

15. ročník, úloha VI. 3 ... stáří Země (3 body; průměr ?; řešilo 28 studentů)

Předpokládejme, že při vzniku Země na ní byly izotopy uranu ^{238}U a ^{235}U , ale ne produkty jejich rozpadu. Izotop ^{238}U resp. ^{235}U se rozpadá s poločasem $T_1 = 4,50 \cdot 10^9$ roků resp. $T_2 = 0,710 \cdot 10^9$ roků. Ve srovnání s těmito časy jsou poločasy rozpadu produktů zanedbatelné, rozpadové řady končí stabilními izotopy ^{206}Pb a ^{207}Pb .

Je-li v uranové rudě poměr počtu atomů uranu $^{238}\text{U} : ^{235}\text{U} = 137 : 1$ a poměr počtu atomů olova $^{206}\text{Pb} : ^{207}\text{Pb} = 28 : 17$, odhadněte stáří Země.

Podle rozpadového zákona platí pro počet jader v čase t vztah

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-t/T},$$

kde T je poločas rozpadu daného jádra. Počet jader produktu rozpadu bude

$$N_2 = N_0 - N_1 = N_1 (2^{t/T} - 1).$$

Pokud podělíme tuto rovnici pro ^{238}U rovnicí pro ^{235}U dostáváme

$$\frac{N_{238}}{N_{235}} = \frac{N_{206}}{N_{207}} \frac{1 - 2^{t/T_1}}{1 - 2^{t/T_2}}.$$

V této rovnici již všechny veličiny kromě t známe. Bohužel však neumíme jednoduše vyjádřit t a proto musíme využít nějakou numerickou metodu. Musíme najít pro jaké t v miliardách let je funkce

$$y = \frac{17 \cdot 137}{28} \frac{1 - e^{0,154t}}{1 - e^{0,976t}}$$

rovna jedné. To zjistíme nejjednodušeji pokud si graf této funkce zobrazíme na počítači. Výsledkem je stáří Země

$$t \doteq 4,56 \cdot 10^9 \text{ r.}$$