

**15. ročník, úloha V.1 ... zrcadla** (4 body; průměr ?; řešilo 42 studentů)

Mějme dvě rovinná zrcadla svírající úhel  $\alpha$ . Jak máme nasměrovat paprsek, aby se od nich co nejvíckrát odrazil?  
*Ze starých sbírek vyhrabala Lenka*

Nejdříve budeme předpokládat, že zrcadla jsou dostatečně velká a tedy dojde ke všem odrazům, ke kterým může dojít. Dále budeme předpokládat, že se paprsek pohybuje v rovině kolmé na průsečnici zrcadel. Pokud by se v této rovině nepohyboval, stačí si jeho pohyb do této roviny promítnout. Tímto promítnutím se zákon odrazu nezmění a řešení se takto zachová.

Nejdříve pošleme paprsek tak, že bude svírat se zrcadlem, na které dopadne jako na první, úhel  $\varphi_0$ . Úhel  $\varphi_1$ , pod kterým paprsek dopadne na druhé zrcadlo, získáme velmi lehce geometrickou úvahou  $\varphi_1 = \varphi_0 + \alpha$ .

Dále můžeme pokračovat matematickou indukcí, pomocí které jednoduše zjistíme, že po  $n$  dopadech bude paprsek svírat se zrcadlem úhel  $\varphi_n = \varphi_0 + (n-1)\alpha$ . Pokud bude úhel  $\varphi_n$  větší než  $\pi/2$  znamená to, že se paprsek již vrací. Paprsek se naposledy odrazí bude-li  $\varphi_n > \pi - \alpha$  (přitom  $\varphi_{n-1} < \pi - \alpha$ ). Dále se již paprsek se zrcadlem neprotne. Pro počet odrazů tedy dostáváme

$$n = 1 + \left\lceil \frac{\pi - \alpha - \varphi_0}{\alpha} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi - \varphi_0}{\alpha} \right\rceil.$$

Značka  $\lceil x \rceil$  je použito pro horní celou část čísla  $x$  - tedy nejbližší vyšší celé číslo.

Je tedy vidět, že pro menší  $\varphi_0$  je počet odrazů větší. Maximální počet odrazů tedy bude pro  $\varphi_0 = 0$

$$N = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} \right\rceil.$$

Příčemž ale  $\varphi_0$  nemůže být rovno 0, protože by se paprsek ani jednou neodrazil. Musíme tedy najít maximální  $\varphi_0$ , pro které se paprsek odrazí  $N$  krát. Musí platit

$$N = \left\lceil \frac{\pi - \varphi_0}{\alpha} \right\rceil.$$

To bude splněno pro  $\varphi_0 < \pi - (N-1)\alpha$ . Aby došlo k co nejvíce odrazům musí být  $\varphi_0$  v intervalu  $(0, \pi - (N-1)\alpha)$ .