15. ročník, úloha V . 2 ... varhany *(4 body; průměr ?; řešilo 48 studentů)*

Představte si cínovou varhaní píšťalu, která byla naladěna při teplotě trojného bodu vody na komorní a. Poté se kostel vytopí (ne vodou) na 25° C, určete o kolik se píšťala rozladí.

Podle svých hudebních zkušeností navrhl Slavo Nemšák

Pro rychlost zvuku c_z v závislosti na změně tlaku a hustoty prostředí platí vztah

$$c_z^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho}.$$

Zvuková vlna je rychlý děj a nestačí tedy docházet k výměně tepla, což odpovídá adiabatické změně, pro niž platí $pV^\varkappa = \text{konst}$, kde V je objem. Mění-li se hustota ϱ nepřímo úměrně objemu V, má adiabatický vztah mezi p a ϱ tvar

$$p = \text{konst} \cdot \varrho^\varkappa,$$

z čehož vyplývá, že $\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}\varrho = \varkappa p/\varrho$. Pro rychlost zvuku pak máme vztah

$$c_z^2 = \frac{\varkappa p}{\varrho}.$$

Upravíme-li tento vztah na $c_z^2 = \varkappa pV/\varrho V$ a uvědomíme-li si, že $pV = NkT$ a ϱV je hmotnost plynu, můžeme psát

$$c_z^2 = \frac{NkT}{m} = \frac{\varkappa RT}{\mu},$$

kde μ je molární hmotnost. Vidíme tedy, že rychlost zvuku je přímo úměrná odmocnině z termodynamické teploty.

Nyní trošku podrobněji rozeberme varhanní píšťalu. Pro jednoduchost předpokládejme, že je to dutá trubka konstantního průřezu, jejíž průměr je ve srovnání s její délkou zanedbatelně malý. Oba dva konce trubky jsou otevřené a proto se na koncích nachází kmitny zvukového vlnění.

Pro vlnovou délku λ platí

$$\lambda = \frac{4\frac{l}{2}}{k} = \frac{2l}{k}.$$

Zároveň však také platí $\lambda = c_z/f$, z čehož plyne $f = c_z/\lambda$. Pro poměr frekvencí pak dostáváme

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{c_{z2}}{\lambda_2}}{\frac{c_{z1}}{\lambda_1}} = \frac{c_{z2}\lambda_1}{c_{z1}\lambda_2} = \frac{c_{z2}\,\frac{2l_1}{k}}{c_{z1}\,\frac{2l_2}{k}} = \frac{c_{z2}l_1}{c_{z1}l_2}.$$

Uvážíme-li podélnou teplotní roztažnost trubice (příčnou zanedbáme), platí $l_2 = l_1(1 + \alpha\Delta T)$, kde $\alpha = 0{,}027 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$ je součinitel teplotní délkové roztažnosti cínu a ΔT je rozdíl teplot $\Delta T = T_2 - T_1$. Po dosazení za rychlosti zvuku při daných teplotách dostáváme

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{\frac{\varkappa RT_2}{\mu}}\,l_1}{\sqrt{\frac{\varkappa RT_1}{\mu}}\,l_1(1+\alpha\Delta T)} = \frac{1}{(1+\alpha(T_2-T_1))}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

a tedy

$$\frac{f_2}{f_1} \doteq 1{,}04,$$

$$f_2 \doteq 459\,\mathrm{Hz},$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 \doteq 19\,\mathrm{Hz}.$$

Píšťala se tedy rozladí o 19 Hz. Poměr $f_2/f_1 = 1{,}04$ se přibližně shoduje s $\sqrt[12]{2} = 1{,}06$, což odpovídá půltónu, píšťala tedy bude hrát o půltón výš.

Řešení úlohy jsme si mohli zjednodušit, pokud jsme velikosti rychlostí zvuku pro dané teploty vyhledali v tabulkách a pokud jsme teplotní roztažnost píšťaly zcela zanedbali (snadno se přesvědčíme, že její vliv na změnu frekvence je ve srovnání s vlivem změny rychlosti zvuku při změně teploty minimální). Úlohu jsme pak mohli řešit snadno z hlavy.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.