdroje

$$\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{c}{\sqrt{2}v}.$$

Vidíme tedy, že předchozí podmínku lze splnit i pro podsvětelné rychlosti zdroje.

Tento jev je, jak plyne z jeho odvození, způsoben konečnou rychlostí světla. Vidíme tedy, že konečná rychlost šíření světla hraje při posuzování vzhledu objektů velmi významnou roli. Z druhé kapitoly víme, že pohybující se tyč bude ve směru svého pohybu vlivem kontrakce délek kratší. Dá se však ukázat, že za určitých podmínek bude pozorovaná (viděná) délka tyče větší než v případě, kdy je tyč vůči pozorovateli v klidu!

Nyní již můžeme určit skutečnou rychlost v, kterou se pohybují oba pozorované objekty. Naměřené úhlové rychlosti objektů jsou podle předešlého dány vztahy

$$\omega_1 = \frac{1}{R}\frac{v\sin\varphi}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi},$$
$$\omega_2 = \frac{1}{R}\frac{v\sin\varphi}{1+\frac{v}{c}\cos\varphi}.$$

Vzájemným podělením předchozích rovnic získáme vztah

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1+\frac{v}{c}\cos\varphi}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi} \quad\Rightarrow\quad \frac{v}{c}\cos\varphi = \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}.$$

Užitím předchozí rovnosti dostáváme

$$1-\frac{v}{c}\cos\varphi = \frac{2\omega_2}{\omega_1+\omega_2}.$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnice pro ω_1 pak obdržíme

$$v\sin\varphi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}.$$

Pro rychlost pohybu pozorovaných objektů tak platí

$$v = \sqrt{v^2\sin^2\varphi + v^2\cos^2\varphi} = \sqrt{c^2\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{2R\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^2}.$$

Dosazením číselných hodnot do předchozího vztahu dostáváme, že skutečná velikost rychlosti (nejen příčných složek) pozorovaných objektů je rovna $v = 0{,}87c = 2{,}60\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Vidíme tedy, že se oba objekty skutečně pohybují podsvětelně.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.