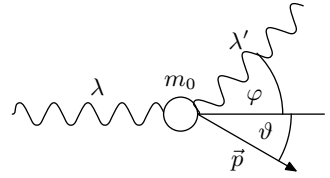


15. ročník, úloha V. S ... fotony (6 bodů; průměr ?; řešilo 16 studentů)

K vysvětlení fotoelektrického jevu předpokládal Albert Einstein, že energie a hybnost světla je nesena částicemi, které se nazývají fotony. Aby se tyto částice mohly pohybovat rychlostí světla, musí být jejich klidová hmotnost nulová (tento vztah je formální, neboť s fotonem nemůžeme spojit vztažnou soustavu, a proto pojem klidové hmotnosti jakožto hmotnosti v klidovém systému nemá pro foton smysl). Mezi jejich energií a hybností tak platí jednoduchý vztah $E = pc$. Energie fotonu závisí na frekvenci světla ν vztahem $E = h\nu$, jak plyne z Planckovy teorie, která objasnila vlastnosti tepelného záření absolutně černého tělesa. Hodnota Planckovy konstanty h je rovna $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

- a) Předpokládejte, že energie fotonu je závislá pouze na frekvenci příslušné světelné vlny. Pomocí Dopplerova jevu a transformace mezi energií a hybností ukažte, že tato závislost musí být dána vztahem $E = h\nu$, kde h je blíže neurčená konstanta.
- b) Uvažujte srážku fotonu s částicí, jejíž klidová hmotnost je m_0 . Tato částice je v naší soustavě před srážkou v klidu. Vlnová délka fotonu před srážkou je v našem systému rovna λ . Při srážce se foton od původního směru vychýlí o úhel φ . Jak závisí změna vlnové délky $\Delta\lambda$ fotonu na úhlu odchýlení φ ?
- a) Mějme vztažnou soustavu, ve které se ve směru osy x šíří světelná vlna o frekvenci ν_0 . Energie fotonů, které jí odpovídají, je pak rovna $E(\nu_0)$. Uvažujme nyní soustavu, která se vůči naší soustavě pohybuje rychlostí v , která je rovnoběžná se směrem šíření světelné vlny. Rychlost v je kladná, pokud se soustava pohybuje ve stejném směru jako světelná vlna. V pohybuující se soustavě je frekvence ν uvažované světelné vlny dána vztahem pro Dopplerův jev



Obr. 1

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Energií E fotonu v pohybuující se soustavě získáme užitím transformačních vztahů pro energii a hybnost

$$E = \gamma \left(E(\nu_0) - v \frac{E(\nu_0)}{c} \right) = E(\nu_0) \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Platí tedy

$$E = \frac{E(\nu_0)}{\nu_0} \nu = h\nu,$$

kde $h = \frac{E(\nu_0)}{\nu_0}$. Všechny inerciální soustavy jsou pro popis fyzikálních jevů rovnocenné. To znamená, že vztah mezi energií fotonu a frekvencí příslušné světelné vlny musí být ve všech soustavách stejný. Závislost energie E fotonu na frekvenci ν tedy musí být $E(\nu) = h\nu$.

- b) Vlnovou délku fotonu po srážce označme λ' . Směr pohybu částice po srážce s fotonem nechť svírá s původním směrem pohybu fotonu úhel ϑ . Částice při srážce získá hybnost o velikosti p (viz obr. 1). Ze zákona zachování hybnosti dostáváme vztahy

$$p \cos \vartheta = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \varphi,$$

$$p \sin \vartheta = \frac{h}{\lambda'} \sin \varphi.$$

Umocněním těchto rovnic a jejich sečtením získáme rovnost

$$p^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2 \cos \varphi}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} \right).$$

Užitím zákona zachování energie obdržíme rovnici

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} + \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} + m_0 c^2.$$

V této rovnici nejdříve osamostatníme odmocninu a pak obě strany umocníme, čímž dostaneme rovnost

$$m_0^2 c^2 + p^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)^2 + 2 h m_0 c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + m_0^2 c^2.$$

Dosazením za p^2 obdržíme

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2 \cos \varphi}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{2 m_0 c}{h} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right).$$

Odtud dostáváme vztah

$$\frac{1 - \cos \varphi}{\lambda \lambda'} = \frac{m_0 c}{h} \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'}.$$

Pro změnu vlnové délky fotonu tedy platí

$$\Delta \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi).$$

Uvažovaný proces srážky fotonu s částicí se nazývá Comptonův rozptyl. Z odvozeného vztahu plyne, že se tento proces uplatňuje zejména při srážce elektronů (malá hmotnost m_0) s fotony rentgenového a γ záření (velká relativní změna vlnové délky). Comptonův rozptyl je jedním z důkazů částicového chování světla.