

JAN HOUŠTĚK A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XVI. ročník – 2002/03





Obsah

<i>Předmluva</i>	5
<i>Zadání teoretických úloh</i>	6
<i>Řešení teoretických úloh</i>	13
<i>Řešení experimentálních úloh</i>	49
<i>Seriál na pokračování</i>	61
<i>Řešení úloh ze seriálu</i>	89
<i>Výsledková listina</i>	99



Předmluva

Milý čtenáři,

v ruku držíš ročenku obsahující zadání a řešení úloh XVI. ročníku FYKOSu (Fyzikálního KOrespondenčního Semináře MFF UK), který proběhl ve školním roce 2002/03.

FYKOS je nejstarší a největší fyzikální korespondenční soutěž u nás. V průběhu roku řešitelé pravidelně obdrží zadání sedmi úloh, z nichž je pět teoretických, jedna experimentální a poslední se tématicky váže k *Seriálu na pokračování*, který zadání doprovází (letos byl věnován matematickému aparátu fyziky). Účastníci řeší úlohy dle vlastního výběru (někteří i všechny) a svá řešení posílají běžnou poštou či elektronicky organizátorům semináře. Ti úlohy opraví, obodují a zašlou zpět účastníkům, kteří se takto seznámí se vzorovými řešeními a dozví se o chybách svých vlastních postupů. Na základě bodování je sestavována průběžná výsledková listina a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Kromě zasílání zadání a řešení pořádá seminář řadu dalších akcí. Zejména to jsou dvě týdenní *soustředění*, bez kterých si FYKOS snad nelze ani představit. Probíhají vždy na jaře a na podzim a pro cca 30 nejlepších řešitelů. Další aktivitou je *Den s experimentální fyzikou*, na kterém umožňujeme ve spolupráci s jednotlivými katedrami MFF našim řešitelům návštěvu několika pracovišť, kde se dělá opravdová fyzika.

Na našich [www stránkách](http://fykos.mff.cuni.cz) <http://fykos.mff.cuni.cz> mohou nejen řešitelé semináře sledovat aktuální dění. Kromě zadání a řešení úloh ze současného i minulých ročníků zde naleznete průběžně aktualizovanou výsledkovou listinu, fotky a reportáže ze soustředění, podrobné informace a pravidla pro připojení se k semináři a ještě mnohem více, ostatně posuďte sami.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání a řešení teoretických i experimentálních úloh. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, chceme tím apelovat na každého čtenáře, aby před nalistováním stránky s řešením strávil alespoň chvíli nad zadáním a rozmyslel si, zda a jak by danou úlohu řešil on. Další částí je *Seriál na pokračování*, který je doplňován úlohami souvisejícími s daným tématem. Na konci se nachází soupiska nejlepších řešitelů tohoto ročníku.

Trocha statistiky: XVI. ročník semináře řešilo 110 studentů, organizátoři dohromady opravili 1163 jednotlivých řešení.

Pokud tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem, nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám. Jsme nepřetržitě k dispozici na e-mailu fykos@mff.cuni.cz, případně také na poštovní adrese a telefonu níže.



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

tel: +420 221 912 504 (RNDr. Pavel Krtouš)

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

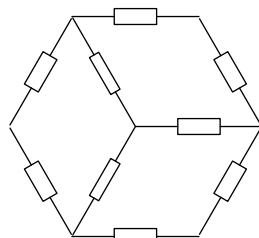


Zadání teoretických úloh

Úloha I. 1 ... odpory

Pro síť na obr. 1 (všechny odpory jsou stejné, jejich velikost označme R) určete odpor mezi dvěma vrcholy šestiúhelníku (uvažte všechna možná zapojení).

řešení str. 13



Obr. 1

Úloha I. 2 ... Archimédes

Pokuste se bez použití rovnic a vzorců vyřešit následující dvě úlohy. Pozor, vaše řešení musí být i tak naprosto exaktní.

- V nádobě s vodou plave kus ledu. Co se stane s hladinou, až led roztaje?
- Na misky rovnoramenných vah jsou položena stejně těžká tělesa. Co se stane, když jednu misku ponoříme do vody?

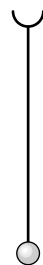
řešení str. 14

Úloha I. 3 ... hračka

Organizátor Fykosu dostal k narozeninám hračku, která je schématicky vyobrazena na obr. 2. Hračka, která slouží také jako záložka, se skládá z malého cínového kalíšku spojeného provázkem délky l s cínovou kuličkou.

Poradte organizátorovi, jakou rychlost (ve vodorovném směru) má udělit kuličce, aby spadla do kalíšku. Uvažujte, že kalíšek je v klidu, je velmi malý při porovnání s délkou provázku a ztráty mechanické energie lze zanedbat.

řešení str. 14



Obr. 2

Úloha I. 4 ... visící drát

Odhadněte rozdíl elektrických potenciálů mezi konci drátu délky l visícího v gravitačním poli, který vzniká působením gravitace na volné elektrony. Jak přesný voltmetr bychom potřebovali k jeho změření?

řešení str. 15

Úloha I. P ... gravitace

Odhadněte rozdíl mezi intenzitou gravitačního pole na povrchu Země a na vrcholu hory a pokuste se spočítat, jaké parametry musí mít hora, aby byl tento rozdíl nulový. (Pokuste se alespoň o kvalitativní odhad, tj. rozhodněte, zda je pole na hoře silnější nebo slabší.)

řešení str. 16

Úloha II.1 ... ztraceni v temnotě

Jeníček a Mařenka, zabráni do závažné diskuze nad zajímavým fyzikálním problémem, zbloudili v temném hvozdě. A tak, ve snaze nalézt východisko ze zoufalé situace, rozhodl se Jeníček vylézt na statný smrk, v naději že svým ostřížším zrakem zahlédne spásný záblesk světla. Jak nejdále od této dřeviny by se muselo nacházet nechvalně proslulé obydlí ještě nechvalněji proslulé okultistky a gurmánky Jagy Babové, aby Jeníček získal falešnou naději na záchranu v důsledku osvětlení 100 W žárovkou svítící v obývacím pokoji výše zmíněného domu?

*řešení str. 17***Úloha II.2 ... malý velký problém**

Hvězdný koráb se skládá ze dvou kabin o hmotnosti M , mezi nimiž se nalézá spojnice délky $2l$ (koráb tedy vypadá trochu jako činka). Jedna z kabin byla zasažena malým (hmotnost $m \ll M$), ale pekelně rychlým (rychlost u) meteoroidem. Po této fatální kolizi se loď začala pohybovat a také rotovat (úhlovou rychlost rotace označme ω). Jak daleko od nezasažené kabiny onen meteoroid proletěl? Můžete předpokládat, že rychlost zbytků po meteoroidu vzhledem ke kabině je zanedbatelná v porovnání s rychlostí u .

*řešení str. 19***Úloha II.3 ... zase jde vo prachy**

Mějme dvě prášková dielektrika o permitivitách ε_1 a ε_2 . Smísíme je tak, že poměr jejich hmotností bude $m_1 : m_2$, poměr jejich objemů bude $V_1 : V_2$ a poměr jejich látkových množství bude $n_1 : n_2$. Jaká bude výsledná permitivita této směsi?

*řešení str. 20***Úloha II.4 ... mokrá hrozba**

Představte si koryto řeky široké 100 m. Jeho spád označme α . Otázkou je, jak závisí výška hladiny na průtoku vody touto řekou. Váš teoretický výsledek můžete zkusit porovnat s údaji ze srpnových povodní.

*řešení str. 21***Úloha II.P ... basic instinct**

Sekáček na led – známý vražedný nástroj z tohoto filmu (vy, kdo jste tento výplod kinematografie ještě neshlédli, vězte, že toto náčiní vypadá zhruba jako šroubovák s ostrou špičkou) postavila chladnokrevná vražedkyně z dlouhé chvíle na hrot. Pomocí relací neurčitosti odhadněte maximální dobu, po kterou corpus delikti setrvá v této poloze.

*řešení str. 22***Úloha III.1 ... vítr na dálnici**

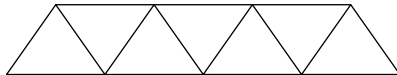
V autoškole každého upozorňují na nebezpečí bočního větru při vjezdu ze závětří na otevřené prostranství. Zejména nebezpečné je to průy na dálnici při velké rychlosti.

Uvažujte konstatní rychlost bočního větru a spočítejte, jak se mění síla působící z boku v závislosti na rychlosti auta. Tvar auta předpokládejte takový, abyste úlohu dokázali vyřešit. Diskutujte vliv větru na následný pohyb vozidla.

řešení str. 24

Úloha III. 2 ... železniční most

Chrabrý rudoarmějce vjel tankem na železniční most, jehož konstrukce, nad ním se tyčí, je schématicky znázorněna na obr. 3. Vaším úkolem je popsat, jak moc budou při přejezdu namáhány jednotlivé části mostu. Pokud jsou meze pevnosti všech tyčí v tahu stejné jako meze v tlaku, určete maximální hmotnost tanku, který po mostě může přejet. Můžete uvažovat, že tank je oproti mostu malý.



Obr. 3

řešení str. 25**Úloha III. 3 ... praktikum**

Ve fyzikálním praktiku dostal organizátor FYKOSu za úkol pomocí tří měření zjistit napětí třech různých zdrojů.

K dispozici má jeden voltmetr následujících vlastností: Jeho systematická chyba je nulová. Náhodná chyba je charakterizována střední kvadratickou odchylkou σ (tj. rozptyl je σ^2), která je nezávislá na velikosti měřeného napětí.

Poradte organizátorovi, zda a popř. jak lze napětí změřit přesněji než změřením každého zdroje zvlášť. Za míru celkové přesnosti považujte součet rozptylu výsledných hodnot.

řešení str. 26**Úloha III. 4 ... rychlá smrt**

V modulu Apollo letí astronauti na Měsíc, skrz okno jim proletí meteoroid a udělá v něm díрку o poloměru $r = 1$ mm. Jak se bude měnit teplota a tlak v kabině o objemu $V = 60$ m³, pokud původní podmínky jsou $t = 20$ °C a normální tlak. Jako bonus se pokuste odhadnout, za jak dlouho začnou mít astronauti vážné problémy.

řešení str. 29**Úloha III. P ... velikost elementárních částic**

- Elektrostatická energie rovnoměrně nabitě koule je $E = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$. Pokud to dokážete, ověřte tento vztah výpočtem, jinak řešte rovnou úkol b).
- Pomocí tohoto vztahu se pokuste ze znalosti klidové energie protonu a elektronu spočítat rozměr těchto částic.
- Rozmyslete, proč je tento postup zcela nesmyslný. Pozn.: experimentálně je ověřeno, že rozměr elektronu je menší než 10^{-19} m.

řešení str. 32**Úloha IV. 1 ... rámus ve vesmíru**

- Hustota mezihvězdného prostředí je asi 10 až 10 000 částic na metr krychlový. Tvoří ho převážně vodík. Vzdálenost mezi částicemi je tak velká, že se toto prostředí chová jako ideální plyn. Na vás je rozmyslet, zda se v takovém „vakuu“ může šířit zvuk a pokud ano, jaká může být jeho frekvence?
- Jaká je maximální frekvence zvuku, který se může šířit ve vzduchu za normálních podmínek?

řešení str. 33

Úloha IV.2 ... galaktický paradox

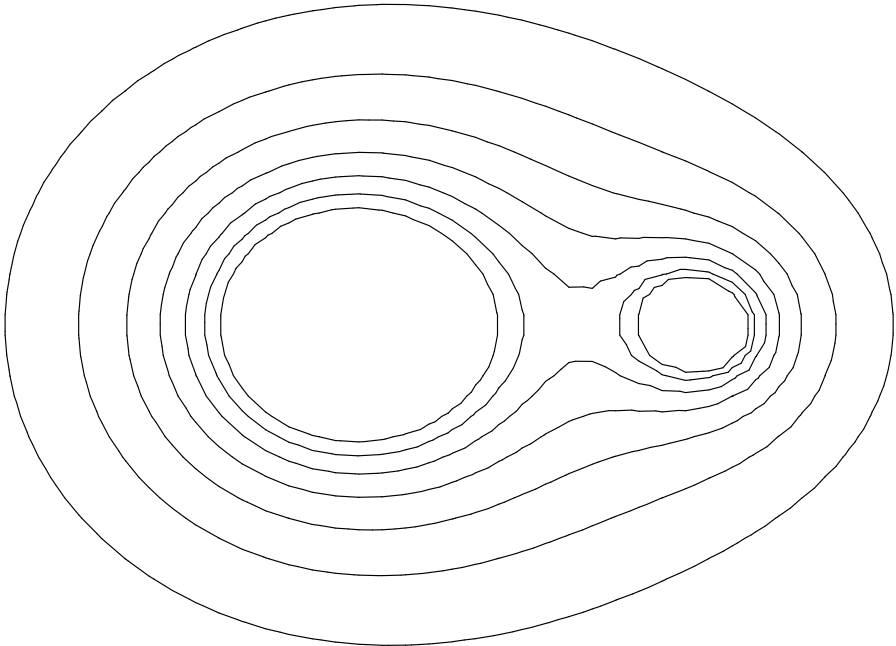
Ve sluneční soustavě se planety, které jsou ke Slunci blíže, pohybují rychleji než planety vzdálenější. V Galaxii se hvězdy blíže středu pohybují pomaleji než hvězdy vzdálenější. Zdůvodněte tento zdánlivý rozpor.

*řešení str. 34***Úloha IV.3 ... plovoucí ledovec**

Představme si ve vesmíru rotující planetu pokrytou po celém povrchu hlubokým oceánem. Na planetě v určitém místě přistane kosmický mnohoživelník, který volně plove na hladině a není vybaven pohonem použitelným ve vodě. Jakým směrem se začne z klidu pohybovat?

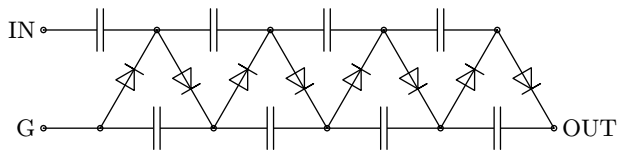
*řešení str. 35***Úloha IV.4 ... ekvipotenciály**

Zjistěte poměr velikostí nábojů dvou částic. Ekvipotenciály jejich elektrického pole vidíte na obr. 4 na str. 9. Zkuste také odhadnout přesnost vaší metody.

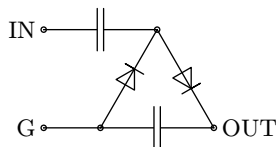
řešení str. 36

Obr. 4. Naměřený tvar ekvipotenciál elektrického pole dvou částic

Úloha IV . P ... násobič napětí



Obr. 5. Násobič napětí



Obr. 6. Miniverze

Na vstup (IN) obvodu na obr. 5 přivedeme vůči zemi (G) harmonické střídavé napětí o amplitudě U a frekvenci f . Jaké napětí naměříme na výstupu (OUT)? Diody považujte za ideální, velikosti kapacit si zvolte, nebo řešte úlohu obecně. Nevíte-li si rady, zkuste nejprve jednodušší případ – zapojení pouze se dvěma diodami a kondenzátory (viz obr. 6).

řešení str. 38

Úloha V . 1 ... prší, prší

V deštovém mraku je množství malých kapiček vody, jejichž hustotu (tj. celkovou hmotnost kapiček v nějakém objemu lomeno tímto objemem) označme ρ_1 , hustotu vody ρ_0 . Spojením několika kapiček vznikne větší kapka, která začne padat a postupně na sebe nabaluje další a další kapičky. Spočítejte, jak se bude měnit poloměr padající kapky a s jakým zrychlením se bude pohybovat.

Pro jednoduchost nevažujte odpor vzduchu působící na kapku a malé kapičky považujte za nehybné.

řešení str. 39

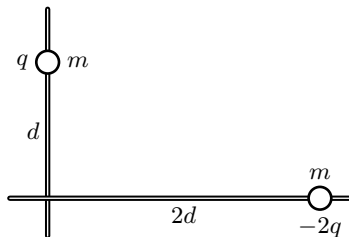
Úloha V . 2 ... Apollo

Odhadněte, za jak dlouho se Apollo dostane na orbitu Měsíce, neplýtvá-li zbytečně palivem. Nezapomeňte uvést, jaké zjednodušující předpoklady jste při výpočtu provedli.

řešení str. 40

Úloha V . 3 ... elektrický minigolf

Mějme dvě na sebe kolmé nevodivé tyče a na nich nabitě kuličky (viz obr. 7), které se po nich mohou volně pohybovat. Kuličky mají stejnou hmotnost m a náboje q a $-2q$. Na počátku jsou v klidu a jejich vzdálenost od průsečíku tyčí je d a $2d$. Určete, kde se bude nacházet druhá kulička v okamžiku, když první dosáhne průsečíku tyčí.

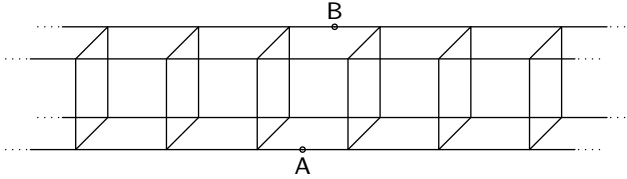


Obr. 7. Náboje na tyčích

řešení str. 41

Úloha V.4 ... síť

Spočtete odpor mezi body A, B na nekonečné síti na obrázku 8. Všechny hrany sítě mají stejnou délku a odpor.



Obr. 8. Nekonečná odporová síť

*řešení str. 41***Úloha V.P ... pramínek vody**

Jaký je geometrický tvar (průřez) kapaliny vytékající z kohoutku v závislosti na vzdálenosti od hrdla? Pokuste se také odhadnout, v jaké vzdálenosti se proud vody začne trhat.

*řešení str. 43***Úloha VI.1 ... záhadný obvod**

Ke kondenzátoru o neznámé kapacitě připojíme do série cívku o indukčnosti L , obvod připojíme ke zdroji napětí o frekvenci ω a naměříme na nekalibrovaném ampérmetru nějaký proud. Poté do série připojíme ještě jednu cívku, stejnou jako ta první, a proud v obvodu se nezmění. Jaká je kapacita kondenzátoru?

*řešení str. 44***Úloha VI.2 ... moucha a netopýr**

Netopýr na lovu letí proti mouše rychlostí $3,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, moucha letí desetkrát pomaleji. Netopýr vysílá ultrazvukový signál o frekvenci f_0 , který se odrazí od mouchy a vrátí k lovcovi. Netopýrova sluchadla jsou nejcitlivější na frekvence blízko $61,3 \text{ kHz}$. Určete f_0 . Zvuk jaké frekvence by moucha slyšela, kdyby slyšela?

*řešení str. 44***Úloha VI.3 ... tekoucí sklo**

Na starých zámčích bývají originální tabulky skla v oknech u spodního okraje širší než u horního díky tečení. Za sto let se tabulka o rozměru $0,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ a tloušťce 5 mm rozšíří o $0,1 \text{ mm}$. Odhadněte z těchto údajů viskozitu skla a určete, kolikrát těžší by musela být Země, aby toto tečení probíhalo turbulentně.

*řešení str. 45***Úloha VI.4 ... pevnost nosníku**

Uvažujte pružný nosník délky l . Energie potřebná k prohnutí jednotky délky tohoto nosníku na poloměr křivosti R je $E = \alpha/R^2$, kde α je známá konstanta. Jakou maximální silou můžeme tlačit na tento nosník, aby se neprohnul do strany?

řešení str. 46

Úloha VI. P ... elektromagnetický paradox

Na dielektrický disk volně se otáčející kolem své osy přilepíme závit supravodivého drátu, v němž teče proud I_0 . Dále kolem tohoto závitu symetricky přilepíme elektricky nabitě kulíčky o náboji q . Celý disk poté začneme pomalu zahřívat. V jistém okamžiku přestane být drát supravodivý, takže v něm přestane téct proud a změní se magnetický tok přes závit. V důsledku toho vznikne podle Faradayova zákona okolo tohoto závitu elektrické pole, které bude působit na přilepené náboje, takže se celý disk začne otáčet. Na druhou stranu musí zůstat podle zákona zachování hybnosti v klidu. Tak kde je v předcházejících úvahách chyba?

řešení str. 48



Řešení teoretických úloh

Úloha I. 1 ... odpory (4 body; průměr 2,38; řešilo 61 studentů)

Pro síť na obr. 9 (všechny odpory jsou stejné, jejich velikost označme R) určete odpor mezi dvěma vrcholy šestiúhelníku (uvažte všechna možná zapojení).

Vzhledem k tomu, že síť je symetrická, máme 4 možnosti zapojení: 1-2, 1-3, 1-4 a 2-4.

1. R_{12} – odpor mezi vrcholy 1-2

Ze symetrie vyplývá, že body 0 a 5 mají stejný potenciál, a tedy rezistorem R_{05} nepoteče proud. Proto můžeme R_{05} odstranit a odpor R_{12} vypočítáme jako paralelní zapojení odporů R a $R + R'$, kde

$$R' = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}} = \frac{4}{3}R.$$

Dostaneme výsledek

$$R_{12} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R'}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+\frac{4}{3}R}} = \frac{7}{10}R.$$

2. R_{13} – odpor mezi vrcholy 1-3

Zde je situace podobná jako v prvním případě. Rezistorem R_{05} díky symetrii neteče proud, a proto jej lze odstranit. Odpor R_{13} potom spočítáme jako paralelní zapojení odporů $2R$ a R' .

$$R_{13} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R'}} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}} = \frac{4}{5}R.$$

3. R_{14} – odpor mezi vrcholy 1-4

Opět využijeme symetrii. Uzly 5 a 3 mají stejný potenciál, můžeme je tedy spojit. Dostaneme tak zapojení s dvěma paralelními obvody, jejichž odpor snadno spočítáme.

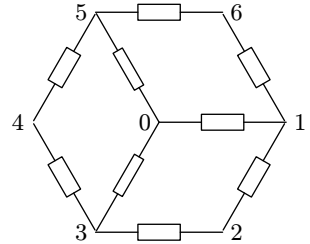
$$R_{14} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R+\frac{1}{R+\frac{1}{R}}} + \frac{1}{2R}} = \frac{11}{10}R.$$

4. R_{24} - odpor mezi vrcholy 2-4

V tomto případě je nulový potenciálový rozdíl mezi uzly 0 a 3. Po odstranění rezistoru R_{03} vypočítáme odpor R_{24} jako paralelní zapojení odporů $2R$ a $2R + 1/(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R})$.

$$R_{24} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}}}} = \frac{6}{5}R.$$

Úloha se samozřejmě dala řešit i jinými způsoby. Několik řešitelů využilo transformaci hvězdy na trojúhelník a naopak, další řešili úlohu přímo pomocí Kirchhoffových zákonů (zde však často docházelo k chybám, když někdo řeší soustavu 10 rovnic o 10 neznámých, snadno se zmýlí).



Obr. 9

Úloha I. 2 ... Archimédes (4 body; průměr 3,06; řešilo 80 studentů)

Pokuste se bez použití rovnic a vzorců vyřešit následující dvě úlohy. Pozor, vaše řešení musí být i tak naprosto exaktní.

- V nádobě s vodou plave kus ledu. Co se stane s hladinou, až led roztaje?
- Na misky rovnoramenných vah jsou položena stejně těžká tělesa. Co se stane, když jednu misku ponoříme do vody?

Dle Archimédova zákona zaujme část ledu ponořená ve vodě právě takový objem, aby se tíha ledu rovnala tíze vytlačené vody. Z toho plyne, že až led roztaje, zaujme vzniklá voda přesně tento objem. Hladina vody se tedy nezmění.

Na misku ponořenou ve vodě bude působit vztlaková síla rovná tíze vytlačené vody. Protože hustota vody je větší než hustota vzduchu, bude tato síla větší než vztlaková síla vzduchu, která na těleso působila před ponořením. Váhy se tedy vychýlí tak, že ponořená miska stoupne, a opět se stabilizují v poloze, kdy se bude miska dotýkat hladiny.

Nejčastější chybou bylo, že řešitelé nesprávně pochopili zadání a domnívali se, že ponoříme obě misky či celé váhy.

Úloha I. 3 ... hračka (4 body; průměr 2,24; řešilo 54 studentů)

Organizátor FYKOSu dostal k narozeninám hračku, která je schématicky vyobrazena na obr. 10. Hračka, která slouží také jako záložka, se skládá z malého cínového kalíšku spojeného provázkem délky l s cínovou kuličkou.

Poradte organizátorovi, jakou rychlost (ve vodorovném směru) má udělit kuličce, aby spadla do kalíšku. Uvažujte, že kalíšek je v klidu, je velmi malý při porovnání s délkou provázku a ztráty mechanické energie lze zanedbat.

Kulička se bude zpočátku pohybovat po kružnici s poloměrem l (délka provázku) a středem S (kalíšek). Dostředivá síla, kterou působí provázek na kuličku, má velikost

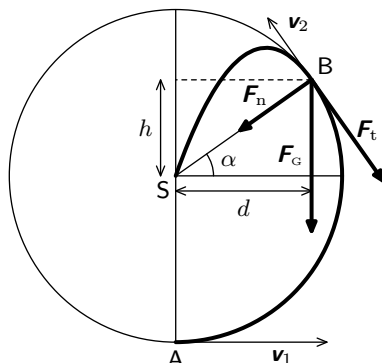
$$F_{\text{do}} = m \frac{v^2}{l}$$

a působí ve směru provázku. Na kuličku dále působí síla tíhová, kterou můžeme rozložit na složku tečnou ($F_t = mg \cos \alpha$) a normálovou ($F_n = mg \sin \alpha$) k trajektorii. Provázek je napínán silou o velikosti $F = F_{\text{do}} - F_n$. Kulička se z kruhové trajektorie odchýlí v okamžiku, kdy provázek přestane být napínán, tedy $F = F_{\text{do}} - F_n = 0$, resp.

$$mg \sin \alpha = m \frac{v_2^2}{l} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{v_2^2}{gl}. \quad (1)$$

V tomto okamžiku bude kulička výš než kalíšek. Z bodu B se kulička pohybuje po trajektorii šikmého vrhu. Ze zákona zachování energie dostaneme vztah

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_1^2 &= \frac{1}{2} m v_2^2 + mg(h + l), \\ v_1^2 &= 2g(h + l) + v_2^2 \end{aligned}$$



Obr. 10

a ze vztahu (1) máme

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} = \frac{v_2^2}{gl} \Rightarrow v_2^2 = gh.$$

Vztahy pro rychlost v_2 a úhel α tedy máme. Rychlost v_2 svírá se svislou osou úhel α . Pro souřadnice šikmého vrhu platí vztahy

$$\begin{aligned} x: \quad d &= v_2 t \sin \alpha, \\ y: \quad 0 &= h + v_2 t \cos \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Z geometrie obrázku platí

$$l^2 = d^2 + h^2, \quad \cos \alpha = \frac{d}{l}, \quad \sin \alpha = \frac{h}{l}.$$

Z rovnice pro x vyjádříme čas

$$t = \frac{ld}{v_2 h}.$$

Vše dosadíme do vztahu pro y a dostaneme

$$0 = h + v_2 \frac{d}{l} \frac{ld}{v_2 h} - \frac{1}{2} g \frac{d^2 l^2}{gh^3}.$$

Dosazením za d z Pythagorovy věty a vyjádřením h dostaneme

$$h = \frac{\sqrt{3}}{3} l.$$

Nyní dosazením do zákona zachování energie dostaneme

$$v_1 = \sqrt{3gh + 2gl} = \sqrt{gl(\sqrt{3} + 2)}.$$

Úloha I. 4 ... visící drát (4 body; průměr 2,84; řešilo 31 studentů)

Odhadněte rozdíl elektrických potenciálů mezi konci drátu délky l visícího v gravitačním poli, který vzniká působením gravitace na volné elektrony. Jak přesný voltmetr bychom potřebovali k jeho změření?

Na elektrony ve visícím drátu bude působit tíhová síla. Elektrony se uspořádají tak, aby došlo k rovnováze. V rovnováze musí platit, že výsledná síla, která působí na elektron, je nulová. Nyní si musíme uvědomit, jaké síly na elektron působí. Kromě tíhové na něj působí síla vytvářená elektrickým polem, které vznikne přeuspořádáním elektronů v drátu. Dále na elektrony působí síla, která je „drží uvnitř drátu“, tato je zejména na okrajích drátu velká v porovnání s ostatními, nicméně v rámci našich znalostí ji neumíme nijak uvážit.

Pro intenzitu elektrického pole E , které se vytvoří přeuspořádáním elektronů, musí platit

$$Ee = m_e g.$$

Napětí je definováno jako rozdíl potenciálů, bude pro něj tedy platit

$$U = El = \frac{m_e}{e} gl.$$

Spočteme-li si toto napětí pro drát délky jednoho metru ($l = 1 \text{ m}$), dostaneme

$$U = 5,6 \cdot 10^{-11} \text{ V.}$$

Vidíme tedy, že napětí je velmi malé. Kdybychom ho ovšem chtěli experimentálně zjistit, narazili bychom na ještě další problém. V drátech voltmetru totiž dojde ke stejnému jevu, a tak případné napětí voltmetr změřit nemůže.

Jelikož jsme zanedbali sílu, díky které je kov pevnou látkou, můžeme tento výsledek považovat nejspíše za řádový odhad.

Úloha I. P ... gravitace (5 bodů; průměr 1,29; řešilo 52 studentů)

Odhadněte rozdíl mezi intenzitou gravitačního pole na povrchu Země a na vrcholu hory a pokuste se spočítat, jaké parametry musí mít hora, aby byl tento rozdíl nulový. (Pokuste se alespoň o kvalitativní odhad, tj. rozhodněte, zda je pole na hoře silnější nebo slabší.)

Abychom mohli spočítat gravitační zrychlení na povrchu hory, musíme si zvolit vhodný model a příslušné aproximace. Gravitační pole na hoře bude dáno součtem gravitačního pole Země a hory. Pole g_z , které vytváří Země ve výšce h nad povrchem, je dáno Newtonovým gravitačním zákonem.

$$g_z(h) = \kappa \frac{M_z}{(R+h)^2} = \kappa \frac{4}{3} \frac{\pi \rho R^3}{(R+h)^2},$$

kde ρ je hustota Země a R její poloměr. Hora má složitější tvar a její příspěvek ke gravitačnímu zrychlení musíme spočítat obecněji. Zde udělalo nejvíce řešitelů chybu. Pouze sféricky symetrickou kouli můžeme při výpočtu gravitačního pole nahradit hmotným bodem v jejím těžišti. Horu si představíme jako kužel o výšce $H \ll R$,

vrcholovém úhlu 2φ a hustotě $k\rho$. Ze symetrie kužele vyplývá, že gravitační pole na vrcholu hory bude směřovat do středu podstavy. Jeho velikost spočítáme jako součet příspěvků od jednotlivých malých částí kužele, výpočet vede na integrál

$$g_h = \kappa \int_0^H \int_0^{h \operatorname{tg} \varphi} \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \frac{2\pi k \rho r}{r^2 + h^2} dr dh.$$

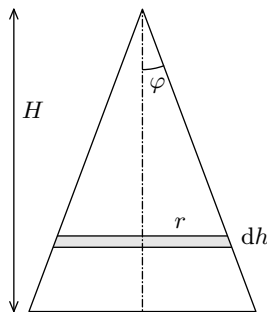
Ten si můžete představit jako sčítání polí malinkatých prstýnků poloměru r , šířky dr a tloušťky dh . Pro integraci ale musíme vzít část, která se promítá na osu kužele (toto spousta řešitelů opomíjela). Prstýnky vytvoří elementární válečky tloušťky dh a z nich vytvoříme kužel. Gravitační pole hory je tedy $g_h = 2\kappa\pi k\rho H(1 - \cos\varphi)$.

Rozdíl mezi gravitačním polem na povrchu Země a na vrcholku hory je dán

$$\Delta g = g_h + g_z(H) - g_z(0) = \kappa \frac{4}{3} \frac{\pi \rho R}{(1 + H/R)^2} + 2\kappa\pi k\rho H(1 - \cos\varphi) - \kappa \frac{4}{3} \pi \rho R.$$

Použijeme aproximaci $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$, která platí pro $x \ll 1$, a získáme

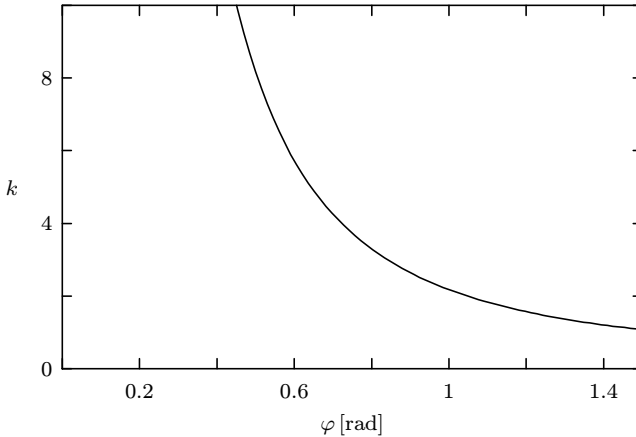
$$\Delta g = -\frac{8}{3} \kappa \pi \rho H + 2\pi H \kappa k \rho (1 - \cos\varphi) = 2\pi \kappa H \rho \left(k(1 - \cos\varphi) - \frac{4}{3} \right).$$



Obr. 11

Tedy gravitační pole Země s výškou klesá se stejnou mocninou, jako se kterou jej vytváří hora. Proto, pokud $k = \frac{4}{3(1-\cos\varphi)}$, bude intenzita gravitačního pole Země klesat stejně rychle, jako bude růst gravitační pole hory. Tzn. na takovýchto horách bude gravitační zrychlení stejné, jako na povrchu Země v nížině.

Nyní pojďme diskutovat řešení pomocí grafu 12. V části pod křivkou bude gravitační zrychlení na hoře nižší než u její paty, nad křivkou bude naopak vyšší. Je vidět, že pro běžnou horninu ($k = 0,5$) hora, na které by bylo stejné gravitační zrychlení jako na povrchu Země, skutečně neexistuje.



Obr. 12

V úloze jsme v případě výpočtu gravitačního pole na povrchu Země neuvažovali gravitační působení hor – uvažovali jsme, že měření bychom prováděli daleko od námi zkoumaných hor. V případě, že bychom měřili gravitační zrychlení přímo u paty hory, situace by se zkomplikovala. Řešení pro tento případ si můžete zkusit spočítat. Také si můžete rozmyslet, jak by řešení vypadalo, kdybychom nepočítali gravitační nýbrž tíhové zrychlení. Museli bychom uvažovat ještě odstředivou sílu.

Úloha II.1 ... ztraceni v temnotě (3 body; průměr 1,52; řešilo 31 studentů)

Jeníček a Mařenka, zabráni do závažné diskuze nad zajímavým fyzikálním problémem, zbloudili v temném hvozdu. A tak, ve snaze nalézt východisko ze zoufalé situace, rozhodl se Jeníček vylézt na statný smrk v naději, že svým ostrížím zrakem zahlédne spásný záblesk světla. Jak nejdále od této dřeviny by se muselo nacházet nechvalně proslulé obydlí ještě nechvalněji proslulé okultistky a gurmánky Jagy Babové, aby Jeníček získal falešnou naději na záchranu v důsledku osvětlení 100 W žárovkou svítící v obývacím pokoji výše zmíněného domu?

Fotometrický přístup

Příklad budeme řešit třemi různými způsoby a výsledky porovnáme. Prvně řešme problém z hlediska fotometrických veličin. Žárovku považujeme za zdroj světla o svítivosti 200 cd. Minimální osvětlení, které je lidské oko ještě schopné registrovat, je přibližně $3 \cdot 10^{-5}$ lux. Tyto hodnoty si většina z vás někde našla a považovala je za správné. Mezi osvětlením I a svítivostí E

platí vztah

$$I = \frac{E}{r^2} \quad \implies \quad r = \sqrt{\frac{E}{I}} = 2600 \text{ m.}$$

Jelikož žárovka nesvítí jenom ve viditelné části spektra, ale převážně v infračervené, budeme ve skutečnosti žárovku vidět jako slabší zdroj. Budeme ji tedy vidět blíže než jsme spočetli. Dále svítivost žárovky závisí na geometrii jejího natočení vůči pozorovateli. Když se na žárovku díváme z boku, zdá se nám méně jasná, než když se na ni díváme z vrchu. Geometrii natočení dále neuvažujeme.

Bolometrický přístup 1

Bolometrická korekce je rozdíl magnitud naměřených vizuálně (pouhým okem) a bolometrem (přístrojem zaznamenávajícím veškeré záření). U Slunce je přibližně $-0,07^{\text{mag}}$. Pro těleso s barevnou teplotou 2800 K, kterou většinou uvádějí výrobci žárovek, má bolometrická teplota hodnotu¹ $-3,8^{\text{mag}}$.

V závislosti na spektru tato hodnota může kolísat i o několik desetin magnitudy. Žárovka, kterou budeme vidět jako hvězdu 6^{mag} , bude mít díky bolometrické korekci bolometrickou magnitudu $2,2^{\text{mag}}$.

Použijme nyní Pogsonovu rovnici, která nám popisuje vztah mezi magnitudou a zářivým výkonem hvězdy (m_1 a m_2 jsou magnitudy příslušející intenzitám záření I_1 a I_2)

$$m_1 - m_2 = \log \frac{I_2}{I_1}.$$

Nulový kalibrační bod je dán tak, že těleso zářící s intenzitou $1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ vnímáme jako hvězdu s jasností $-13,89^{\text{mag}}$. Nejslabší hvězdy viditelné pouhým okem mají zhruba 6^{mag} (za předpokladu čisté oblohy, nepřesvětlené okolním pouličním osvětlením). Ostrý zrak dovede vidět hvězdy až sedmé magnitudy. Fyziologické maximum je odhadováno na 9^{mag} , takový pozorovatel by ale musel být několik dní zavřen v úplné temnotě, aby si jeho oči zvykly na tmu. Dále budeme počítat s tím, že Jeník vidí hvězdy nanejvýš 6^{mag} .

$$2,2^{\text{mag}} - (-13,89^{\text{mag}}) = -2,5 \log \frac{P_0}{4\pi r_1^2 \mathfrak{S}_0} = -2,5 \log \frac{100\text{W}}{4\pi r_1^2 \cdot 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}},$$

kde P_0 je výkon žárovky a \mathfrak{S}_0 je jednotková intenzita. Po dosazení dostaneme vzdálenost zhruba 4600 metrů.

Bolometrický přístup 2

Lze také počítat s tím, že intenzitě $2,52 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ odpovídá² bolometrických 0^{mag} . Magnitudě $2,2^{\text{mag}}$ odpovídá intenzita $I = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Po dosazení do vzorce

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}},$$

dostaneme vzdálenost zhruba 4900 metrů.

¹ Pro výpočet byl použit empirický fit podle článku *The Composite Observational – Theoretical HR Diagram*, The Journal of the Royal Astronomical Society of Canada, February/March 1998 Volume 92 Number 1 [669] page 36.

² Viz Vladimír Vanýšek, *Základy astronomie a astrofyziky*, Academia, Praha 1980, str. 185.

Závěr

Vidíme tedy, že třemi různými způsoby dostaneme dva různé výsledky. Domníváme se, že rozdíl je způsoben především vstupními hodnotami prvního způsobu řešení, které nejsou příliš přesné.

Kdybychom chtěli výsledek přesněji, nesmíme zapomínat na extinkci vzduchu. Ta činí zhruba 1^{mag} na 15 kilometrů. To je zhruba 15 %, tedy Jaga bydlí o půl kilometru blíže. Nezbyvá nic jiného, než popřát Jeníčkovi a Mařence bloudění krajem do rozednění. Zachrání tím život stařence.

V případě, že Jaga přesedlala na halogenky, jejichž teplota bývá zhruba 4 200 K, budou to mít dále. O kolik, to si pilný čtenář dopočte sám.

Úloha II. 2 ... malý velký problém (4 body; průměr 2,34; řešilo 35 studentů)

Hvězdný koráb se skládá ze dvou kabin o hmotnosti M , mezi nimiž se nalézá spojnice délky $2l$ (koráb tedy vypadá trochu jako činka). Jedna z kabin byla zasažena malým (hmotnost $m \ll M$), ale pekelně rychlým (rychlost u) meteoroidem. Po této fatální kolizi se loď začala pohybovat a také rotovat (úhlovou rychlost rotace označme ω). Jak daleko od nezasažené kabiny onen meteoroid proletěl? Můžete předpokládat, že rychlost zbytků po meteoroidu vzhledem ke kabině je zanedbatelná v porovnání s rychlostí u .

Nejlepší bude, budeme-li srážku popisovat v rovině, ve které leží vektor rychlosti meteoroidu \mathbf{u} a spojnice obou kabin. Tato rovina je výhodná, protože se v ní bude odehrávat celý pohyb. Ze zadání plyne, že hvězdný koráb se před srážkou nepohybuje. Úhel mezi rychlostí \mathbf{u} a spojnici kabin označme α . Je tedy zřejmé, že minimální vzdálenost od druhé kabiny je $x = 2l \sin \alpha$, pro úhly $\alpha < \pi/2$, pro větší úhly bude nejmenší vzdálenost druhé kabiny $2l$ (při nárazu), protože meteoroid před dosažením nejmenší vzdálenosti narazí do první kabiny.

Nyní musíme spočítat, jak výsledná úhlová rychlost ω souvisí s úhlem nárazu α . To spočítáme ze zákona zachování momentu hybnosti. Moment hybnosti hvězdného korábu před srážkou je nulový, letícího kamene $mul \sin \alpha$ (počítáno vzhledem k těžišti korábu). Po srážce je moment hybnosti kamene zanedbatelný a hvězdného korábu $J\omega$. Tedy podle zákona zachování momentu hybnosti platí

$$J\omega = mul \sin \alpha.$$

Musíme tedy spočítat moment setrvačnosti korábu J . Budeme-li kabiny považovat za malé, dostaneme

$$J = 2Ml^2.$$

Dosazením do předchozích vztahů dostaneme

$$\sin \alpha = \frac{2Ml\omega}{mu}.$$

Nyní již spočítáme hledanou minimální vzdálenost.

$$x = \frac{4Ml^2\omega}{um}.$$

Na první pohled se zdá, že je úlohu možné řešit pomocí zákona zachování kinetické energie a zákona zachování hybnosti. Toto řešení není správné, protože se při této srážce kinetická energie nezachovává. To je vidět z toho, že pokud by se meteoroid odrazil pružně, byla by velikost jeho výsledné rychlosti srovnatelná s u , jelikož hmotnost lodi je mnohem větší než hmotnost meteoroidu. V našem případě se ovšem kinetická energie spotřebuje na rozbití meteoroidu a lodi.

Úloha II. 3 ... zase jde vo prachy (4 body; průměr 1,94; řešilo 17 studentů)

Mějme dvě prášková dielektrika o permitivitách ε_1 a ε_2 . Smísíme je tak, že poměr jejich hmotností bude $m_1 : m_2$, poměr jejich objemů bude $V_1 : V_2$ a poměr jejich látkových množství bude $n_1 : n_2$. Jaká bude výsledná permitivita této směsi?

Nejdříve se zamysleme nad tím, co vlastně chceme spočítat. Víme, že permitivita je úměrnost mezi *elektrickou indukcí* \mathbf{D} a *intenzitou elektrického pole* \mathbf{E} . To v sobě vlastně skrývá to, že odezva látky na vnější pole (elektrická indukce) je úměrná intenzitě tohoto pole. Proto, když smícháme dvě látky, které mají lineární odezvu, čekáme, že jejich odezva ve směsi bude také lineární. A tento koeficient úměry určuje výslednou permitivitu.

Na to, abychom s permitivitou mohli pracovat, si představíme deskový kondenzátor. V něm platí

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Nyní bychom chtěli spočítat kapacitu kondenzátoru, ve kterém je směs dvou látek s různou permitivitou. Tato úloha se bohužel nedá řešit jednoznačně, pokud neznáme přesné prostorové rozložení jednotlivých složek. Kdybychom chtěli počítat přímo pro rovnoměrně rozloženou látku, museli bychom definovat, co přesně tím rovnoměrným rozložením myslíme. Podrobněji to rozebereme níže. Nyní se pokusíme odhadnout hodnoty alespoň pro krajní případy.

1) Pásy látek se střídají rovnoběžně z deskou kondenzátoru

V tomto případě si můžeme představit, že máme n za sebou sériově zapojených kondenzátorů

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{S\varepsilon_i},$$

kde d_i je šířka i -tého pásu a ε_i je buď ε_a , nebo ε_b , podle toho, z jaké látky je daný pruh. Při daných objemech jednotlivých složek víme, že součet délek pruhů ze stejných materiálů je $\sum_a d_i = V_a/S$, $\sum_b d_i = V_b/S$. Po dosazení dostáváme

$$C = \left(\frac{V_a}{V\varepsilon_a} + \frac{V_b}{V\varepsilon_b} \right)^{-1} \frac{S}{d},$$

kde V je celkový objem. Takže pro celkovou permitivitu dostáváme

$$\varepsilon_{\parallel} = \left(\frac{f_a}{\varepsilon_a} + \frac{f_b}{\varepsilon_b} \right)^{-1},$$

kde f_a , resp. f_b , jsme označili objemový podíl dané látky.

2) Pásy látky se střídají příčně na desku kondenzátoru

V tomto případě uvažujeme stejný postup jako předtím. S tím rozdílem, že teď se kondenzátory chovají jako paralelně zapojené. A také platí $\sum_{a,b} S_i = V_{a,b}/d$. Výsledek, který potom dostaneme, je

$$\varepsilon_{\perp} = f_a\varepsilon_a + f_b\varepsilon_b.$$

Vidíme, že výsledné permitivity nevyšly v obou případech stejně. Možná by se na první pohled zdálo, že problém je v rozložení látky, které jsme uvažovali. Skutečnost ukazuje, že řešení tohoto problému bohužel není zdaleka tak jednoduché, jak by se na první pohled zdálo.

Zde se vám pokusíme složitost tohoto problému nastínit. Například pro kuličky látky „b“ rovnoměrně rozložené v objemu látky „a“ se dá dostat výsledek

$$\frac{\varepsilon_{\text{MGA}} - \varepsilon_{\text{b}}}{\varepsilon_{\text{MGA}} + 2\varepsilon_{\text{b}}} = f_{\text{a}} \frac{\varepsilon_{\text{a}} - \varepsilon_{\text{b}}}{\varepsilon_{\text{a}} + 2\varepsilon_{\text{b}}},$$

kde ε_{MGA} je výsledná permitivita pojmenovaná po objevitelích tohoto vztahu Maxwellovi a Garnettovi a „a“ značí, která látka je chápána jako dominantní. Jak vidíme, toto není obecné řešení, protože když vyměníme látky, výsledek se změní. Pokud bychom navíc neměli kuličky, ale nějakou úplně jinou směs, dostali bychom nějaký jiný výsledek.

Ale až tak beznadějně to není. Výsledek vlastně závisí na tom, jak moc se změní elektrická intenzita. Pro intenzitu všude stejnou (což je 2. případ, protože permitivita ve směru pole je pořád stejná a nevznikají rozhraní, na kterých by se hromadil náboj) máme výsledek ε_{\perp} . A pro často se měnící intenzitu (to je 1. případ, protože vznikají rozhraní s různou permitivitou a tím i polarizací a na rozhraních se hromadí náboj) je výsledek ε_{\parallel} . V každém jiném případě se čáry intenzity ohýbají a část se jich rozhraním vyhne. Takže skutečná výsledná permitivita je mezi ε_{\perp} a ε_{\parallel} , což je pro blízké permitivity přibližně stejné. Chytré knížky říkají, že v izotropním případě bude výsledek mezi ε_{MGA} a ε_{MGB} .

Na závěr bychom ještě zdůraznili fakt, že výsledná permitivita bude záviset na objemových podílech (jak nám vyšlo) a ne na podílu látkových množství, či hmotností daných složek. Plyne to mimo jiné i z toho, že pro energii elektrického pole platí $W = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}V$.

Jak vidno, ne všechny úlohy mají ve fyzice jednoduchá a přímočará řešení. Snad vás tento fakt příliš nerozladil a těší vás, že jste přičichli k ještě živému problému fyziky.

Úloha II.4 ... mokrá hrozba (4 body; průměr 1,83; řešilo 30 studentů)

Představte si koryto řeky široké 100 m. Jeho spád označme α . Otázkou je, jak závisí výška hladiny na průtoku vody touto řekou. Váš teoretický výsledek můžete zkusit porovnat s údaji ze srpnových povodní.

Předpokládejme, že hloubka vody v řece H je oproti šířce koryta d zanedbatelná, takže tření vody o břehy můžeme zanedbat, a že proudění vody je laminární (oprávněnost druhého předpokladu je diskutabilní, ale jakýkoliv složitější model by byl neřešitelný metodami středoškolské fyziky). Zkoumejme tenkou vrstvu vody o tloušťce dh v hloubce h pod hladinou. Tečné napětí v této vrstvě je

$$\tau = \frac{F}{S} = h \rho g \sin \alpha,$$

gradient rychlosti vody v v hloubce h je tedy

$$-\frac{dv}{dh} = \frac{h \rho g \sin \alpha}{\eta}.$$

Znaménko mínus vyjadřuje fakt, že rychlost vody s hloubkou klesá, η značí dynamickou viskozitu vody (ta je definována jako konstanta úměrnosti mezi tečným napětím a gradientem rychlosti proudění a vyjadřuje velikost tření v kapalině). Integrací dostáváme vztah mezi rychlostí proudění a hloubkou

$$v(h) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} (C - h^2),$$

hodnotu integrační konstanty C můžeme určit z požadavku $v(H) = 0$, tedy $C = H^2$ (kdyby tomu tak nebylo, tak by se rychlost proudění u dna chovala nespojitě a to je fyzikální nesmysl).

Průtok P již snadno spočítáme jako

$$P = \int_0^H dv dh = \frac{d\rho g \sin \alpha}{3\eta} H^3.$$

Průtok vody v řece tedy roste s třetí mocninou výšky hladiny.

Úloha II. P ... *basic instinct* (5 bodů; průměr 1,77; řešilo 13 studentů)

Sekáček na led – známý vražedný nástroj z tohoto filmu (vy, kdo jste tento výplod kinematografie ještě neshlédli, vězte, že toto náčiní vypadá zhruba jako šroubovák s ostrou špičkou) postavila chladnokrevná vražedkyně z dlouhé chvíle na hrot. Pomocí relací neurčitosti odhadněte maximální dobu, po kterou corpus delicti setrvá v této poloze.

Podle zadání je sekáček umístěn do labilní rovnovážné polohy. V takovém případě sebemenší výchylka z rovnovážné polohy způsobí to, že se sekáček začne pohybovat a dříve nebo později spadne. Jak dlouho to bude trvat v závislosti na velikosti počáteční výchylky, za chvíli vyřešíme.

V této úloze řešíme kvantově-mechanické aspekty setrvání tělesa v labilní poloze. Mnozí z vás uváděli chvění podložky, tepelný pohyb molekul sekáčku a jiné podobné důvody porušení rovnováhy. To je sice pravda, nicméně z Heisenbergova principu neurčitosti plyne, že sekáček nutně spadne i bez přispění těchto vlivů.

Místo polohy a hybnosti potřebujeme v kvantové mechanice znát tzv. vlnovou funkci interpretovanou většinou pomocí kvadrátu její normy, který udává hustotu pravděpodobnosti nalezení systému v daném stavu. Lidsky řečeno – nelze užít dvě veličiny (polohu a hybnost) k popisu stavu sekáčku. Pracujeme s vlnovou funkcí, pomocí které lze počítat statistická rozdělení výsledků opakovaných měření na daném systému. Ano – stejná měření dopadají pokaždé různě a náhodně. Navíc každé měření změní kvantový stav, takže před opakováním musíme znovu nastavit původní podmínky. Celou věc navíc komplikuje to, že neexistuje způsob, jak současně změřit polohu i hybnost. Takže změříme-li jednu z těchto veličin, nemáme už žádnou šanci změřit tu zbývající, protože měřením jsme stav změnil. Kvalitativně je tento fakt obsažen ve vztahu

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2)$$

Míra exaktnosti vzorce (2) závisí na definici veličin Δx a Δp . V našem příkladě nám bude stačit pouze přibližná představa, že součin chyb (tj. nepřesností, neurčitostí, nejistot, ...) v určení polohy a hybnosti nemůže být menší, než nějaká konstanta.

Vraťme se nyní k problému s padajícím sekáčkem. Úplné kvantově mechanické řešení by znamenalo vyřešení Shrödingerovy rovnice a následné nalezení takové vlnové funkce, která se bude co nejpomaleji „rozplývat“. Takové řešení je sice proveditelné, ale bohužel ne středoškolskými prostředky.

Abychom spočítali alespoň něco, zvolme následující „poloklasický“ postup: Počáteční výchylku vrcholu sekáčku z rovnovážné polohy označme x_0 , počáteční rychlost v_0 . Dobu pádu maximalizujeme, pokud bude současně co nejmenší x_0 a v_0 . Musíme však splnit relace neurčitosti, a proto

$$x_0 m v_0 = \frac{\hbar}{2}. \quad (3)$$

Znovu připomeňme, že se jedná pouze o odhad. Zmíněná „poloklasičnost“ spočívá v tom, že navzdory relacím neurčitosti připouštíme, že současně známe rychlost i polohu sekáčku a počítáme úlohu klasicky. Pochopitelně stavy, mezi kterými budeme hledat kandidáta na nejpomalejší pád, splňují relace neurčitosti s rovností. Za počáteční hodnoty do klasického řešení

dosazujeme přitom kvantové neurčitosti. Lze si to představit tak, že bude-li počáteční kvantový stav sekáčku hodně lokalizovaný v prostoru, bude naměřená hodnota x_0 hodně malá, ale zato hodnota p_0 měřená na stejném stavu bude díky velké neurčitosti naopak pravděpodobně velmi velká. Musíme tedy najít nejlepší „kompromis“.

Tím máme fyzikální úvahu za sebou a zbývající postup už je přímočarý – v závislosti na x_0 a v_0 klasicky spočítáme dobu pádu a pak se při splnění vztahu (3) budeme snažit nalézt takové počáteční podmínky, při kterých bude pád co nejdelší.

Vzdálenost těžiště sekáčku od špičky označme l . Těžiště se bude pohybovat po oblouku kružnice a polohu sekáčku budeme popisovat vzdáleností těžiště od rovnovážné polohy po tomto oblouku (označme ji x). Dále pro jednoduchost předpokládejme, že hmotnost sekáčku m je soustředěná do těžiště. Tím jsme úlohu převedli na problém velmi připomínající matematické kyvadlo. Stejně jako u matematického kyvadla se omezíme na malé úhly³ a provedeme linearizaci. Pohybová rovnice pak vypadá následovně.

$$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0, \quad \text{kde } \lambda^2 = \frac{g}{l}.$$

Ty, kdo neví, že \ddot{x} je druhá derivace x podle času, tedy zrychlení, odkazujeme na seriál. Rovnice pro kyvadlo se od této liší jen kladným znaménkem a podobně kosmeticky vypadá i odlišnost řešení⁴

$$x = x_0 \cosh \lambda t + \frac{v_0}{\lambda} \sinh \lambda t$$

(v rovnici pro harmonické kmity nejsou hyperbolické, ale goniometrické funkce). Hyperbolické funkce lze vyjádřit pomocí lineární kombinace klesající a rostoucí exponenciály. Vzhledem k uvažovaným počátečním podmínkám je zřejmé, že klesající část můžeme zanedbat a řešení přepsat do tvaru

$$x = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right) e^{\lambda t}. \quad (4)$$

Nyní je vidět, že maximalizace doby pádu znamená minimalizaci výrazu v závorce. Dosaďme tedy za v_0 ze vztahu (3). Označíme-li $a^2 = \hbar/2m\lambda$, upraví se výraz v závorce do tvaru

$$a \left(\frac{x_0}{a} + \frac{a}{x_0} \right)$$

Tento výraz nabývá minima $2a$ pro $x_0 = a$. Kdo si to nedokáže zdůvodnit pomocí derivací, může ověřit

$$\frac{x_0}{a} + \frac{a}{x_0} = 2 + \left(\sqrt{\frac{x_0}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x_0}} \right)^2,$$

z čehož je uvedený fakt viditelný na první pohled. Po dosazení dostává vztah pro pohyb „nejpomaleji padajícího“ sekáčku tvar $x = a e^{\lambda t}$. Doby pádu můžeme odhadnout jako čas, ve kterém bude výchylka srovnatelná s l . Po krátkém výpočtu a dosazení hodnot $l = 20$ cm, $m = 200$ g dostáváme

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{l}{a} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{2ml\sqrt{gl}}{\hbar} = 5 \text{ s.}$$

³⁾ S přesností na dvě platné cifry budou naše vztahy platit v rozmezí pár desítek stupňů, a když už se sekáček dostane tak daleko, spadne již téměř okamžitě.

⁴⁾ Pilný čtenář může derivováním a dosazením do pohybové rovnice ověřit správnost tohoto vztahu.

Diskuse výsledku je snadná. Asi nejpodstatnějším závěrem je to, že přestože jsme uvažovali velmi idealizovaný model a neuvažovali početné vlivy vedoucí k pádu sekáčku (např. různé fluktuace, proudění vzduchu apod.), lze z krátkého času usuzovat, že kvantové vlivy hrají i v tomto případě svou roli.

Ještě zajímavější než samotná hodnota T je tvar výsledného vzorce. Před logaritmem stojí čas řádově odpovídající délce periody kmitů kyvadla délky l a v logaritmu je podíl veličiny rozměru momentu hybnosti sestavené z hodnot m , l , g (tedy pro „rozumně“ velikosti a hmotnosti veličina řádu jednotek J-s) a ve jmenovateli redukováná Planckova konstanta $\hbar \doteq 1 \cdot 10^{-34}$ J-s. Díky vlastnostem logaritmu nebude jeho hodnota extrémní (malá či velká) a hlavně bude velmi málo reagovat na změny parametrů (větší a těžší sekáčky apod.). To je také důvod, proč většine řešitelů vycházely podobné hodnoty, přestože jsme konkrétní čísla nezadali.

Jediným způsobem, jak udržet po delší dobu těleso v labilní poloze, je tedy menší podvod – je třeba systém sestavit tak, aby se nalézal v sice úzké, ale přesto stabilní⁵ poloze (což lze zajistit třeba ztupením hrotu sekáčku).

Úloha III. 1 ... vítr na dálnici (4 body; průměr 2,00; řešilo 32 studentů)

V autošколе každého upozorňují na nebezpečí bočního větru při vjezdu ze závětří na otevřené prostranství. Zejména nebezpečné je to prý na dálnici při velké rychlosti.

Uvažujte konstantní rychlost bočního větru a spočítejte, jak se mění síla působící z boku v závislosti na rychlosti auta. Tvar auta předpokládejte takový, abyste úlohu dokázali vyřešit. Diskutujte vliv větru na následný pohyb vozidla.

Odporová síla při pohybu auta vzduchem se řídí Newtonovým vztahem $F_{\text{odp}} = CS\rho v^2/2$, kde C je bezrozměrná konstanta daná tvarem, S je plocha auta promítnutá do roviny kolmé na směr pohybu, v je rychlost pohybu a ρ hustota vzduchu.

Jede-li auto rychlostí v a fouká boční vítr rychlostí u , bude vzájemná rychlost vzduchu a auta mít velikost v_{rel} , pro kterou platí $v_{\text{rel}}^2 = v^2 + u^2$. Síla, kterou pomocí této rychlosti z Newtonova vzorce získáme, má velikost $F_{\text{odp}} = CS\rho(v^2 + u^2)/2$. Se směrem pohybu auta ovšem svírá úhel, pro který platí tg $\varphi = u/v$.

Pro složku síly F_{odp} kolmou na směr pohybu auta pak dostáváme

$$F_b = F_{\text{odp}} \sin \varphi = \frac{1}{2} CS\rho u \sqrt{v^2 + u^2}. \quad (5)$$

Diskutujme nyní, jak se F_b mění s rychlostí v . Už samotný fakt, že ve vztahu (5) vystupuje závislost na v , stojí za povšimnutí. Je to umožněno nelineární (zde konkrétně kvadratickou) závislostí odporové síly na rychlosti. Dále se ovšem mění směr φ a s ním i S (z boku má auto větší průřez) a C (tvar auta je relativně dobře aerodynamický při pohybu dopředu, což zřejmě neplatí pro pohyb do strany). Nicméně uvážíme-li, že rychlost větru bude někde v intervalu 10–40 km·h⁻¹ a rychlost auta 100–200 km·h⁻¹, nebudou změny směru příliš výrazné a můžeme C a S považovat za konstantní.

Pokud navíc uvážíme $u \ll v$ (což zejména v druhé mocnině bude celkem dobře splněno), zredukuje se závislost boční síly na rychlosti na vztah

$$F_b = F_{\text{odp}} \sin \varphi = \frac{1}{2} CS\rho uv \sim v. \quad (6)$$

⁵⁾ Při velké snaze lze stabilní polohu nalézt dokonce i u tzv. Kolumbova vejce aniž by bylo nutné ho nakřápnout.

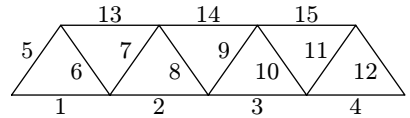
Lze tedy říct, že v jisté aproximaci platí, že velikost boční síly je úměrná rychlosti auta. Otázka je, jak se to projeví na řízení. Začne-li síla náhle působit, zareaguje řidič až za určitý čas. Za tu dobu způsobí boční síla vychýlení automobilu o vzdálenost, která je úměrná její velikosti. Tedy s rostoucí rychlostí auta roste i účinek větru na jeho pohyb. Navíc je otázkou, jak se tento účinek projeví na řízení. Obecně totiž platí, že při vyšší rychlosti je auto hůře ovladatelné, a tedy by i stejný účinek byl při větší rychlosti pro řidiče horší.

Úloha III. 2 ... železniční most (4 body; průměr 2,64; řešilo 14 studentů)

Chrabrý rudoarmějec vjel tankem na železniční most, jehož konstrukce, nad ním se tyčící, je schématicky znázorněna na obr. 13. Vaším úkolem je popsat, jak moc budou při přejezdu namáhány jednotlivé části mostu. Pokud jsou meze pevnosti všech tyčí v tahu stejné jako meze v tlaku, určete maximální hmotnost tanku, který po mostě může přejet. Můžete uvažovat, že tank je oproti mostu malý.

Při řešení této úlohy zanedbáme namáhání mostu vlastní vahou. Tím si celou úlohu zjednodušíme a toto namáhání by šlo nakonec do celého výsledku započítat. Dále budeme předpokládat, že se jednotlivé nosníky mostu nebudou prohýbat. Toto by v praxi zcela zanedbat nešlo, ale pro naše přibližné řešení to bude stačit.

Nejdříve si očíslojme nosníky (viz obr. 13). Nosníky zpevňující vozovku očíslojeme 1–4, šikmé nosníky 5–12 a horní vodorovné nosníky 13–15. Úhel mezi šikmým a vodorovným nosníkem označíme α . Po vjetí tanku na most na nosníky bude na obou koncích působit síla, stejné velikosti a opačného směru. Tuto velikost u i -tého nosníku označíme f_i a budeme používat konvenci, když je tyč namáhána v tlaku, bude f_i kladné a v tahu záporné. V rovnováze bude platit, že síly působící v jednom uzlu se navzájem vyruší. Díky symetrii bude stačit vypočítat zatížení mostu jen pro tank na dílech 1 a 2. Když bude tank na určitém dílu, rozdělí se síla na dvě části, které budou působit na koncích tohoto dílu.



Obr. 13

Když budeme psát rovnice, pro vyrušení sil v jednom uzlu, získáme dvě rovnice, jednu pro svislou složku síly a jednu pro vodorovnou. Nejdříve si napíšeme rovnice pro horní čtyři uzly.

$$\begin{aligned} f_5 + f_6 &= 0, & (f_5 - f_6) \cos \alpha - f_{13} &= 0, \\ f_7 + f_8 &= 0, & (f_7 - f_8) \cos \alpha + f_{13} - f_{14} &= 0, \\ f_9 + f_{10} &= 0, & (f_9 - f_{10}) \cos \alpha + f_{14} - f_{15} &= 0, \\ f_{11} + f_{12} &= 0, & (f_{11} - f_{12}) \cos \alpha + f_{15} &= 0. \end{aligned}$$

Dále napíšeme rovnice pro uzel mezi díly 3 a 4

$$f_3 - f_4 + (f_{10} - f_{11}) \cos \alpha = 0, \quad f_{10} + f_{11} = 0.$$

Nyní napíšeme rovnice pro uzly mezi díly 1, 2 a 3. V uzlu mezi 1 a 2 necháme působit sílu f_a , v druhém f_b . Tyto síly budou působit směrem dolů. Dostaneme tedy rovnice

$$\begin{aligned} (f_6 + f_7) \sin \alpha &= f_a, & f_1 - f_2 + (f_6 - f_7) \cos \alpha &= 0, \\ (f_8 + f_9) \sin \alpha &= f_b, & f_2 - f_3 + (f_8 - f_9) \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Zatím máme 14 rovnic a patnáct neznámých. Jako poslední rovnici přidáme podmínku, že síla na jednom konci mostu je svislá

$$f_1 + f_5 \cos \alpha = 0.$$

Nyní máme dostatek rovnic, je jich sice 15, ale řešení není zas tak složité. Po chvíli práce dostaneme

$$\begin{aligned} f_1 &= (3f_a + 2f_b) \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha}, & f_2 &= (5f_a + 6f_b) \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha}, \\ f_3 &= -(f_a + 2f_b) \frac{3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha}, & f_4 &= (f_a + 2f_b) \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha}, \\ f_6 &= -f_5 = \frac{3f_a + 2f_b}{4 \sin \alpha}, & f_7 &= -f_8 = \frac{f_a - 2f_b}{4 \sin \alpha}, \\ f_9 &= -f_{10} = f_{11} = -f_{12} = \frac{f_a + 2f_b}{4 \sin \alpha}, & f_{13} &= -(3f_a + 2f_b) \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha}, \\ f_{14} &= 2f_{15} = -(f_a + 2f_b) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Nyní již zbytek dopočteme pro $\alpha = \pi/3$

Pokud je tank na 1. dílu je $f_b = 0$ a $f_a = mgx/l$, kde l je délka jednoho dolního dílu a x je vzdálenost tanku od kraje. Dosadíme a nalezneme, ve které tyči je tlak nejvyšší. Je to pro $x = l$ v dílu 5, 13 a 6, kde

$$|f_6| = |f_5| = |f_{13}| = \frac{\sqrt{3}}{2} mg.$$

Když je tank na 2. dílu je $f_a = mg(2l - x)/l$ a $f_b = mg(x - l)/l$. Zde je maximální hodnota pro $x = 2l$, v dílu 14.

$$|f_{14}| = \frac{2\sqrt{3}}{3} mg.$$

Je tedy vidět, že nejvíce je zatěžován nosník 14, a to když je tank uprostřed mostu. Pro maximální hmotnost tanku platí

$$m_{\max} = \frac{\sqrt{3} F_{\max}}{2g},$$

kde F_{\max} je maximální síla, kterou nosník vydrží.

Úloha III.3 ... praktikum (4 body; průměr 1,00; řešilo 19 studentů)

Ve fyzikálním praktiku dostal organizátor FYKOSu za úkol pomocí tří měření zjistit napětí třech různých zdrojů.

K dispozici má jeden voltmetr následujících vlastností: Jeho systematická chyba je nulová. Náhodná chyba je charakterizována střední kvadratickou odchylkou σ (tj. rozptyl je σ^2), která je nezávislá na velikosti měřeného napětí.

Poradte organizátorovi, zda a popř. jak lze napětí změřit přesněji než změřením každého zdroje zvlášť. Za míru celkové přesnosti považujte součet rozptylu výsledných hodnot.

Před začátkem výpočtu si ujasněme základní pojmy. Hodnota kterou měříme pomocí voltmetru je *náhodná veličina*. Každá náhodná veličina je plně charakterizována takzvanou *distribuční funkcí*. Tato funkce udává, s jakou pravděpodobností naměříme jednotlivé výsledky (přesně řečeno, pokud označíme distribuční funkci f , pak pravděpodobnost toho, že naměřená hodnota (například napětí) bude ležet v úzkém intervalu hodnot $(U, U + dU)$ bude $p = f(U) dU$). Náhodnou veličinu však můžeme popsat i jednodušeji (na úkor částečné ztráty

informace o této veličině) pomocí takzvané *střední hodnoty* a *rozptylu* (takto zjednodušený popis náhodné veličiny můžeme ještě zpřesnit zadáním dalších parametrů, takzvaných *momentů*). Střední hodnota \bar{x} náhodné veličiny x je definována jako aritmetický průměr z velmi mnoha naměřených hodnot x_i

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Pokud bychom si nakreslili graf distribuční funkce, udávala by střední hodnota polohu „středu“ tohoto grafu. Rozptyl je definován jako

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Jedná se tedy o aritmetický průměr druhých mocnin rozdílů naměřených hodnot a střední hodnoty. Graf většiny „rozumných“ distribučních funkcí má tvar jakéhosi „hrbu“. Rozptyl náhodné veličiny pak zhruba udává, jaká je druhá mocnina jeho šířky, což můžeme považovat za míru nepřesnosti měření.

V zadání bylo uvedeno, že voltmetr měří napětí s nulovou systematickou chybou a rozptylem σ^2 . To znamená, že distribuční funkce naší náhodné veličiny bude mít střední hodnotu rovnou skutečné hodnotě měřeného napětí a rozptyl σ^2 .

Změříme-li napětí na několika sériově zapojených zdrojích, musíme napětí na jednotlivých zdrojích z naměřených hodnot dopočítat. Budeme tedy naměřené hodnoty různé sčítat, odečítat a násobit konstantami (řešíme soustavu lineárních rovnic).

Je zřejmé, že střední hodnota součtu dvou náhodných veličin (násobku náhodné veličiny číslem) je součtem jejich středních hodnot (násobek střední hodnoty). Dále vidíme, že rozptyl c -násobku náhodné veličiny bude c^2 -násobkem jejího rozptylu (toto tvrzení plyne například z definice rozptylu, nebo z faktu, že rozptyl je druhou mocninou *šířky* distribuční funkce (distribuční funkce c -násobku náhodné veličiny bude c -krát širší)).

Otázkou však je, jaký bude rozptyl součtu náhodných veličin. V obecném případě o něm bohužel nedokážeme nic říct. Dá se ale ukázat, že pokud je chyba měření daná velkým počtem náhodných vlivů (a to je v praxi splněno, protože naměřené napětí může ovlivnit všechno od vlhkosti vzduchu, přes pracovní úsilí dělníka, který právě o patro výše sbíječkou bourá zeď, až po konstelaci Jupitera se Saturnem), je tvar distribuční funkce měřené veličiny vždy stejný, ať měříme cokoliv a jakýmkoliv způsobem. Je jím takzvaná *Gaussova funkce*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right).$$

O veličině s takovouto distribuční funkcí říkáme, že má *normální* či *Gaussovo* rozdělení. Díky této vlastnosti pak platí, že rozptyl součtu nebo rozdílu dvou naměřených veličin je vždy součet jejich rozptylů (důkaz tohoto tvrzení již není triviální, takže ho neuvádíme). Nyní známe základní pravidla pro počítání s náhodnými veličinami a můžeme tedy přistoupit k vlastnímu výpočtu

Obecné měření si můžeme vyjádřit jako $u = a_1U_1 + a_2U_2 + a_3U_3$, kde a_i nabývá hodnoty $-1, 0, 1$, podle toho, s jakou polaritou je tam zdroj zapojen, resp. jestli tam vůbec je. Taková měření uděláme tři a dopočteme zadané napětí. Abychom nemuseli rozebírat moc možností, tak si uvědomíme některé symetrie, které dají stejný výsledek.

1. Je jedno jestli měříme u , nebo $-u$. Protože mají stejný rozptyl.
2. Na výsledku se neprojeví, změníme-li polaritu jednoho zdroje u všech měřených obvodů (např. U_1). Tak se změní jenom celkové znaménko ve vyjádření napětí tohoto zdroje $U'_1 = -U_1$, což neovlivní výsledný rozptyl napětí tohoto zdroje.
3. Dále využijeme toho, že záměna jednotlivých měření dá stejný výsledek. Stejně i záměna v označení zdrojů jenom prohodí výsledky, ale celkové hodnoty budou stejné.

Ted' se můžeme pustit do samotné analýzy. Rozdělíme si to na možnosti podle počtu zapojených zdrojů. Uvažujeme, že když měříme na jednom zdroji, nedostaneme lepší výsledek. Proto musíme naměřit minimálně dva zdroje.

1. Máme 2 zdroje. Tady ještě musím rozdělit dvě možnosti, podle toho kolikrát se tam zdroje vyskytují
 - a) Jeden zdroj je ve všech měřeních BÚNO⁶ U_1 . Přitom víme, že je tam 2×3 zdrojů, takže ještě tam musí být jeden zdroj 2-krát (búno U_2) a jeden jednou (búno U_3). Jediná možnost lineární nezávislá možnost je (až na změnu znamének u U)

$$(U_1 + U_2, U_1 - U_2, U_1 + U_3).$$

- b) Každý je tam dvakrát.

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_2 + U_3).$$

Rozmyslete si, že ostatní možnosti jsou ekvivalentní.

2. V prvních dvou měřeních máme 2 a při posledním 3 zdroje. Uvažujme, že při prvním měření máme búno $U_1 + U_2$. Potom na druhém máme 2 možnosti.
 - a) Stejně zdroje jako u 1. měření (U_1, U_2). Z lineární nezávislosti dostaneme

$$(U_1 + U_2, U_1 - U_2, U_1 + U_2 + U_3),$$

na znaménku U_3 díky symetriím nezávisí.

- b) Zdroj U_1 je u obou a ostatní se liší. Tady dostaneme pro 3 měření tři možnosti

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_1 + U_2 + U_3),$$

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_1 + U_2 - U_3),$$

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

3. V prvním měření jsou dva zdroje, v ostatních dvou 3. V prvním uvažujme búno $U_1 + U_2$. Potom můžeme rozlišit dvě možnosti podle polarity zdroje U_2 (nás zajímá jenom relativní změna oproti $U_1 + U_2$ a je jedno, který zvolíme, protože celkové znaménko můžeme otočit).
 - a) Stejná polarita, potom v druhém měření máme $U_1 + U_2 + U_3$, u třetího potom dostaneme z lineární nezávislosti

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, U_1 - U_2 + U_3),$$

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, U_1 - U_2 + U_3),$$

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

⁶⁾ bez újmy na obecnosti

- b) Různá polarita (potom už můžeme stejnou polaritu uvažovat u třetího měřáku, protože ostatní možnosti jsme vyloučili v bodě a). Potom zůstane jenom jedna lineárně nezávislá možnost

$$(U_1 + U_2, U_1 - U_2 + U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

4. Ve všech měřeních jsou 3 zdroje. Potom zůstane díky symetriím 1 možnost.

$$(U_1 + U_2 + U_3, U_1 + U_2 - U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

Ted' musíme pro každou možnost vyřešit soustavu a najít vyjádření napětí zdrojů. Pro ně spočteme rozptyl $U = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ podle vzorce $\sigma_v^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\sigma^2$. A výsledně sečteme $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$. Nejmenší hodnotu dostaneme pro 3b.

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_3, \\ U_2 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{1}{4}u_3, \\ U_3 &= \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3, \end{aligned}$$

kde jsme u_i označili i -tým měření. Dostaneme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 3/8$ a $\sigma_3^2 = 1/2$.

Úloha III.4 ... rychlá smrt (4 body; průměr 1,56; řešilo 18 studentů)

V modulu Apollo letí astronauti na Měsíc, skrz okno jim proletí meteoroid a udělá v něm díрку o poloměru $r = 1$ mm. Jak se bude měnit teplota a tlak v kabině o objemu $V = 60$ m³, pokud původní podmínky jsou $t = 20$ °C a normální tlak. Jako bonus se pokuste odhadnout, za jak dlouho začnou mít astronauti vážné problémy.

Na řešení této úlohy se dá vysvětlit hned několik důležitých poznatků z molekulové fyziky a termodynamiky. Proto se nelekejte, že je poněkud delší než je obvyklé.

Jako v téměř každé fyzikální úloze i zde se nejprve zabýváme zjednodušujícími předpoklady, bez kterých bychom úlohu neuměli vyřešit. Předně budeme plyn v modulu považovat za ideální. Dále předpokládáme, že všechny děje jsou rovnovážné, tj. v každém okamžiku můžeme systém popsat zákony, které platí pro plyn v termodynamické rovnováze (např. stavovou rovnicí). A konečně vakuum vně modulu považujeme za dokonalé.

Plyn z modulu uniká proti nulovému tlaku, nekoná tedy žádnou práci. Nedochází ani k tepelným výměnám s okolím, neboť okolím je vakuum. Proto se podle prvního termodynamického zákona nemění ani vnitřní energie plynu jako celku (včetně toho, co unikl). Víme ale, že vnitřní energie ideálního plynu závisí pouze na počtu částic N a termodynamické teplotě T , na obojím lineárně:

$$U = \frac{5}{2}NkT,$$

kde $5/2$ je faktor pro dvouatomové molekuly plynu a k je Boltzmanova konstanta. Proto nemění-li se vnitřní energie plynu, nemění se ani jeho teplota.

Někdo by ale mohl začít šťourat a ptát se, odkud víme, že průměrná energie připadající jedné uniknuvší molekule je stejná jako energie připadající na jednu molekulu, která zůstane. Je pravda, že toto jsme ještě pořádně nezdůvodnili. Uděláme to vzápětí po odvození vztahu pro počet molekul, které uniknou z modulu za element času Δt .

Ze samotných principů statistické fyziky, která popisuje chování mnohačasticových systémů, plyne vztah pro rozdělení částic v ideálním plynu podle velikosti rychlosti. Platí, že pravděpodobnost, se kterou se vybraná molekula o hmotnosti m ideálního plynu pohybuje rychlostí o velikosti v intervalu $(v, v + dv)$, je

$$g(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv. \quad (7)$$

Tomuto vztahu se říká *Maxwellovo-Boltzmanovo rozdělení rychlostí*. Po chvilce integrování se dá spočítat, že střední resp. střední kvadratická rychlost molekuly plynu je

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v g(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad \overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 g(v) dv = \frac{3kT}{m}.$$

Počítejme nyní, kolik molekul unikne z modulu za čas Δt infinitesimalně malým otvorem o ploše ΔS . Následující odstavec je založen na znalosti poněkud pokročilejší matematiky, pokud mu nerozumíte, spokojte se s výsledným vztahem (9), který je pochopitelný intuitivně až na faktor $1/4$. Vezměme Δt mnohem menší než je průměrný čas mezi dvěma srážkami jedné molekuly s jinými. Díky tomu můžeme předpokládat, že v časovém intervalu $(0, \Delta t)$ nedochází k žádným srážkám. Zvolme systém sférických souřadnic tak, že osa z vede kolmo na otvor. Od osy z určujeme úhel ϑ a od libovolného směru v rovině $z = 0$ určujeme úhel φ . Omezme se zatím jen na molekuly pohybující se rychlostí mezi $(v, v + dv)$. Z bodu A o souřadnicích (r, ϑ, φ) molekula otvorem unikne, pokud $v\Delta t > r$ a pokud letí do správného prostorového úhlu. Prostorový úhel, pod kterým je ploška ΔS vidět z bodu A, je

$$\Delta\Omega = \frac{\cos \vartheta \Delta S}{r^2}.$$

Jelikož z okolí bodu A letí do každého směru stejně molekul, letí vybraná molekula do směru $\Delta\Omega$ s pravděpodobností $\Delta\Omega/4\pi$. Z geometrických úvah si odvodte, že objem oblasti, jejíž body mají souřadnice mezi $(r, r + dr)$, $(\varphi, \varphi + d\varphi)$, $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$, je $dV = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$. Označíme-li ještě ρ_v objemovou hustotu počtu molekul, můžeme napsat, že za čas Δt unikne ploškou ΔS z modulu $dN(v)$ molekul, jejichž rychlost má velikost mezi $(v, v + dv)$.

$$dN(v) = \int_0^{v\Delta t} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\Delta S \cos \vartheta}{4\pi r^2} g(v) dv \rho_v r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = \frac{1}{4} \Delta S \Delta t \rho_v g(v) v dv. \quad (8)$$

Integrovali jsme přes element objemu dV , $g(v)$ je hustota pravděpodobnosti ze vztahu (7). Nezávisle na rychlosti tedy unikne

$$\Delta N = \int_0^{\infty} dN(v) = \frac{1}{4} \Delta S \Delta t \rho_v \int_0^{\infty} g(v) v dv = \frac{1}{4} \Delta S \Delta t \rho_v \bar{v}.$$

Celou plochou S tedy za malý čas Δt unikne z modulu

$$\Delta N = \frac{1}{4} S \Delta t \rho_v \bar{v} \quad (9)$$

molekul. Hustota ρ_v molekul se samozřejmě mění s časem. Střední rychlost molekul v plynu \bar{v} na čase nezávisí, nezávisí-li na čase teplota plynu. To ukažme v následujícím odstavci.

Jak jsme řekli výše, potřebujeme ukázat, že průměrná energie připadající jedné uniknuvší molekule je stejná jako energie připadající na jednu molekulu, která zůstane. Víme, že energie molekuly je úměrná kvadrátu její rychlosti $E \sim v^2$, resp. $dE \sim v dv$. Proto podle vztahů (8) a (7) můžeme psát, že počet uniknuvších molekul s energií mezi $(E_1, E_1 + dE)$ je

$$dN(E_1) = c_1 E_1 e^{c_2 E_1} dE,$$

c_1, c_2 jsou nedůležité konstanty. Poměr počtu uniknuvších molekul o energiích E_1 a E_2 bude

$$\frac{dN(E_1)}{dN(E_2)} = \frac{E_1 e^{c_2 E_1}}{E_2 e^{c_2 E_2}},$$

což je přesně poměr počtu molekul o energiích E_1 a E_2 v plynu, tudíž je i stejné rozložení počtu molekul podle energie, resp. rychlosti. A to je přesně to, co jsme potřebovali dokázat, abychom přesvědčili každého, že pokud je v modulu ideální plyn, jeho teplota se bude zachovávat. U reálného plynu nezávisí vnitřní energie pouze na teplotě, tudíž by vše bylo složitější a ukázalo by se, že u reálného plynu by se teplota měnila.

Vraťme se k výpočtu závislosti tlaku na čase. Využijeme stavovou rovnici ideálního plynu $pV = NkT$ a vztah (9), tedy

$$dp = -\frac{kT}{V} dN = -\frac{kT}{V} \frac{1}{4} S_{\varrho v} \bar{v} dt = -\frac{S\bar{v}}{4V} p dt.$$

Kromě času a tlaku jsou v této rovnici samé konstanty, tudíž postupem vysvětleným v minulém díle seriálu dostaneme pro tlak a zadané hodnoty

$$p = p_0 e^{-\frac{S\bar{v}}{4V} t} = p_0 e^{6,06 \cdot 10^{-6} \{t\}}.$$

Pokusme se zodpovědět otázku, kdy začnou mít kosmonauti problémy. Na vysokých horách je asi poloviční atmosférický tlak a i trénovaný člověk většinou potřebuje dýchací přístroj. V modulu tlak na polovinu klesne asi za 31 hodin. Tudíž mají kosmonauti spoustu času na ucpání dírky nebo nasazení dýchacích přístrojů.

A závěrem několik poučných poznámek k vašim řešením. Někteří z vás neodvozovali vztah (9) tak pečlivě jako my a po vzoru odvození tlaku působícího na stěny nádoby v plynu napsali

$$\Delta N = \frac{1}{6} S \Delta t \varrho v \sqrt{v^2}.$$

V tomto případě je ale správně námi získaný vztah. Sami se podívejte do středoškolských učebnic a srovnajte, kde se u odvození tlaku vezme šestina místo čtvrtiny a střední kvadratická rychlost místo střední rychlosti.

Také se objevilo nemálo řešitelů, kteří výtakovou rychlost spočítali z Bernoulliho rovnice jako $v = \sqrt{2p/\varrho} = \sqrt{2kT/m}$, to je vztah formálně opět velmi podobný našemu $v = \bar{v}/4 = \sqrt{kT/2\pi m}$, nicméně není správný, neboť Bernoulliho rovnice platí pouze pro nestlačitelné kontinuum, což ideální plyn rozhodně není.

Úloha III. P ... velikost elementárních částic (4 body; průměr 2,45; řešilo 29 studentů)

- a) Elektrostatická energie rovnoměrně nabitě koule je $E = (3Q^2)/(20\pi\epsilon_0 R)$. Pokud to dokážete, ověřte tento vztah výpočtem, jinak řešte rovnou úkol b).
- b) Pomocí tohoto vztahu se pokuste ze znalosti klidové energie protonu a elektronu spočítat rozměr těchto částic.
- c) Rozmyslete, proč je tento postup zcela nesmyslný. Pozn.: experimentálně je ověřeno, že rozměr elektronu je menší než 10^{-19} m.

- a) Energie nabitě koule se spočítá z představy, že celý náboj je v nekonečnu a my ho na kouli přitáhneme. Náboj budeme tahat postupně v kulových slupkách. Práce potřebná na přidání slupky ve vzdálenosti r je

$$dW = \varphi dQ,$$

kde φ je potenciál koule v této vzdálenosti. Nabitá koule se z vnějšku chová jako bodový náboj.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0},$$

kde ϵ_0 je permitivita vakua a za Q jsme dosadili vyjádření pomocí hustoty náboje $Q = 4\pi r^3 \rho / 3$. Zdiferencováním pro dQ potom dostaneme $dQ = 4\pi \rho r^2 dr$. Po dosazení získáme pro práci

$$dW = \frac{4\pi \rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0}.$$

Výsledná energie je práce na přenesení všech slupek

$$E = \int_0^R \frac{4\pi \rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr = \frac{4\pi \rho^2 R^5}{15\epsilon_0}.$$

Vyjádřením hustoty pomocí celkového náboje dostaneme výsledný vztah.

$$E = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}. \quad (10)$$

- b) Za energii dosadíme ze známého Einsteinova vztahu

$$E_e = m_e c^2 = 510 \text{ keV} = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J},$$

$$E_p = m_p c^2 = 940 \text{ MeV} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ J},$$

kde $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Tato jednotka se často používá právě v částicové fyzice. Dosazením do rovnice (10) dostaneme výrazy pro vzdálenost

$$R_e = 1,68 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

$$R_p = 9,2 \cdot 10^{-19} \text{ m}.$$

- c) Jsou dva závažnější důvody, proč celý postup zahrnout. První je ten, že rovnice pro energii a potenciál, které jsme použili, nemusí platit pro tak malé vzdálenosti. Rovnice pro potenciál totiž vycházejí z Maxwellových rovnic (tyto se dají zjednodušit pro elektrostatický případ do potenciálového tvaru), které jsou ale klasickými zákony a vyžadují přesnou znalost polohy a

energie (dá se přímo spočítat z hybnosti), což je ale v rozporu s kvantovou teorií – principem neurčitosti. Když vezmeme neurčitost v poloze pro elektron $\Delta x_e = 10^{-15}$ m, z toho pro hybnost $\Delta p_e = \hbar/\Delta x_e = 10^{-19}$ kg·m·s⁻¹, z toho energie $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \sim pc = 10^{-11}$ J, což je mnohem větší než energie E_e . Pro proton uvažujeme stejně.

Ve skutečnosti se dají Maxwelllovo rovnice jaksi zobecnit tím, že jejich tvar nezměníme, ale změni se interpretace členů vystupujících v těchto rovnicích. Energie si však přibližně zachová výše uvedenou podobu. Ale tady taky narazíme na problém, protože na těchto vzdálenostech už máme dostatečnou energii na zrod nových elektronů a pozitronů. Toto všechno platí, ale jenom pro elektron, v případě protonů tu vystupují ještě jaderné síly (silné interakce). Závěrem možno dodat, že jsme aspoň stanovili meze platnosti klasické teorie elektromagnetického pole.

Druhým závažným problémem je to, že neznáme sílu, která by takovýto objekt udržela pohromadě.

Nakonec bychom chtěli upozornit, že vzorec $E = mc^2$ platí pro všechny druhy energie, nejen pro kinetickou. Což se projeví například tím, že hélium má menší hmotnost než proton s neutronem. A tento rozdíl odpovídá právě vazbové energii. Někteří z vás by možná namítli, že odkud je potom hmotnost neutronu, když nemá náboj, ale tady hmotnost tvoří silné interakce, které drží pohromadě kvarky.

Úloha IV.1 ... rámus ve vesmíru (4 body; průměr 1,86; řešilo 21 studentů)

- a) Hustota mezihvězdného prostředí je asi 10 až 10 000 částic na metr krychlový. Tvoří ho převážně vodík. Vzdálenost mezi částicemi je tak velká, že se toto prostředí chová jako ideální plyn. Na vás je rozmyslet, zda se v takovém „vakuu“ může šířit zvuk a pokud ano, jaká může být jeho frekvence?
- b) Jaká je maximální frekvence zvuku, který se může šířit ve vzduchu za normálních podmínek?

Zvuk je mechanické vlnění o frekvenci v rozmezí zhruba $20 \div 16000$ Hz, které vyvolává sluchový vjem. Vlnění o frekvenci menší než 20 Hz nazýváme infrazvuk, vlnění s frekvencí větší než 16 kHz pak ultrazvuk.

- a) Šíření zvukové vlny probíhá prostřednictvím změn tlaku v důsledku stlačování vzduchu. Máme-li ve dvou oblastech různé hustoty molekul, pak podle kinetické teorie víme, že by molekuly z oblasti s větší hustotou měly přejít do oblasti s menší hustotou, aby se tento rozdíl vyrovnal. V takovém případě bychom ovšem žádné tlakové oscilace nedostali a neměli bychom ani zvuk. Proto je pro vznik zvuku nezbytné, aby střední volná dráha l_s molekul byla mnohem menší než vzdálenost mezi maximem a minimem tlaku, která představuje polovinu vlnové délky λ .

Střední volnou dráhu můžeme spočítat ze vztahu:

$$l_s = \frac{1}{\sigma n},$$

kde σ představuje tzv. účinný srážkový průřez a n je hustota molekul vztážená na jednotkový objem. Uvážíme-li jako výplň mezihvězdného prostoru molekulární vodík, pro nějž $\sigma \approx 10^{-19}$ m² a $n \approx 10^1 \div 10^4$, dostáváme pro jeho střední volnou dráhu $l_s \approx 10^{15} \div 10^{19}$ m.

Pro vlnovou délku λ zvukového vlnění platí vztah

$$\lambda = \frac{v_z}{f},$$

kde f je frekvence zvuku a v_z je jeho rychlost. Tu spočteme ze vztahu

$$v_z^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Uvážíme-li, že změna tlaku s hustotou ve zvukové vlně odpovídá adiabatické změně, tedy $pV^\varkappa = \text{konst}$, dostáváme

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\varkappa p}{\rho}.$$

Užitím stavové rovnice pro ideální plyn $pV = nkT$ získáváme

$$v_z = \sqrt{\frac{\varkappa kT}{m}}.$$

Teplotu oblaku ve volném prostoru odhadneme podle teploty reliktního záření na $T = 5 \text{ K}$. Pro tuto teplotu má vodík Poissonovu konstantu $\varkappa_H = 5/3$ (rotační i vibrační stupně volnosti jsou zamrzlé). Po dosazení $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$, $m = 3,32 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ vychází rychlost zvuku $v_z = 190 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Úvodní podmínka dává

$$l_s \ll \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad f \ll \frac{v_z}{2l_s} \approx 10^{-16} \div 10^{-13} \text{ Hz}.$$

Jak je vidno, to co se bude vesmírem šířit, lze stěží nazvat zvukem, natožpak rámušem.

- b) Vyjdeme ze stejných úvah jako v první části úlohy. Uvažujme $T = 300 \text{ K}$, při které má vzduch (směs dvou dvouatomových plynů) Poissonovu konstantu $\varkappa_{vz} = 7/5$ (tři translační a dva rotační stupně volnosti, vibrační jsou zamrzlé). Dále dosadíme $m = 5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$, $n \approx 6 \cdot 10^{23}$. Při těchto hodnotách dostáváme $f \approx 60 \text{ MHz}$. Tuto hodnotu ovšem nelze brát příliš dogmaticky, neboť při výpočtu záleží na zvolených hodnotách a výsledek se může i řádově lišit. Nicméně lze říci, že horní mez se pohybuje v řádově desítkách až stovkách MHz.

Úloha IV.2 ... galaktický paradox (3 body; průměr 1,77; řešilo 43 studentů)

Ve Sluneční soustavě se planety, které jsou ke Slunci blíže, pohybují rychleji než planety vzdálenější. V Galaxii se hvězdy blíže středu pohybují pomaleji než hvězdy vzdálenější. Zdůvodněte tento zdánlivý rozpor.

Nejprve se podívejme na to, jak vypadá závislost oběžné rychlosti na vzdálenosti ve Sluneční soustavě (dále jen SS).

Zanedbejme gravitační působení ostatních planet na naši testovací planetu a předpokládejme, že jedinou silou působící na planety SS je gravitační síla Slunce. Pro zjednodušení též předpokládejme, že planety se pohybují okolo Slunce po kružnicích. V rotující soustavě na planetu působí odstředivá a gravitační síla. Z jejich rovnosti vyjádříme oběžnou rychlost (M_\odot značí hmotnost Slunce)

$$G \frac{M_\odot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}}. \quad (11)$$

Galaxie je na rozdíl od SS vyplněná hvězdami. Hvězdy se okolo středu pohybují jakoby v „polévce“ tvořené ostatními hvězdami. A toto je klíč k řešení našeho paradoxu.

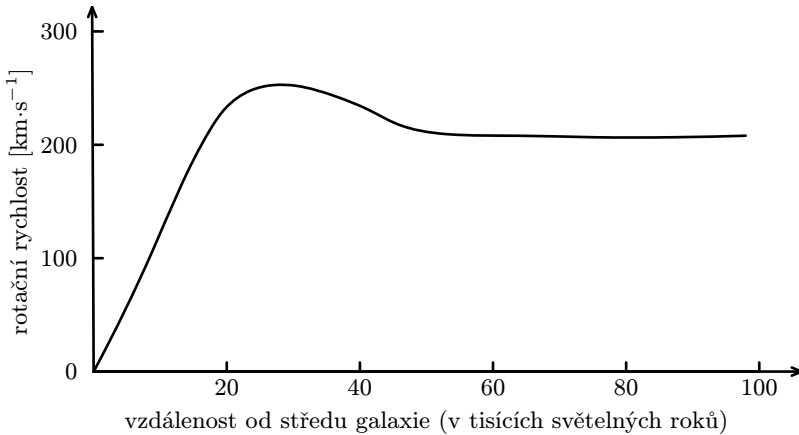
Zavedme hustotu H jako hustotu hmoty v okolí středu galaxie. Dá se dokázat, že vevnitř kulové vrstvy působí na těleso nulová výsledná síla, všechny příspěvky od částí kulové vrstvy se navzájem vyruší. Proto dále můžeme uvažovat pouze hmotu, která je blíže ke středu galaxie než naše testovací hvězda. Opět bez důkazu použijme ještě jedno tvrzení; kulové homogenní těleso přitahuje naši planetu stejnou silou, jako by celá jeho hmota byla umístěna v jeho středu, tedy

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{M_g m}{r^2}, \quad v = \sqrt{\frac{GM_g}{r}}, \quad v = r \sqrt{\frac{4}{3} \pi H G},$$

kde $M_g = \frac{4}{3} \pi H r^3$ je hmotnost koule s poloměrem stejným jako je vzdálenost naší testovací hvězdy od středu Galaxie.

Vidíme, že v okolí středu galaxie se hvězdy opravdu pohybují ve větších vzdálenostech rychleji. Toto však platí jen přibližně, protože v jisté vzdálenosti přestane mít Galaxie tvar koule a změní svůj tvar na „čočkovitý“. Hustota hvězd se vzdáleností od středu též klesá.

Na obrázku 14 vidíme náčrt oběžné rychlosti hvězd okolo středu pro galaxii M31. Proč je ve větších vzdálenostech oběžná rychlost konstantní si můžeme někdy ukázat v jiném příkladě.



Obr. 14

Úloha IV.3 ... plovoucí ledovec (4 body; průměr 0,94; řešilo 32 studentů)

Představme si ve vesmíru rotující planetu pokrytou po celém povrchu hlubokým oceánem. Na planetě v určitém místě přistane kosmický mnohoživelník, který volně plove na hladině a není vybaven pohonem použitelným ve vodě. Jakým směrem se začne z klidu pohybovat?

Nejdříve se zamyslíme nad tím, jaký bude tvar planety. Protože je planeta tvořena vodou, bude povrch její hladiny vždy kolmý na síly, které na vodu působí. Na vodu působí jak gravitační, tak odstředivá síla. Voda se ustálí tak, aby tyto síly byly kolmé na hladinu. Kdyby výslednice nebyla kolmá, voda by se začala pohybovat a tedy by nebyla v rovnováze. Hladina tedy tvoří ekvipotenciální plochu.

Představme si teď na hladině těleso, které je zčásti ponořené. Určitě tam bude působit tíhová (gravitační + odstředivá) síla. Tíhová síla působí v těžišti daného tělesa. Proti ní bude působit vztlaková síla. Zamyslíme se nad tím, kde tato síla působí. Kdyby místo ponořené části tělesa byla voda, tak tíhová a vztlaková síla na vodu budou stejné a budou mít působiště

v geometrickém těžišti ponořené části. Takže působí vztlakové síly na původní těleso bude také v těžišti ponořené části. Vztlaková síla bude působit kolmo na ekvipotenciálu v bodě těžiště ponořené části tělesa. Její velikost bude přesně taková, aby vyrovnala průmět tíhové síly do svého směru. Zbytek tíhové síly (bude působit kolmo na vztlakovou) zůstane nevyrušený a rozpohybuje těleso.

Takže pokud chceme vědět, kterým směrem se těleso pohybuje, musíme vědět, kterým směrem tato síla působí. Vzdálenější ekvipotenciály jsou více zploštělé (gravitační síla se vzdáleností klesá, zatímco odstředivá roste), tedy výslednice vztlakové síly (působí kolmo na spodní ekvipotenciálu směrem nahoru) a tíhové síly (působí kolmo na horní ekvipotenciálu směrem dolů) bude mířit směrem k rovníku.

Nutno ovšem poznamenat, že velikost této síly bude za reálných podmínek velmi malá a měřitelnost tohoto jevu např. na Zemi je diskutabilní.

Úloha IV.4 ... ekvipotenciály (4 body; průměr 2,13; řešilo 24 studentů)

Zjistěte poměr velikostí nábojů dvou částic. Ekvipotenciály jejich elektrického pole vidíte na obr. 4 na str. 9. Zkuste také odhadnout přesnost vaší metody.

Náboj vlevo označme Q_a , vpravo Q_b . Z obrázku je vidět, že oba náboje musí mít stejné znaménko, jinak by ekvipotenciály byly hustější mezi náboji a ty, které jsou nábojům nejbližší, by byly protaženy nahoru nikoliv do stran.

Potenciál bodového náboje Q ve vzdálenosti r od něj (volíme-li nulovou hladinu v nekonečnu) je $\varphi = kQ/r$, kde k je konstanta závislá pouze na volbě jednotek. Elektromagnetické pole je aditivní, tudíž potenciál od dvou nábojů je roven součtu potenciálů od každého z nich. V našem případě tedy

$$\varphi = k \left(\frac{Q_a}{r_a} + \frac{Q_b}{r_b} \right),$$

kde $r_{a,b}$ je samozřejmě vzdálenost levého resp. pravého náboje od zvoleného bodu. Označíme-li poměr nábojů $q = Q_a/Q_b$, pak pro všechny body jedné ekvipotenciály platí

$$\text{konst} = \frac{q}{r_a} + \frac{1}{r_b}. \quad (12)$$

Při proměrování obrázku se pro jednoduchost omezíme na body na horizontální ose, kterou s dostatečnou přesností získáme např. po přeložení obrázku napůl. Nulu zvolme kdekoli na této ose. Označíme-li s_a, s_b polohy nábojů, r, r' polohy dvou bodů na jedné ekvipotenciále, např. té vnější, dostaneme ze vztahu (12) pro poměr nábojů q

$$q = \frac{\frac{1}{r' - s_b} - \frac{1}{s_b - r}}{\frac{1}{s_a - r} - \frac{1}{r' - s_a}}. \quad (13)$$

Zásadním problémem úlohy je, že neznáme polohu nábojů. Můžeme ji jen odhadnout jako přibližný střed nejmenších ekvipotenciál. Fyzik se ovšem s takovým odhadem nespokojí. Nejprve přemýšlí nad chytřejší metodou, ke které by středy nábojů nepotřeboval. Napadne ho změřit si rozměr další ekvipotenciály a sestavit tři rovnice pro tři neznámé s_a, s_b a q . Vždy se však dostane k rovnicím, které neumí vyřešit jinak než numericky. Numerické řešení je lepší než odhad, zde i v mnoha jiných případech je to asi nejjednodušší možnost.

My se v řešení ovšem pro ilustraci přikloníme k postupu, jehož schéma se donekonečna opakuje zejména v kvantové mechanice či v teorii pevných látek a jemuž se říká poruchový počet. Jeho výhodou od čistě numerického výpočtu je alespoň částečná další použitelnost.

Označme $s_a^{(0)}$, $s_b^{(0)}$ odhadnuté polohy částic a $q^{(0)}$ poměr nábojů z nich vypočtený podle vztahu (13). Dále hledíme první opravu k polohám nábojů $\Delta_{a,b}^{(0)}$. Přesnější polohy nábojů označme

$$s_{a,b}^{(1)} = s_{a,b}^{(0)} + \Delta_{a,b}^{(0)}. \quad (14)$$

Předpokládejme, že $\Delta_{a,b}^{(0)}$ jsou velmi malé oproti $s_{a,b}^{(0)}$. Pak můžeme přibližně psát

$$\frac{1}{s \pm \Delta} = \frac{1}{s} \mp \frac{\Delta}{s^2}. \quad (15)$$

Napišeme nyní rovnici (12) pro dva body r_1, r_1' první vnější a dva body r_2, r_2' např. páté vnější ekvipotenciály. Zlomky přepíšeme pomocí přibližného vztahu (15), dejte přitom zvláštní pozor na znaménka

$$\begin{aligned} & q^{(0)} \left(\frac{1}{s_a^{(0)} - r_1} - \frac{\Delta_a^{(0)}}{(s_a^{(0)} - r_1)^2} \right) + \frac{1}{s_b^{(0)} - r_1} - \frac{\Delta_b^{(0)}}{(s_b^{(0)} - r_1)^2} = \\ & = q^{(0)} \left(\frac{1}{r_1' - s_a^{(0)}} + \frac{\Delta_a^{(0)}}{(r_1' - s_a^{(0)})^2} \right) + \frac{1}{r_1' - s_b^{(0)}} + \frac{\Delta_b^{(0)}}{(r_1' - s_b^{(0)})^2}, \\ & q^{(0)} \left(\frac{1}{s_a^{(0)} - r_2} - \frac{\Delta_a^{(0)}}{(s_a^{(0)} - r_2)^2} \right) + \frac{1}{s_b^{(0)} - r_2} - \frac{\Delta_b^{(0)}}{(s_b^{(0)} - r_2)^2} = \\ & = q^{(0)} \left(\frac{1}{r_2' - s_a^{(0)}} + \frac{\Delta_a^{(0)}}{(r_2' - s_a^{(0)})^2} \right) + \frac{1}{r_2' - s_b^{(0)}} + \frac{\Delta_b^{(0)}}{(r_2' - s_b^{(0)})^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

To jsou dvě lineární rovnice pro dvě neznámé $\Delta_a^{(0)}$ a $\Delta_b^{(0)}$, které každý umí vyřešit. Podle vztahu (14) spočteme přesnější polohy nábojů, podle (13) pak přesnější poměr nábojů $q^{(1)}$ a tak dále, až se další výsledky nebudou příliš lišit, pak máme důvod se domnívat, že se blížíme přesnému řešení. Poznamenejme ještě, že o konvergenci této metody by šlo napsat mnoho stránek. Zvolíme-li však počáteční polohy nepřilíš daleko od skutečných, konverguje uspokojivě.

Následují námi naměřené hodnoty v milimetrech:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,0, & r_1' &= 117,6; \\ r_2 &= 23,9, & r_2' &= 100,7; \\ s_a^{(0)} &= 45,0, & s_b^{(0)} &= 92,5. \end{aligned}$$

Podle (13) dostaneme $q^{(0)} = 3,44$ pro r_1, r_1' a $q^{(0)} = 3,65$ pro r_2, r_2' , v dalším použijeme průměr $q^{(0)} = 3,54$. Vyřešením rovnic (16) dostaneme pro opravy na polohu nábojů

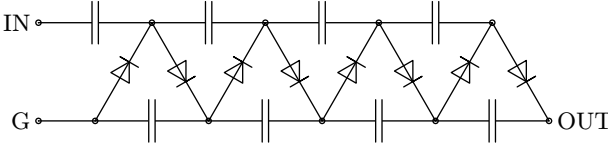
$$\begin{aligned} \Delta_a^{(0)} &= 0,89, & \Delta_a^{(1)} &= -0,19, & \Delta_a^{(2)} &= +0,0055, \\ \Delta_b^{(0)} &= -0,74, & \Delta_b^{(1)} &= +0,18, & \Delta_b^{(2)} &= -0,0051, \\ q^{(1)} &= 3,47, & q^{(2)} &= 3,47, & q^{(3)} &= 3,47. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že používaný metr měří s přesností asi 0,5 mm, obrázek je hrbatý atd., nechali jsme proběhnout výpočet pro několik nepatrně jiných hodnot r . Z výsledků je možno usoudit, že chyba námi získaného poměru nábojů je asi 4 %. Tedy výsledek

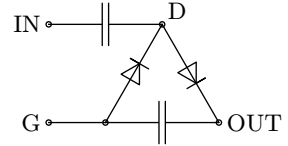
$$q = 3,47 \pm 0,13.$$

Graf v zadání byl generován pro hodnotu $q = 3,5$, tedy shoda je výborná. K nejpřesnějšímu výsledku se z řešitelů dostal Matouš Ringel $q = 3,49 \pm 0,15$, patří mu za to premiový bod. Podotkneme, že chybu by bylo možno eliminovat změřením bodů na více ekvipotenciálách.

Úloha IV . P ... násobič napětí (5 bodů; průměr 3,47; řešilo 17 studentů)



Obr. 15. Násobič napětí



Obr. 16. Miniverze

Na vstup (IN) obvodu na obr. 15 přivedeme vůči zemi (G) harmonické střídavé napětí o amplitudě U a frekvenci f . Jaké napětí naměříme na výstupu (OUT)? Diody považujte za ideální, velikosti kapacit si zvolte, nebo řešte úlohu obecně. Nevíte-li si rady, zkuste nejprve jednodušší případ – zapojení pouze se dvěma diodami a kondenzátory (viz obr. 16).

Tato úloha nebyla problémová obtížností, ale nutností uvědomit si, jak vlastně obvod funguje. Navíc předpoklady byly velmi jednoduché. Uvažujeme totiž nezatížený násobič, ve kterém nedochází k průběžnému odčerpávání náboje z výstupu (OUT), a tedy stačí najít jakýsi rovnovážný stav. V technické praxi se navíc do obvodu řadí rezistor, který slouží k jisté stabilizaci a snižuje energetické ztráty na kondenzátorech způsobené oscilacemi, které nejsou nutné k násobení napětí. V naší idealizaci žádná rezistance zařazena není, a tudíž budou kondenzátory reagovat na změny napětí na vstupu (IN) okamžitě.

Zabýváme se nejprve jednoduchým násobičem. V bodě G můžeme předpokládat $\varphi = 0$. Potenciál v bodě mezi diodami (označme D) je pak $U_{in} - U_1$, kde U_1 je napětí na horním kondenzátoru orientované tak, že kladná hodnota odpovídá kladné desce vlevo. Podle orientace diod zjevně platí nerovnost

$$0 \leq U_D \leq U_{out}. \quad (17)$$

V okamžiku, kdyby U_D mělo opustit tento interval, začne příslušnou diodou procházet proud. Předpokládejme, že na počátku není na výstupu žádné napětí, tj. $U_{out} = 0$ a na vstupu je libovolné napětí U_{in} . Podle (17) je $U_D = 0$ a $U_1 = U_{in}$.

Sledujme nyní, co se děje, měníme-li U_{in} . Začněme jednodušším směrem, což je snižování U_{in} . Pokud by se nezměnilo U_1 , došlo by k porušení levé části nerovnosti. Bude proto procházet proud levou diodou a to tak, že bude udržovat $U_1 = U_{in}$.

Pokud naopak při růstu U_{in} narazí U_D na hranici danou nerovností (17), začne proud procházet pravou diodou, což má za následek nabíjení spodního kondenzátoru a tedy i růst U_{out} . Současně poroste i U_1 tak, že bude platit $U_{in} - U_1 = U_{out}$.

Shrneme-li dosavadní poznatky, tak při periodických změnách U_{in} nejprve vždy U_1 klesne na hodnotu $U_1 = U_{in, \min}$ a poté je U_{out} zvětšeno na hodnotu $U_{out} = U_{in, \max} - U_1'$. Čárka u U_1' je z toho důvodu, že při zvětšování U_{out} roste U_1 , a tedy $U_1' > U_1$. Pokud se ale děj neustále opakuje, jsou změny U_{out} stále menší a tím i nárůsty U_1 , tedy po hodně opakování U_{out} dosáhne hodnoty

$$U_{out, \max} = U_{in, \max} - U_1 = U_{in, \max} - U_{in, \min}.$$

Dolní kondenzátor se tedy nabije na napětí, které odpovídá rozdílu maximální a minimální hodnoty vstupního napětí. Nezáleží přitom na počáteční hodnotě U_{in} , pouze na jeho změnách. V tom je skrytý princip násobiče.

Nyní je již snadné dokončit řešení úlohy. Uvažovaný mininásobič s harmonickým napětím o amplitudě U_0 na vstupu se nabije na napětí $U_{in,max} - U_{in,min} = U_0 - (-U_0) = 2U_0$. Mezi jeho body OUT a D napětí osciluje mezi 0 a $2U_0$. Připojíme-li nyní další mini-násobič do řady, můžeme napětí mezi G a OUT považovat za jeho vstup, atd.

Zde je menší problém, na který je vhodné upozornit. Výstup násobiče nelze považovat za ideální zdroj, neboť při odběru proudu na něm dojde k poklesu napětí. V našem případě *nezatíženého* násobiče to ale nevádí, protože s časem se jednotlivé násobiče saturují a procházející proud se neustále zmenšuje, až nakonec celý obvod bude nasycený a proudy nebudou procházet žádné.

Každý další mini-násobič přidá k celkovému U_{out} hodnotu $2U_0$, tedy hledaný vztah je

$$U_{out} = nU_0,$$

kde n je počet kondenzátorů. Tím je úloha vyřešena. Na vás už nechávám, abyste se zamysleli nad množstvím nezodpovězených otázek, které se při řešení objevily – jak se bude chovat zatížený násobič, jaký je vhodný poměr kapacit kondenzátorů, jak rychle se násobič saturuje, jak moc se projevuje to, že ve skutečnosti diody ani kondenzátory nejsou ideální atd.

Úloha V.1 ... *prší, prší* (4 body; průměr 1,85; řešilo 13 studentů)

V deštovém mraku je množství malých kapiček vody, jejichž hustotu (tj. celkovou hmotnost kapiček v nějakém objemu lomeno tímto objemem) označme ρ_1 , hustotu vody ρ_0 . Spojením několika kapiček vznikne větší kapka, která začne padat a postupně na sebe nabaluje další a další kapičky. Spočítejte, jak se bude měnit poloměr padající kapky a s jakým zrychlením se bude pohybovat.

Pro jednoduchost neuvažujte odpor vzduchu působící na kapku a malé kapičky považujte za nehybné.

Spočítejme nejdříve, jak vypadá nabalování kapičky. Pohybuje-li se kapička o poloměru r rychlostí v , tak za interval⁷ času dt projde objemem $dV = \pi r^2 v dt$ a zvýší tedy svou hmotnost o $dm = \pi r^2 v \rho_1 dt$.

Tento přírůstek hmotnosti má za následek zvětšení poloměru kapky o dr , pro které platí $dm = 4\pi r^2 \rho_0 dr$, tedy po dosazení za dm

$$dr = \frac{\rho_1}{4\rho_0} \cdot v dt = \frac{\rho_1}{4\rho_0} \cdot ds \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho_1}{4\rho_0} \cdot s.$$

Implikace platí proto, že na počátku, kdy je uražena dráha s nulová, je podle zadání i poloměr kapky nulový (kapka vznikne spojením několika mikroskopických kapiček).

Velikost kapky je tedy přímo úměrná dráze, kterou ve vzduchu urazila. Přístupme k odvození jejího pohybu. Předpokládejme, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb⁸ se zrychlením a

⁷⁾ velmi krátký, viz 2. díl letošního seriálu

⁸⁾ Pro rejpyaly znalé diferenciálního počtu – toto je zcela legitimní způsob řešení diferenciální pohybové rovnice, říká se tomu *ansatz*.

a vyjádříme časovou závislost rychlosti, dráhy a poloměru:

$$\begin{aligned}v &= at, \\s &= \frac{1}{2}at^2, \\r &= \frac{\varrho_1 s}{4\varrho_0} = \frac{\varrho_1 at^2}{8\varrho_0}.\end{aligned}$$

Napišme nyní II. Newtonův zákon ve tvaru se změnou hybnosti (tvar $F = ma$ nelze použít kvůli proměnlivé hmotnosti)

$$mg = F = \frac{dp}{dt} = \frac{dmv}{dt} = ma + v \cdot \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{v}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = g - a.$$

Dosaďme za m a dm

$$g - a = \frac{v}{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_0} \cdot \pi r^2 v \varrho_1 = \frac{3\varrho_1 v^2}{4\varrho_0 r}$$

a nyní ještě za v a r

$$g - a = \frac{3\varrho_1 a^2 t^2}{4\varrho_0} \cdot \frac{8\varrho_0}{\varrho_1 at^2} = 6a \Rightarrow a = \frac{1}{7}g.$$

Vidíme, že předpoklad o rovnoměrně zrychleném pohybu byl správný. Na první pohled zarazující fakt, že zrychlení nezávisí na ϱ_1 , je kupodivu v pořádku, rozmyslete si proč!

Úloha V.2 ... Apollo (4 body; průměr 2,92; řešilo 13 studentů)

Odhadněte, za jak dlouho se Apollo dostane na orbitu Měsíce, neplýtvá-li zbytečně palivem. Nezapomeňte uvést, jaké zjednodušující předpoklady jste při výpočtu provedli.

Když zanedbáme přitažlivou sílu Měsíce, tak se raketa bude pohybovat po orbitě. Teď ještě musíme uvážit, jakou orbitu vybereme, aby raketa přiletěla na Měsíc s co nejmenší rychlostí vůči němu. To znamená, že směr rychlosti bude ve vzdálenosti Měsíce R_M kolmý ke svému průvodiči, tedy orbita tam bude mít apogeum. Perigeum orbity bude určitě u Země. Z poloosy orbity už jsme schopni lehce určit čas podle třetího Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{R_M^3}{T_M^2},$$

kde a je poloosa orbity rakety, T je doba obletu rakety (dvojnásobek doby doletu), R_M je vzdálenost Země od Měsíce a T_M jeho oběžná doba. Když uvažujeme $a = R_M/2$ (rozměry Země a Měsíce v našem přiblížení můžeme zanedbat), dostaneme pro dobu oběhu

$$T = T_M \left(\frac{a}{R_M} \right)^{3/2} = T_M \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2}.$$

Po dosazení $T_M = 27$ dní dostaneme pro dobu oběhu

$$\frac{T}{2} = 4,8 \text{ dne.}$$

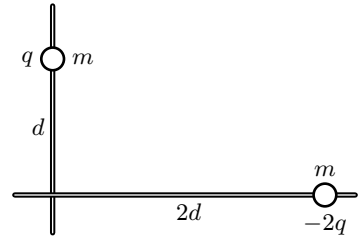
Kdybychom chtěli spočítat přesnější čas, tak bychom mohli uvažovat bod, ve kterém se vyrovnají síly, tzv. Lagrangeův bod, a uvažovali zemskou orbitu do tohoto bodu a měsíční orbitu z tohoto bodu. Toto řešení je trochu komplikovanější, ale zlepší náš výsledek ve druhém řádu. Největší obtíž je spočítání polohy toho bodu, což se dá jedinečně numericky.

Úloha V.3 ... elektrický minigolf (3 body; průměr 2,20; řešilo 20 studentů)

Mějme dvě na sebe kolmé nevodivé tyče a na nich nabitě kuličky (viz obr. 17), které se po nich mohou po tyčích volně pohybovat. Kuličky mají stejnou hmotnost m a náboje q a $-2q$. Na počátku jsou v klidu a jejich vzdálenost od průsečíku tyčí je d a $2d$. Určete, kde se bude nacházet druhá kulička v okamžiku, když první dosáhne průsečíku tyčí.

Uvedeme zde dva způsoby řešení. V prvním odvodíme, že v soustavě spojené s jedním z nábojů výsledná síla působí ve směru jejich spojnice. V druhém odvodíme, že poměr vzdálenosti nábojů od středu se nemění. Z obou těchto faktů ihned plyne, že náboje se srazí uprostřed.

- a) V klidové soustavě na oba náboje působí elektrostatická síla F_e ve směru ke druhému náboji (o velikosti dané Coulombovým zákonem) a reakce tyčky ve směru kolmém na tyčku (o velikosti takové, aby výslednice síly na jeden náboj působila ve směru tyčky). Reakci na náboj q označme F_1 , na druhý F_2 . Důležité si je uvědomit, že celková síla působící na druhý náboj je stejná jako F_1 , je to díky kolmosti tyček a toho, že elektrostatické síly jsou velikostí stejné a směrem opačné. Když se nyní přesuneme do soustavy spojené s druhým nábojem, musíme zavést setrvačnou síly rovnou $-F_1$, tedy v této soustavě bude na první náboj působit pouze F_e ve směru na druhý náboj. Což jsme chtěli ukázat. Pokud se ztrácíte v tom, která síla je která, nakreslete si obrázek.
- b) Z podobnosti trojúhelníků víme, že na začátku pro velikosti sil platí $2F_2 = F_1$, kde F_1 je reakce na první náboj a také velikost výsledné síly působící na druhý náboj a vice versa. Tedy na první náboj na začátku působí poloviční celková síla než na druhý. Jelikož náboje mají stejnou hmotu, je i zrychlení prvního poloviční než druhého. Díky nulové počáteční rychlosti a tomu, že dráha je druhá derivace zrychlení, je i dráha prvního náboje za elementárně malý čas poloviční. Stejně tak by tvrzení o drahách platilo, pokud by počáteční rychlost prvního náboje byla poloviční než u druhého. Tedy za elementárně malý čas se systém dostane do stavu, ve kterém je poměr vzdáleností nábojů od středu stejný jako na začátku. Tedy se poměr nezmění během celého pohybu. Což jsme chtěli ukázat.



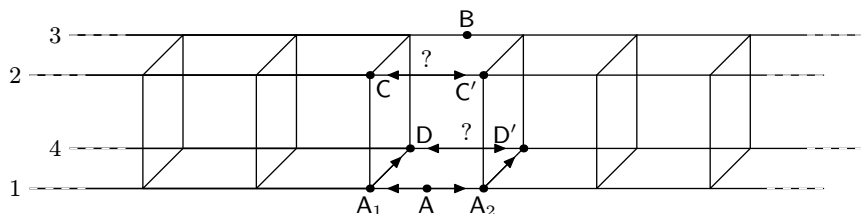
Obr. 17. Náboje na tyčích

Úloha V.4 ... síť (4 body; průměr 3,09; řešilo 11 studentů)

Spočítejte odpor mezi body A, B na nekonečné síti na obrázku 18. Všechny hrany sítě mají stejnou délku a odpor.

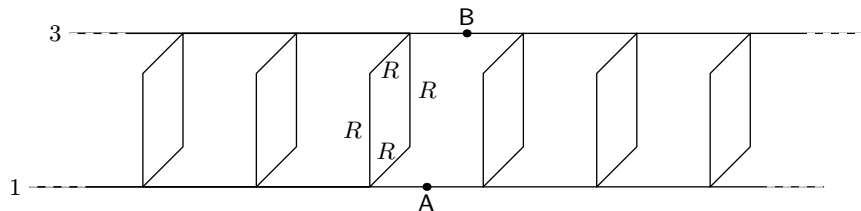
Nechť BÚNO⁹ proud vtéká do uzlu A a vytéká z uzlu B. V uzlu A se rozděluje a pokračuje do uzlů A_1 a A_2 . Odtud teče část do uzlů D a D' . Mezi body D, D' neteče žádný proud. Rovina kolmá na přímkách 1 až 4 a procházející uzly A, B rozděluje síť na dvě symetrické části. Pokud by proud tekł z uzlu D do uzlu D' , musel by téct stejně velký proud také opačným směrem. Ze stejných důvodů nebude téct žádný proud ani mezi uzly C, C' , ani mezi libovolnými sousedními uzly ležícími na drátech 2 a 4.

⁹⁾ bez újmy na obecnosti



Obr. 18

Překreslíme si schéma vynecháním odporů, kterými neteče proud.

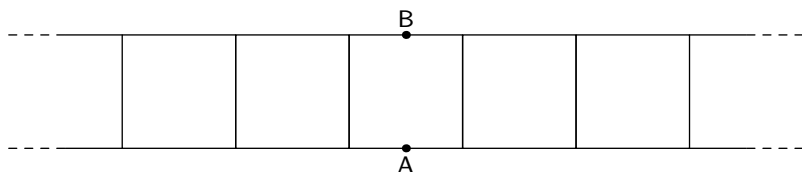


Obr. 19

Podle obrázku 19 vidíme, že příčky mezi dráty 1 a 3 tvoří dva a dva rezistory zapojené vůči sobě paralelně. Pro celkový odpor jedné této příčky platí

$$R_p = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R.$$

Překreslíme si síť na jednodušší schéma.



Obr. 20

Toto je nekonečná síť, která se dá rozdělit na dvě části (vpravo a vlevo od uzlů A, B), zapojené vůči sobě paralelně. Vezměme pravou polovinu této sítě. Její odpor nechť je R_p . Po vložení další jednotky se odpor nezmění (viz obr. 21).

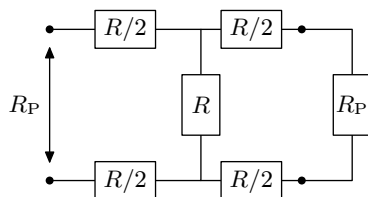
Pro odpor R_p tedy platí

$$R_p = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + r, \text{ kde}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{R}{2} + \frac{R}{2} + R_p}.$$

Po vyjádření

$$R_p = R + \frac{R(R + R_p)}{2R + R_p},$$



Obr. 21

$$R_P = R\sqrt{3}.$$

Složením pravé a levé strany sítě ($R_P = R_L$) dostaneme

$$R_{\text{celk}} = \frac{R_P R_L}{R_P + R_L} = \frac{R_P}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

Úloha V. P ... **pramínek vody** (4 body; průměr 2,30; řešilo 10 studentů)

Jaký je geometrický tvar (průřez) kapaliny vytékající z kohoutku v závislosti na vzdálenosti od hrdla? Pokuste se také odhadnout, v jaké vzdálenosti se proud vody začne trhat.

Předpokládejme, že tvar potrubí a tlak v něm jsou takové, že voda z kohoutku o kruhovém průřezu vytéká laminárně počáteční rychlostí v_0 . Jen v takovém případě bude mít vytékající pramínek kruhový, zužující se, průřez. Předpokládejme, že rychlost v dané výšce je v celém průřezu konstantní. Pak bude platit rovnice kontinuity v nejjednodušším tvaru, tj. průřez krát rychlost v dané výšce bude konstanta.

Dále předpokládejme, že voda je dokonalá tekutina a její proudění je nevířivé, což obojí bude platit dostatečně přesně. Pak můžeme napsat Bernoulliho rovnici, tj. pro vzdálenost h od kohoutku, ρ hustotu vody, v rychlost proudění, p tlak v daném místě a g tíhové zrychlení

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + h\rho g + p = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_0.$$

Posledním předpokladem nutným pro vyřešení bude položení $p = p_0$, neboli že tlak uvnitř pramínku je všude stejný.

Nyní je výpočet průměru proudu ve vzdálenosti h od kohoutku otázkou pouhého dosazení a vyjádření.

$$v = \frac{S_0 v_0}{S} = \sqrt{v_0^2 - 2hg},$$

$$d = d_0 \sqrt{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2hg}}}.$$

Ač na první pohled jsme provedli mnoho přiblížení, ve skutečnosti jsou všechna dobře splněna a tento výsledek souhlasí se skutečností. Naproti tomu druhá část úlohy, tj. odhad vzdálenosti, ve které se pramínek začne trhat, je značně komplikovaný. Vysvětlíme tedy pouze kvalitativně, proč se pramínek vůbec trhat začne.

Užší pramínek má větší povrchové zakřivení, a tudíž je v něm větší kapilární tlak. Tedy má kapalina tendenci z místa o užším průměru vytékat. Při zužování pramínku v důsledku pádu se to samozřejmě neprojeví, kapalina nepoteče nahoru. Nesmíme ovšem zapomenout na všudypřítomné povrchové fluktuační, které budou pro dostatečně úzký pramínek natolik významné, že zúžení v jejich důsledku se díky kapilárnímu tlaku zvětší, až se pramínek zcela roztrhne. Popsat tento jev kvantitativně dá ovšem mnoho práce, pokud byste se o něm chtěli něco dozvědět, hledejte v literatuře pojem Rayleighova-Taylorova nestabilita. Závěrem pochvala pro Matouše Ringela, který se jako jediný nezalekl a vymyslel, byť velmi zjednodušený, model dávající rozumné výsledky.

Úloha VI.1 ... záhadný obvod (3 body; průměr 2,92; řešilo 13 studentů)

Ke kondenzátoru o neznámé kapacitě připojíme do série cívku o indukčnosti L , obvod připojíme ke zdroji napětí o frekvenci ω a naměříme na nekalibrovaném ampérmetru nějaký proud. Poté do série připojíme ještě jednu cívku, stejnou jako je ta první, a proud v obvodu se nezmění. Jaká je kapacita kondenzátoru?

Nezkalibrovaný ampérmetr zapojený v obvodu bude ukazovat efektivní hodnotu proudu, která po zapojení druhé indukce má být stejná

$$\frac{U_{\text{ef}}}{Z_1} = \frac{U_{\text{ef}}}{Z_2},$$

a tedy si musí být rovny i velikosti impedancí před a po zapojení druhé indukčnosti. V prvním případě pro velikost impedance obvodu platí

$$Z_1 = \sqrt{(X_L - X_C)^2} = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

a po zapojení druhé cívky

$$Z_2 = \sqrt{\left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Musí tedy platit

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = \left|2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|,$$

což lze splnit pro

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -\left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

případ

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

nevede k řešení. Pro hledanou kapacitu kondenzátoru tedy platí

$$C = \frac{2}{3\omega^2 L}.$$

Ve výše uvedeném řešení jsme uvažovali ideální prvky obvodu (nulový vnitřní odpor ampérmetru, nulový odpor cívky, zanedbali jejich vzájemnou indukčnost, ...).

Úloha VI.2 ... moucha a netopýr (4 body; průměr 2,82; řešilo 22 studentů)

Netopýr na lovu letí proti mouše rychlostí $3,14 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, moucha letí desetkrát pomaleji. Netopýr vysílá ultrazvukový signál o frekvenci f_0 , který se odráží od mouchy a vrací k lovcovi. Netopýrova sluchadla jsou nejcitlivější na frekvence blízko $61,3 \text{ kHz}$. Určete f_0 . Zvuk jaké frekvence by moucha slyšela, kdyby slyšela?

Klíčem k řešení této úlohy je Dopplerův jev. Každý si jistě někdy všimnul, že když se k nám zdroj zvuku přibližuje, slyšíme zvuk o vyšší frekvenci než když zdroj stojí. Stejně tak přibližuje-li se posluchač ke zdroji. Musíme si ovšem uvědomit, že tyto dvě situace nejsou totožné, nezávisí na vzájemné rychlosti zdroje a posluchače, nýbrž na rychlosti zdroje vůči

prostředí, ve kterém se šíří zvuk, a na rychlosti posluchače vůči tomuto prostředí. Odvodme nyní vztahy pro změnu frekvence v obou těchto případech.

- a) Posluchač vůči vzduchu stojí a zdroj se pohybuje k němu rychlostí v . Rychlost zvuku ve vzduchu označme c . Vzdálenost dvou maxim zvukové vlny ve vzduchu je $\lambda' = \lambda - vT$, kde λ resp. T jsou vlnová délka resp. perioda vysílané vlny. První maximum za čas T urazí dráhu λ , druhé je vysláno o vT dále. Přepsáno do frekvencí a upraveno

$$f' = f \frac{c}{c - v}.$$

- b) Zdroj vůči vzduchu stojí, posluchač se k němu přibližuje rychlostí v . Čas, který uběhne, než posluchač mine dvě následující maxima vlny, je $T' = \frac{\lambda}{v+c}$, přepsáno do frekvencí

$$f' = f \frac{v + c}{c}.$$

Uvědomte si rozdíl mezi těmito dvěma případy. Pokud by například bylo $v = c$, tak v prvním případě posluchač nic neuslyší, neboť zvuk zdroj vůbec nepředběhne. Až v okamžiku, kdy bude zdroj míjet, uslyší rázovou vlnu. Kdežto v druhém případě uslyší jednoduše dvojnásobnou frekvenci. Ač vzájemná rychlost je v obou případech v .

Nás zajímá případ, kdy se pohybuje zdroj v_1 i posluchač v_2 , pak

$$f = f_0 \frac{v_2 + c}{c - v_1},$$

kde f_0 je frekvence, kterou vysílá zdroj, a f , kterou slyší pozorovatel.

Konečně se vrhneme na řešení samotné úlohy. Označme v_n rychlost netopýra, v_m rychlost mouchy, f frekvenci, kterou nejlépe slyší netopýr, f_m frekvenci, kterou slyší moucha, f_n frekvenci, kterou vysílá netopýr. Odraz zvuku od mouchy funguje tak, jakoby moucha byla zdrojem zvuku o frekvenci, kterou slyší. Tedy

$$f = f_m \frac{c + v_n}{c - v_m}, \quad f_m = f \frac{c - v_m}{c + v_n}.$$

Moucha slyší zvuk o frekvenci

$$f_m = f_n \frac{c + v_m}{c - v_n}, \quad f_n = f \frac{c - v_m}{c + v_n} \frac{c - v_n}{c + v_m}.$$

Číselně vychází $f_n = 60,1$ kHz, $f_m = 60,7$ kHz.

Závěrem podotkneme, že někteří řešitelé úlohu pochopili tak, že moucha letí směrem od netopýra. Jejich výsledky pak vypadaly stejně, jako když za v_m dosadíme $-v_m$. Číselně samozřejmě trochu jinak.

Úloha VI. 3 ... tekoucí sklo (4 body; průměr 3,14; řešilo 7 studentů)

Na starých zámcích bývají originální tabulky skla v oknech u spodního okraje širší než u horního díky tečení. Za sto let se tabulka o rozměru $0,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ a tloušťce 5 mm rozšíří o $0,1 \text{ mm}$. Odhadněte z těchto údajů viskozitu skla a určete, kolikrát těžší by musela být Země, aby toto tečení probíhalo turbulentně.

Předně vyvraťme onen celosvětově rozšířený mýtus. I v Encyklopedia Britannica se můžete dočíst o tom, že skleněné tabulky v chrámech z 12. století jsou naspođu širší díky tomu, že sklo je vlastně kapalina a za onen velmi dlouhý čas steklo dolů. E. D. Zanotto v článku *Do cathedral glasses flow?* publikovaném v roce 1998 v American Journal of Physics ukázal, že kdyby tečení skla za pokojové teploty mělo být příčinou rozšíření tabulek, trvalo by mu to dobu srovnatelnou se stářím Země, nikoliv několik stovek let. Skutečnou příčinou rozšíření tabulek je údajně proces jejich výroby.

Řekněme si na rovinu, přecenili jsme vás i sebe, pokud jsme si mysleli, že lze nějak jednoduše a správně odhadnout rozšíření „padající“ kapaliny s volnými povrchy. Vydejme se cestou analogií a rozměrové analýzy. Tečné napětí (síla na plochu) v pohybuujícím se skle jde vyjádřit jako

$$\tau = \eta \frac{dv}{dx},$$

kde v je rychlost toku a x vzdálenost dvou blízkých plošek, které na sebe působí onou silou. Bude-li tok v nějakém smyslu slova ustálený, bude tato vnitřní třecí síla v rovnováze se silou F , která tok způsobuje. F by mohla být úměrná (minimálně řádově) rozdílu mezi tlakem v místě, odkud sklo teče, a tlakem v místě, kam sklo teče $F \approx h\rho g$. Konstanta úměrnosti bude mít rozměr povrchu. Tedy řádově můžeme položit do rovnosti

$$\eta \frac{v}{h} = h\rho g.$$

Rychlost je také přibližně $v = d/T$, kde T je sto let a d rozšíření. Tedy pro viskozitu

$$\eta = \frac{h^2 \rho g T}{d} \approx 10^{15}.$$

Jelikož náš postup je dost pochybný, odhadujeme chybu v řádu na ± 5 . Na internetu se dá najít, že viskozita běžného skla za pokojové teploty je $10^{18} \div 10^{21}$ Pa.s. Takže vlastně ani nemůžeme říct, zda tečení skla za stovky let je nebo není možné.

Jednomu z organizátorů se po značném úsilí nakonec podařilo za jistých podmínek kvantitativně vyřešit tečení skla lépe než jen rozměrovou analýzou. Bohužel kvůli matematické náročnosti není zmíněné řešení publikovatelné v této ročence.

A jak těžká by měla být Země, aby proudění bylo turbulentní? Dosadíme do vztahu pro Reynoldsovo číslo $Re = \frac{\rho v d}{\eta}$ pro proudění Newtonovské kapaliny. Aby byla hodnota tohoto čísla nadkritická, musela by kapalina proudit rychleji, než letí světlo ve vakuu, což je nesmysl. Důvodem může ale být to, že při tak velkých viskozitách vztah pro Reynoldsovo číslo vůbec nemusí platit nebo jeho kritické hodnoty budou úplně jiné, než je obvyklé pro běžné kapaliny. Ale i tak pokud by tíha měla být taková, aby sklo pod jejím vlivem za pokojové teploty skutečně teklo, hmotnost Země by musela být tak velká, že by se zhroutil do černé díry atd.

Úloha VI.4 ... pevnost nosníku (4 body; průměr 3,71; řešilo 7 studentů)

Uvažujte pružný nosník délky l . Energie potřebná k prohnutí jednotky délky tohoto nosníku na poloměr křivosti R je $E = \alpha/R^2$, kde α je známá konstanta. Jakou maximální silou můžeme tlačit na tento nosník, aby se neprohнул do strany?

Nejprve spočítejme do jakého tvaru se nosník prohne, budeme-li na jeho konce tlačit dostatečnou silou. Zavedme si souřadný systém tak, že nosník splývá s osou x a jeho střed leží v počátku. Uvažujme element délky nosníku vychýlený o y od osy x . Síla, kterou na nosník tlačíme, ohýbá uvažovaný element momentem síly úměrným jeho výchylce y (nakreslete

si obrázek). Tomuto momentu bude úměrná křivost nosníku v daném bodě, kterou můžeme v případě, že vychýlení je malé aproximovat výrazem

$$1/R = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \simeq y''$$

Tvar nosníku tedy bude řešením diferenciální rovnice

$$y'' = -cy,$$

kde c je nějaká kladná konstanta. V této rovnici poznáváme diferenciální rovnici harmonických kmitů, jejím obecným řešením je funkce $A \sin \sqrt{c}x + B \cos \sqrt{c}x$. Vychýlení nosníku v bodech $x = -l/2, x = l/2$ musí být nulové, takže nosník zaujme tvar

$$y = p \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (18)$$

kde p je parametr udávající vychýlení středu nosníku. (Požadované okrajové podmínice odpovídají i siny a kosiny s menší periodou, ale jim odpovídající tvar není stabilní rovnovážnou polohou)

Dále uvažujme takto: Přímá poloha nosníku je vždy rovnovážná, její stabilita však závisí na působící síle. Stabilitu nosníku vyšetříme tak, že budeme předpokládat, že v důsledku nějakého náhodného vlivu (například otřesu a podobně) bude nosník nepatrně vychýlen z přímé polohy. Při tomto vychýlení se přiblíží konce nosníku o Δl , takže působící síla vykoná práci $F\Delta l$. Dále se nosník nějakým způsobem zakříví, takže podle vzorce ze zadání jeho potenciální energie. Pokud bude vykonaná práce větší než přírůstek potenciální energie, bude vychýlení „energeticky výhodné“, a proto bude pokračovat až do ustálení nové stabilní rovnovážné polohy.

Tvar nosníku může být při náhodném malém vychýlení libovolný. Uvažujme všechna možná vychýlení, při kterých se nosník zkrátí o nějaké Δl . Ze všech těchto vychýlení bude nárůst potenciální energie nosníku nejmenší pro vychýlení, při kterém nosník zaujme tvar stejný, jako by byl v rovnovážné poloze při dané vzdálenosti jeho konců $l - \Delta l$. Takový tvar nosník zaujme, pokud ho upneme do „dokonalého svěráku“ a přiblížíme čelisti o δl . Čelisti svěráku však budou v tomto případě na nosník působit jinou silou než F , takže nosník v této poloze rozhodně stabilní nebude.

Podle předcházejících výpočtů je tedy ze všech možných náhodných prohnutí energeticky nejméně náročné prohnutí do tvaru oblouku kosinu a právě při něm proto nejsnáze dojde k vychýlení do strany. Stačí tedy spočítat energetickou bilanci právě v tomto případě.

Zkrácení nosníku δl spočítáme pomocí vzorce pro výpočet délky křivky. Velikost výchylky popíšeme parametrem p (viz. (18)) a můžeme psát

$$\int_{-l/2+\Delta l/2}^{l/2-\Delta l/2} \sqrt{1 + (y')^2} = l,$$

$$\int_{-l/2+\Delta l/2}^{l/2-\Delta l/2} 1 + \frac{p^2 \pi^2}{2l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} \simeq l,$$

$$\Delta l \simeq \frac{p^2 \pi^2}{4l},$$

kde jsme využili přibližného vztahu $\sqrt{1+a} \simeq 1+a/2$, který platí pro malá a . Změnu potenciální energie pak spočítáme jako

$$\Delta E_p = \int_{-l/2}^{l/2} \alpha (y'')^2 dx = \frac{\alpha p^2 \pi^4}{2l^3}$$

Porovnáním těchto výsledků dostáváme pro kritickou sílu, při které se stane nosník nestabilním

$$F = \frac{4\pi^2 \alpha}{l^2}.$$

Úloha VI. P ... elektromagnetický paradox (4 body; průměr 2,71; řešilo 7 studentů)

Na dielektrický disk volně se otáčející kolem své osy přilepíme závit supravodivého drátu v němž teče proud I_0 . Dále kolem tohoto závitu symetricky přilepíme elektricky nabitě kuličky o náboji q . Celý disk poté začneme pomalu zahřívat. V jistém okamžiku přestane být drát supravodivý, takže v něm přestane téct proud a změní se magnetický tok přes závit. V důsledku toho vznikne podle Faradayova zákona okolo tohoto závitu elektrické pole, které bude působit na přilepené náboje, takže se celý disk začne otáčet. Na druhou stranu musí zůstat podle zákona zachování hybnosti v klidu. Tak kde je v předcházejících úvahách chyba?

Na záchranu zákona zachování momentu hybnosti můžeme zkusit použít nenulovou hmotu elektronů. Tím získáme počáteční moment hybnosti. Tento moment hybnosti ale nebude záviset na náboji připevněném na disku (na rozdíl od elektrické síly). Takže tímto paradox nevysvětlíme.

Další pokus na záchranu momentu hybnosti můžeme provést přes vlastní indukci. Když si uvědomíme, že náhlé zmizení magnetického pole by vyvolalo elektrické pole působící nejen na krajní náboje, ale také na náš obvod a naindukovalo by proud opačného směru. To nás ale taky nezachrání, protože tento proud závisí na odporu, na kterém elektrická síla uvádějící kotouč do pohybu opět nezávisí. Ve skutečnosti vlastní indukce způsobí exponenciální pokles magnetické indukce, místo okamžitého.

Tím vidíme, že problém nezachovávacího se momentu hybnosti zůstává. Řešení je mnohem fundamentálnější, chceme-li, aby v elektromagnetickém poli platily zákony zachování, nezbyvá nám než zavést (hustotu) moment hybnosti elektromagnetického pole, který je úměrný $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Kroužek se pak vlastně odrazí od elektromagnetického pole kolem něj.



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. E ... reakční doba (8 bodů; průměr 3,54; řešilo 50 studentů)

Změřte rychlost vedení vzruchu nervu.

Návod: Změřte svou reakční dobu na optický nebo zvukový podnět (v tomto případě můžeme předpokládat, že vzruch dorazí do mozku okamžitě). Poté změřte rychlost své reakce na dotek konce ruky nebo nohy. Porovnáním výsledků pak stanovte rychlost vedení vzruchu. Nezapomeňte, že pro správné statistické zpracování potřebujete naměřit minimálně deset hodnot.

Úvod

Podle zadání úlohy provedeme měření dvě. V prvním budeme měřit reakční dobu t_r na optický či sluchový podnět. Předpokládáme přitom, že délka nervů přenášejících tento signál do mozku je malá. V druhém měření budeme zjišťovat dobu reakce t_n na dotek na noze či ruce. Rychlost vedení vzruchu do mozku pak spočteme jako $v = \frac{l}{t_n - t_r}$, kde l je odhad délky nervu. Není to doslova rychlost průchodu vzruchu podél samotného nervového vlákna, která je podle literatury asi $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. V námi měřené hodnotě je započítán i průchod vzruchu přes synapse a ostatní složitě popsatelné jevy.

Postup měření reakční doby t_r

- Člověk A drží pravítko mezi prsty člověka B, znenadání ho pustí a B, jakmile spatří padající pravítko, ho chytí. Z délky, ve které B pravítko chytil a doby volného pádu, se určí reakční doba t_r .
- Na monitoru počítače necháme něco náhodně zobrazit, např. změnit barvu pozadí (nebo spustíme zvuk). V okamžiku, kdy signál zaregistrujeme stiskneme (nebo pustíme) tlačítko klávesnice (myši). Počítač necháme reakční dobu zaznamenat. Podle Jardy Trnky jsme k tomuto použili program na webové stránce <http://www.happyhub.com/network/reflex/>.
- Zakryjeme číslice sekund, desetin a setin na stopkách a v okamžiku, kdy zaregistrujeme změnu na řádu desítek setin, stopky zastavíme.

Postup měření rychlosti šíření vzruchu v nervu

- Modifikace předchozího postupu s pravítkem. Na pravítko tentokrát umístíme kousek papírku nebo jemný hrot. Zavřeme oči a registrujeme dotkový podnět. Reakční doba t_n však vychází naprosto srovnatelná s reakční dobou t_r měřenou, pokud se na pravítko díváme. V t_n je zahrnut čas od začátku pádu pravítka do okamžiku, než si mozek uvědomí, že se pravítko ruky dotklo. V t_r je na rozdíl od toho zahrnut čas od začátku pádu pravítka do okamžiku, ve kterém si mozek uvědomí, že oko uvidělo padající pravítko.

Dá se tedy usuzovat, že je nesprávný předpoklad o tom, že optický (popř. zvukový) podnět dorazí do mozku okamžitě. Doba, za kterou podnět do mozku dorazí, by se velmi přibližně dala odhadnout z faktu, že vzorkovací frekvence oka je asi 20 Hz, tj. vzorkovací doba asi 0,05 s, což je čas, který při našich měřeních hraje roli. Chceme-li přesto změřit rychlost vedení vzruchu, musíme vymyslet chytřejší metodu.

- Ve stejný čas spustíme dvoje stopky. V prvním měření asistent svoje stopky vypne ve stejném okamžiku, kdy se dotkne čela experimentátora. Ten stiskne tlačítko svých stopek v okamžiku, kdy dotek ucítí. Rozdíl časů na obou stopkách je pak doba reakce t_r . Doba

reakce t_n změří stejným způsobem, jen se asistent dotýká konce nohy.

V řešeních jste často tento postup (maminka mě praští vařečkou a zároveň stiskne stopky) používali pro měření doby, za kterou do mozku dojde signál z konce nohy. Od toho času jste odečítali jinak změřenou reakční dobu. To dávalo velmi nepřesné výsledky, neboť „maminka“ není schopná dostatečně přesně zároveň stisknout stopky i udeřit experimentátora. Námi uvedená metoda však systematickou chybu „maminky“ eliminuje.

Měření

Náš postup při měření rychlosti šíření vzruchu z konce nohy do mozku byl následující: Využili jsme program na výše uvedené webové stránce. Osoba A reagovala na změnu barvy obrazovky tím, že se dotkla nohy resp. čela osoby B, která měla zavřené oči a na dotek reagovala stisknutím tlačítka myši. V následující tabulce jsou uvedeny naměřené hodnoty. Čas t_n je měřen při doteku konce nohy, čas t_r při doteku čela.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
t_r [s]	0,49	0,49	0,55	0,49	0,55	0,44	0,38	0,39	0,5	0,44	0,49
t_n [s]	0,6	0,6	0,54	0,49	0,61	0,61	0,55	0,55	0,61	0,57	0,61

	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	
t_r [s]	0,44	0,5	0,49	0,51	0,49	0,5	0,47	0,49	0,44	0,44	
t_n [s]	0,6	0,55	0,61	0,55	0,6	0,49	0,5	0,61	0,55	0,55	

Tabulka – měření reakčních dob.

$$\bar{t}_r = (0,475 \pm 0,043)\text{s}$$

$$\bar{t}_n = (0,569 \pm 0,040)\text{s}$$

Směrodatnou odchylku aritmetického průměru časů spočteme podle vztahu

$$s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_i^2}{n(n-1)}}.$$

Rozdíl časů je $\Delta t = t_n - t_r = 0,094\text{ s}$, směrodatná odchylka tohoto rozdílu je

$$s_m(\Delta t) = \sqrt{s_m^2(t_n) + s_m^2(t_r)} = 0,059\text{ s}.$$

Relativní chyba je $\delta(\Delta t) = 0,63$. Délku nervů z konce nohy odhadneme výškou osoby $l = 180 \pm 30\text{ cm}$, chyba je způsobena tím, že nevíme, kudy přesně nervy vedou, relativní chyba $\delta l = 0,16$.

Průměrná rychlost vedení vzruchu vychází $\bar{v} = l/\Delta t = 19\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, její směrodatná odchylka $s_m(v) = v\sqrt{(\delta l)^2 + (\delta(\Delta t))^2} = 12\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Směrodatná odchylka je srovnatelná se samotnou hodnotou, rychlost $v = 19\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ je tedy spíše jen odhad.

Závěr

Měření je zatíženo velikou chybou, která je způsobena tím, že při výpočtu rychlosti odečítáme dvě velmi blízké hodnoty, jejich směrodatná chyba se ve čtvercích sčítá, což způsobí velikou relativní chybu rozdílu, to si mnoho z vás při výpočtu chyb neuvědomilo.

Dále ocitujeme několik vět z řešení Jardy Trnky, neboť on podle nás situaci vystihl: „Měření nebylo jednoduché, protože se při něm nespolehalo na nějaké přístroje, ale zejména na vlastní

mozek. Tudíž ke změření reakce byla potřeba koncentrace a zde by mohl být první zdroj chyb. Na základě svých výsledků mohou tvrdit, že rychlost šíření vzruchu v nervu je řádově v desítkách metrů za vteřinu.“

Úloha II. E ... difúze (8 bodů; průměr 5,07; řešilo 14 studentů)

Jak je známo, kapka roztoku v čisté vodě začne difundovat a zvolna se rozplývat. Svůj experimentální um můžete prokázat tím, že naměříte závislost koncentrace roztoku v určitém bodě nádoby na čas. Můžete též proměřit, jak se změní charakter této závislosti, změníte-li tvar použité nádoby tak, že se roztok může šířit jen v jednom nebo dvou směrech (tj. nádoba bude buďto úzká a podlouhlá, nebo v ní bude jen tenká vrstva vody).

Úvod a teorie

Difúze je samovolné pronikání molekul z oblasti vyšší koncentrace do oblasti nižší koncentrace vlivem tepelného pohybu částic a jejich srážek. Pro měření je vhodná difúze kapaliny do jiné kapaliny, neboť plyny difundují příliš rychle, pevné látky pomalu a zrníčko rozpouštějící se v kapalině by se mohlo pomaleji rozpouštět než difundovat pryč, což by měření znehodnotilo.

Má-li difundující látka nevelkou koncentraci, platí pro tok částic jednotkovou plochou za jednotku času 1. Fickův zákon, který říká, že tok \mathbf{j} je úměrný gradientu koncentrace

$$\mathbf{j} = -k\nabla c,$$

kde ∇c je vektor o složkách $(\frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial y}, \frac{\partial c}{\partial z})$. Z tohoto vztahu a zachování počtu částic se dá odvodit 2. Fickův zákon, který říká, že časová změna koncentrace v daném místě je úměrná změně koncentračního gradientu

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) = D\nabla^2 c = D\Delta c, \quad (19)$$

kde kladné konstantě D se říká difúzní součinitel.

Není zcela přímočaré odvodit, že řešení této rovnice, pro počáteční podmínku, kdy jsou všechny difundující částice uprostřed souřadné soustavy, je

$$c = N \left(\frac{1}{4\pi Dt} \right)^{\frac{m}{2}} e^{-r^2/4Dt}. \quad (20)$$

Konstanta N úzce souvisí s počtem difundujících částic, m je počet směrů, ve kterých se částice mohou šířit, tedy nejčastěji $m = 1, 2, 3$, r^2 je kvadrát vzdálenosti od středu, tedy např. pro $m = 3$ je $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Že vztah (20) je skutečně řešením (19) pro nekonečně velkou nádobu, můžeme snadno ověřit dosazením.

Zkoumejme, jak se chová (20) pro zafixovanou polohu. Nakreslíme-li si graf funkce $y(t) = t^{-m/2} e^{-k/t}$, vidíme, že nejprve z nuly roste až do času $t = 2k/m$, pak klesá k nule. K nule klesá tím pomaleji, čím menší je m .

My ale nebudeme měřit pro nádobu nekonečného rozměru. Tudíž ve velkém čase se koncentrace nebude blížit nule, ale určité rovnovážné hodnotě c_0 . Budeme-li měřit blízko kraje nádoby, bude se koncentrace k c_0 blížit monotónně.

Následující odstavce čtenář, který se nezajímá dále o matematickou stránku problému, může přeskóčit. Explicitně bychom rovnicí (19) pro konečnou oblast řešili s okrajovými podmínkami,

kdy je normálová složka gradientu koncentrace na krajích nulová, neboť difundující roztok nemůže z nádoby vytékat. Funkci bychom periodicky rozšířili na reálnou osu, pro obdélník na rovinu, pro kvádr na celý prostor, čímž automaticky splníme okrajovou podmínku (rozmyslete). Řešení by pak bylo konvolucí funkce (20) (Greenovy funkce úlohy) a periodicky rozšířené počáteční podmínky (která není ničím jiným než Diracovou delta distribucí). Řešení vede v jednom rozměru na řadu typu (až na konstanty, které pilný čtenář sám dopočte)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx e^{-n^2 t}.$$

Tuto řadu ale stejně neumíme sečíst a pro více rozměrů je jen složitější. Nicméně vidíme, že pro nekonečný čas se řešení blíží konstantě tak, jak očekáváme. Jinak se funkce chová podobně jako pro řešení v nekonečné oblasti.

Postup měření

Musíme vyřešit, jak měřit koncentraci látky, aniž bychom dělali cokoliv, co způsobí proudění, které by zničilo difuzi. Ve vašich řešeních se objevily tři způsoby.

- a) Měření koncentrace opticky. Méně přesná byla metoda, kdy jste porovnávali barvu roztoku v daném místě s předem připravenou škálou barev známé koncentrace. Nesmí se přitom zapomenout na to, aby tloušťka roztoku, přes kterou se dívám, byla stejná jako tloušťka pomocných kyvet, se kterými porovnávám.

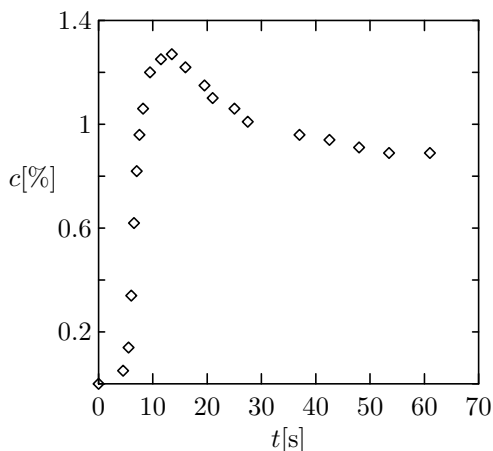
Poměrně hodně přesnou metodu požil Anton Repko, který měřil pohlcování červeného světla v síranu měďnatém. Na kyvetu z difundujícím roztokem svítil laserovou diodou a měřil proud procházející fototranzistorem na druhé straně kyvety, který je úměrný prošlému světelnému toku Φ , jež na koncentraci závisí exponenciálně $\Phi = \Phi_0 e^{-kc}$.

Tato metoda se ovšem nedá použít pro trojrozměrnou difuzi, neboť při ní nenalezneme směr, ve kterém je koncentrace podél paprsku konstantní.

- b) Měření pomocí pH roztoku. Několik z vás napadlo měřit difuzi nějaké kyseliny či zásady ve vodě. Koncentrace se pak dá zjistit pomocí pH v daném bodě, které měříme lakmusovými papírkami nebo pH-metrem. Pro dostatečně silnou kyselinu je její koncentrace přibližně $c = 10^{-pH}$ mol·l⁻¹. Pro silnou zásadu je $c = 10^{-(14-pH)}$ mol·l⁻¹. Jelikož je ale těžké měřit pH dostatečně přesně, nedávala tato metoda pěkné výsledky.
- c) Měření koncentrace pomocí vodivosti resp. odporu disociovaného roztoku. Do daného místa roztoku ponoříme dvě elektrody. Měly by být dostatečně chemicky stabilní. Měříme odpor mezi nimi. I tato metoda má své potíže. Například změnu měřeného odporu při změně stupnice ohmmetru nebo nelinearitě závislosti vodivosti na koncentraci. Nejšíkovnější bylo si naměřit kalibrační křivku závislosti odporu na koncentraci. Špatně se bude takto měřit dvourozměrná difúze, neb elektrody se celé neponoří do tenké vrstvičky, ale to nám tolik nevadí.

Měření

Uvedeme jedno z ukázkových měření pomocí postupu c), které provedl Jarda Trnka. Nechal difundovat barevnou koupelovou sůl. Bohužel nenapsal, jak přesně vypadaly jeho elektrody, ani jak daleko od místa, kam na počátku umístil sůl, elektrody byly. Koncentraci z naměřeného odporu určoval pomocí naměřené kalibrační křivky. Graf na obr. 22 udává výsledky pro difuzi v míse o objemu asi 3 litry, kam opatrně nejlépe pipetou doprostřed dáme 3 ml nasyceného roztoku soli.



Obr. 22. Závislost koncentrace na čase

Závěr

Shrňme tedy ještě jednu důležitou výsledek. Závislost koncentrace difundujícího roztoku na čase v určitém bodě vypadá buď jako na grafu na obr. 22, nebo monotónně roste, měříme-li dostatečně blízko ke krajům nádoby. Každopádně po dlouhém čase se koncentrace ustálí. Změníme-li tvar nádoby tak, že se roztok může šířit pouze ve dvou či jenom směru, difuze probíhá pomaleji, tedy koncentrace v daném místě pomaleji roste, popř. pomaleji klesá. Přesná měření těchto závislostí jsou velmi obtížná.

Úloha III. E ... balónek (8 bodů; průměr 5,79; řešilo 24 studentů)

Změřte tlak vzduchu, který je při nafukování uvnitř balóнку těsně před tím, než balónek praskne. Alespoň jednu metodu zrealizujte a několik dalších navrhňte. Nezapomeňte uvést typ použitých „balónek“.

Postupy

Představíme si několik možných postupů měření, na které přišli řešitelé. Objevili se dva postupy: vodní a vzduchový.

- U vodního postupu se napínal balónek vodou. Tato metoda v sobě skrývá zradu. Někteří řešitelé navrhovali následující postup: Budeme plnit balónek vodou až po prasknutí a nějakým způsobem v něm měřit tlak. Tímto postupem je možné měřit jen tlak, který vyvinou stěny balóнку. Balónek se deformuje a voda napíná stěny velmi nerovnoměrně, nakonec praskne proto, že stěna nevydrží napínání. Ztotožnit tento tlak s hydrostatickým tlakem ale není možné, výsledek je mnohem menší než při nafukování vzduchem. Správnější je naplnit balónek vodou tak, aby měl svůj charakteristický tvar, ale ještě nebyl na prasknutí. Potom ho stlačovat a libovolným způsobem měřit tlak. Dosažené maximum při prasknutí zaznamenat.
- Při vzduchovém způsobu jste plnili balónek plynem. Jediným oříškem bylo měření tlaku. Ne každý měl tlakoměr průmyslové výroby, proto jste vy, šikovní fykosáci, přišli na několik vskutku zajímavých možností, jak měřit tlak.

- Dobrý nápad spočíval ve využití tlakoměru u benzínové pumpy, kde je k dispozici i kompresor.
- Připevnit k balónku rtuťový (vodný) tlakoměr na bázi trubice ve tvaru U a měřit rozdíl výšek.
- Připevnit skleněnou trubku na konci uzavřenou se vzduchovou bublinou oddělenou od ostatních částí kapalinou. Potom stačí měřit délku posunutí dělicí kapaliny a podle Boyle-Mariottova zákona spočítat tlak.
- Položit na balónek průhlednou desku, kterou zatěžujeme závažími, a měřit stykovou plochu desky s balónkem. Tlak se spočítá podle definice jako podíl síly a plochy.
- Tlačit vzduch do balónku pístem o známé ploše a siloměrem měřit, jakou silou tlačíme.
- Vezmeme pumpičku, která má zpětnou pojistku. Změříme objem vzduchu jednoho stlačení, například ponořením balónku pod vodu v ocechované nádobě a stlačením pumpičky. Pro zjednodušení předpokládáme, že vzduch je ideální plyn, a pumpujeme pomalu, takže děj bude izotermický. Označme V_p objem vzduchu vytlačeného pumpičkou na jedno stlačení. Pumpu stlačíme k -krát. Jedním stlačením podle stavové rovnice přidáme do balónku látkové množství $n_p = p_a V_p / RT$. Balónek praskne při tlaku $p_{ex} = k n_p RT / V_{ex}$. Po dosazení $p_{ex} = k p_a V_p / V_{ex}$.¹⁰ Potom stačí odměřit objem při explozi. Máme-li dostatek experimentálního materiálu stejné kvality, tak můžeme objem při prasknutí V_{ex} odhadnout aproximací tvaru balónku koulí a odměřit rozměry před prasknutím (to nelze provést z již zmíněných příčin nalitím vody do balónku). Bohužel tento výpočet podle vašich měření, dával příliš vysoký tlak, zřejmě proto, že látkové množství n_p s rostoucím tlakem klesá.

Měření

Měřili jsme následovně. Plnili jsme balónek vodou přes průhlednou trubici a měřili jsme, do jaké výšky vystoupila voda. Bylo to zhruba 40 cm, což podle vztahu $p = \rho g h$ odpovídá cca 4 kPa.

Tento přetlak je způsoben pouze napětím ve stěnách balónku (viz výše). Po naplnění do poloviční velikosti oproti stavu při prasknutí jsme tlačili na balónek hrncem. Voda vystoupila dost vysoko, a protože strop máme vysoký asi 2 m, nejsme schopni měřit přetlaky nad 20 kPa. Jeden balónek puknul při přetlaku 15 kPa. Byl jediný, který jsme takto dokázali prasknout (bylo obtížné zatlačit dostatečně silně). Řešiteli změřené hodnověrné hodnoty se pohybovaly mezi 8 kPa a 15 kPa.

Úloha IV. E ... od medvídky Pú (8 bodů; průměr 4,32; řešilo 19 studentů)

Výzkumný ústav medvídky Pú při AV ČR vypsala grant ve výši osmi (výjimečně více) bodů na změní závislosti viskozity medu na teplotě. Nezapomeňte uvést druh medu, který používáte.

Metody měření

Nejčastějšími postupy bylo měření doby pádu tělíska v medu a průtoku medu kapilárou, ale objevily se i originálnější nápady, jako například měření doby za jakou skápně med ze lžičky nebo za jak dlouho steče po nakloněné rovině. Bohužel v těchto případech se chování medu nedá popsat jednoduchým modelem a získané výsledky se dají použít jen kvalitativně. Vzhledem k velmi rozdílným naměřeným hodnotám jsme se rozhodli použít úplně jinou metodu

¹⁰⁾ řešení Pavla Hály

měření než všichni řešitelé. Jádrem našeho experimentu byl model rotačního viskozimetru, tj. dva sousední rotační válce, mezi kterými je nalitý med. Vnější válec o poloměru r_1 (v našem případě obyčejná kádinka) je pevně uchycen a ponořen ve vodní lázni. Na vnitřním válci o poloměru r_2 je v horní části natočená nit, která vede na kladku, a na jejím konci visí závažíčko o hmotnosti m . Tuto část aparatury nebyl problém sestavit ze stavebnice LEGO. Pokus potom vypadal následovně: pustili jsme závažíčko a to roztočilo vnitřní válec. Díky viskozitě medu tak vznikla odporová síla F_m , která pohyb závažíčka brzdila. Zároveň samozřejmě působila i odporová síla F_o aparatury vzniklá třením v ložiscích. Tu jsme odhadli jako úměrnou rychlosti pohybu závažíčka a koeficient úměrnosti k získali tak, že jsme nechali závažíčko padat, když ještě mezi válci nebyl med. Vzhledem k tomu, že F_m s rychlostí roste, dospěje systém po chvíli do rovnovážného stavu $mg = F_o + F_m$ a závaží se bude pohybovat rovnoměrným pohybem.

Teorie

Pro smykové napětí τ v kapalině o viskozitě η mezi válci bude platit ve vzdálenosti r od středu vztah

$$\tau = \frac{\eta r \Delta\omega}{\Delta r}.$$

Moment síly M , který působí na válcové ploše o poloměru r a výškou h lze získat tak, že vynásobíme smykové napětí ramenem síly r a plochou $2\pi r h$

$$M = 2\pi r^2 h \tau = \frac{2\pi \eta r^3 h \Delta\omega}{\Delta r}.$$

Vzhledem k tomu, že je proudění medu ustálené, musí být výsledný moment síly, který působí na vrstvu medu o poloměru r nulový (je v rovnováze se stejně velkým momentem působícím na vrstvu v opačném směru ve vzdálenosti $r + \Delta r$). Uvažovaný moment tedy musí být nezávislý na r a proto

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta r} = \frac{A'}{r^3}.$$

Po zintegrování bude úhlová rychlost

$$\omega = -\frac{A}{r^2} + B.$$

Konstanty A a B získáme z počátečních podmínek

$$\omega = \omega_1 \quad \text{při} \quad r = r_2,$$

$$\omega = 0 \quad \text{při} \quad r = r_1.$$

Výsledný vztah pro moment síly potom bude

$$M = \frac{4\pi r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \eta h \omega_1,$$

Dosadíme-li za $\omega_1 = L/tr_2$, kde L je délka dráhy, po které se závažíčko pohybovalo, a t čas, za který tuto dráhu urazilo (pohyb se dá považovat za rovnoměrný), a za moment síly $M = r_2 (mg - kL/t)$ vyjde η

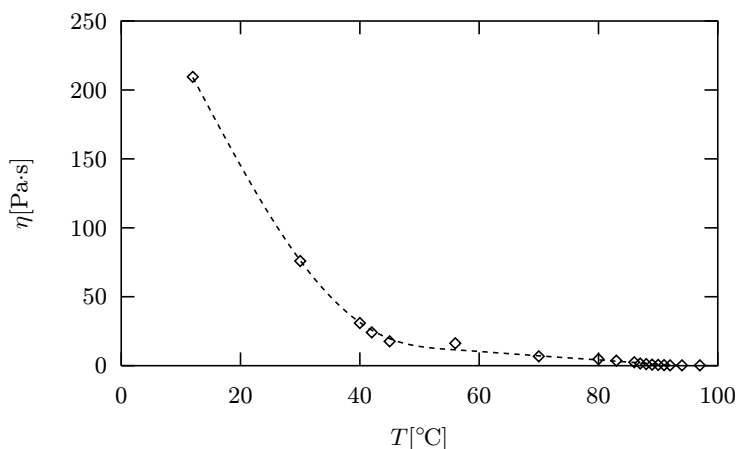
$$\eta = \frac{(mg - kL)(r_1^2 - r_2^2)}{4\pi h r_1^2 L t}.$$

Je třeba dbát na to, aby ω nepřekročila mez laminárního proudění medu. Tato hranice je obvykle charakterizovaná tzv. Reynoldsovým číslem. Pro naše uspořádání bude

$$R = (r_1 - r_2) r_2 \omega \frac{\rho}{\eta} < 1900.$$

$T[^\circ\text{C}]$	12	30	40	42	45	56	70	80	83
$\eta[\text{Pa}\cdot\text{s}]$	209,5	75,9	30,94	24,13	17,62	16,27	6,80	4,78	3,63
$\sigma_\eta[\text{Pa}\cdot\text{s}]$	2,9	2,0	0,81	0,63	0,46	0,42	0,43	0,18	0,13

$T[^\circ\text{C}]$	86	87	88	89	90	91	92	94	97
$\eta[\text{Pa}\cdot\text{s}]$	2,49	1,557	1,181	0,773	0,575	0,382	0,252	0,237	0,233
$\sigma_\eta[\text{Pa}\cdot\text{s}]$	0,10	0,071	0,048	0,040	0,032	0,029	0,018	0,015	0,015



Obr. 23. Naměřená závislost viskozity medu na teplotě

Výsledky měření

Snadným výpočtem se přesvědčíme, že jsme opravdu mez laminárnosti nepřekročili a náš fyzikální model je tedy platný. Jak je patrné z grafu, tvar závislost je klesající, největší pokles pozorujeme při teplotách do 40°C . Teoretické vysvětlení pozorované závislosti se nám nepodařilo nalézt, domníváme se ale, že pokud nějaké existuje, bude značně složité.

Pár poznámek k řešení

Každé správné vyhodnocení experimentu by nemělo postrádat výpočet odchylky měření, v opačném případě nevíme, jak přesné výsledky jsou, a tím v podstatě ztrácí význam. Dále je vhodné vypracovat graf toho, co bylo v zadání experimentu (hodně řešitelů kreslilo graf závislosti průtoku kapilárou na teplotě). Na závěr bychom chtěli poděkovat nejmenované řešitelce za ochutnávku a několika dalším za tipy na kvalitní med.

Úloha V. E ... paradox zmrzlináře (8 bodů; průměr 4,50; řešilo 18 studentů)

Traduje se historka, že jeden zmrzlinář, když potřeboval rychle vyrobit led, dával do mrazáku ohřátou vodu místo studené. Ověřte, zda je skutečně možné, aby na počátku teplejší voda zmrzla rychleji než stejné množství vody studené. Specifikujte při jakých podmínkách se to může stát.

Teorie

Je známo, že popsaný efekt skutečně existuje. V literatuře ho můžete najít pod heslem Mpembův jev. Důvod, proč by studená voda měla zmrznout dříve než teplá, je jasný na první pohled, o důvody, proč by tomu mělo být naopak, se fyzici přou dodnes. Shrňme zde ty nejčastěji uváděné.

- **Vypařování**

Teplá voda se bude zjevně vypařovat intenzivněji. Tím ztratí něco ze své hmotnosti, ale hlavně přijde o ty nejenergetičtější molekuly. Tím se může poměrně intenzivně ochladit (na tomto principu pracují například vývěvové zkapalňovače helia). Bohužel fyzikální popis vypařování je neobvykle složitý, takže odhadnout, jak velký dopad bude mít na mrznutí vody, je značně netriviální.

- **Složení vody**

Běžně dostupná voda obsahuje kromě molekul H_2O spoustu dalších iontů, molekul plynů apod. Tyto příměsi hrají významnou roli jako krystalizační jádra při vzniku ledu. Dá se předpokládat, že v převařené vodě bude těchto příměsí méně, což by mohlo ovlivnit proces zamrznutí. Není ovšem zdaleka jasné, zda by voda bez příměsí měla zamrznat rychleji než voda „špinavá“.

- **Vznik teplotního gradientu**

Hustota vody se mění s teplotou, a tak voda v nádobce bude mít tendence se horizontálně vrstvit. Podle některých názorů bude toto vrstvení vypadat jinak u studené vody a u vody původně teplé ochlazené na stejnou teplotu. Podle našeho názoru zde hraje spíše roli to, za jak dlouho se takové rozvrstvení vytvoří. Dá se předpokládat, že u teplé vody se utvoří rychleji. Potom bude nejteplejší voda u hladiny, což urychlí vypařování. U studené vody se bude rozvrstvení vytvářet pomaleji, což zpomalí i vypařování. Kvantitativní vyjádření tohoto jevu je opět netriviální a jen proměření teplotního gradientu bez nějakého infra-snímače prakticky neproveditelné.

- **Odvod tepla podložkou**

Nádobka s teplou vodou by mohla rozmrazit led pod sebou v mrazáku a tím zlepšit odvod tepla.

Experiment

Naše vybavení sestávalo ze 2 kelímků od pomazánkového másla (průměr $d = 7,88$ cm) a ledničky s teplotou mrazáku -8°C a objemem 30 l. Teplá voda měla přibližně 65°C .

Výše uvedené důvody naznačují, že při chladnutí hrají podstatnou roli i jiné faktory než jen počáteční teploty. Abychom mohli proměřit jejich kvantitativní vliv, měli bychom uspořádat sérii experimentů a v každém se zaměřit právě na jeden z vlivů. Pro začátek jsme měřili mrznutí vody ve dvou nádobkách o stejné počáteční teplotě.

- **Pokus 1**

Do první nádobky jsme nalili obyčejnou vodu z vodovodu, do druhé, pečlivě vyčištěné, stejné množství destilované vody (která by měla obsahovat méně příměsí). Obě vody začaly

mrznout v prakticky stejný okamžik (po 68 minutách), ale struktura ledového obalu byla rozdílná. U destilované vody šlo o hladkou vrstvičku okolo dna, stěn a hladiny. Obyčejná voda vytvářela zajímavější krystaly a vrstva nebyla souvislá. K efektu podchlazení nedošlo, pravděpodobně vlivem mechanických vibrací vyvolaných motorem ledničky.

• Pokus 2

Tentokrát jsme použili stejnou vodu, ale jednu nádobku jsme uzavřeli, čímž jsme znemožnili unikát vodním parám. Voda v otevřené nádobce zmrzla po 60 minutách, zatímco v uzavřené po 83, což potvrzuje, že vypařování je významným jevem při procesu ochlazování.

• Pokus 3

Opět jsme použili stejné vody a stejné počáteční teploty, ale jednu nádobku jsme zespoda odizolovali. Voda v izolované nádobce zmrzla o trochu později, ale rozdíl (3 minuty) byl na hranici měřitelnosti.

Tyto pokusy ukázaly, že jediným opravdu významným faktorem při ochlazování je vypařování. Budeme předpokládat, že intenzita vypařování souvisí s plochou hladiny. Další k experimenty provedeme s rozdílnými počátečními teplotami a postupně budeme měnit množství použité vody a tím i poměr plochy hladiny a objemu.

Jak je patrné z tabulky, teplá voda sice vždy zmrzla později, ale čím byl poměr plochy hladiny a objemu větší, tím těsnější byl rozdíl. Za určitých okolností (např. s mrazákem o nižší teplotě) by pravděpodobně bylo možné Mpembův jev pozorovat.

S/V [cm^{-1}]	t_{hot} [min]	t_{cold} [min]	$t_{\text{hot}}/t_{\text{cold}}$
2,3	85	60	1,42
3,8	70	55	1,30
7,7	27	23	1,17

Závěr

Mpembův jev jsme sice přímo nepozorovali, ale potvrdili jsme, že počáteční teploty nejsou jediný důležitý faktor ovlivňující dobu ochlazování. Pokud bychom měli zhodnotit příspěvek výše zmíněných procesů, pak se nám jako hlavní jeví vypařování. Vliv teplotního rozvrstvení jsme samostatně neproměřovali a zahrnuli ho do efektu vypařování. Naopak jsme nezjistili zásadní vliv způsobený složením vody, ani únikem tepla podstavou nádobky. To ale může být způsobené naším uspořádáním experimentu a za jiných podmínek se jejich vliv nedá vyloučit.

Literatura

[1] *Vesmír*, 11/2002, str. 615

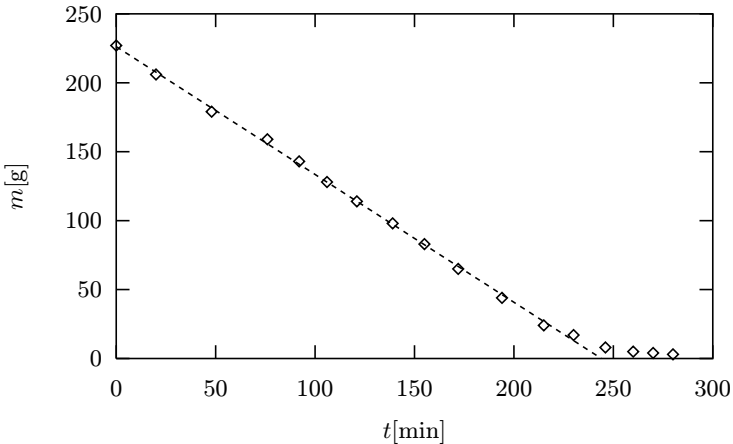
[2] <http://library.thinkquest.org/C008537/cool/freeze/freeze.html>,
mirror na <http://fykos.mff.cuni.cz/cz/rocnik16/freeze/>

Úloha VI. E ... sušení prádla (8 bodů; průměr 4,45; řešilo 20 studentů)

Změřte časovou závislost množství vody v prádle při sušení. Nezapomeňte podrobně popsat všechny důležité podmínky, za kterých jste prováděli měření.

Měření se provádělo na prádle vyždímaném tak, aby z něho neteklo, přičemž se měřila závislost množství vody na čase. Množství vody se stanovovalo z rozdílu hmotností mokrého a suchého prádla. Někteří jste dělali měření venku, takže se tam mohla objevit nějaká závislost na vnějších povětrnostních podmínkách, ale jinak téměř všem vyšla alespoň částečně lineární závislost. Ta ale nemůže být až do nekonečna, protože v jistém momentě prádlo uschne. Je

tedy možné, že nastane i nějaké zpomalení vysušování, což by se projevilo přechodem lineární závislosti do závislosti asymptoticky se blížící nule. Jelikož my jsme měření neprováděli, dovolili jsme si použít experimentální hodnoty z řešení Jardy Trnky. Naměřené hodnoty jsou vyneseny do grafu na obr. 24.



Obr. 24. Závislost vody v prádle hmotnosti na čase

Z grafu by se dalo usoudit, že závislost je v počáteční fázi schnutí dobře aproximovatelná přímkou. Což by se dalo vysvětlit tím, že plocha, ze které se voda odpařuje, je pořád stejná, a proto se i rychlost vypařování nemění.

V konečné fázi schnutí však budou vznikat úplně suchá místa, tedy dostaneme se postupně do stavu, kdy množství vody na povrchu bude úměrné celkovému množství vody. Za tohoto předpokladu získáme diferenciální rovnici

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha N,$$

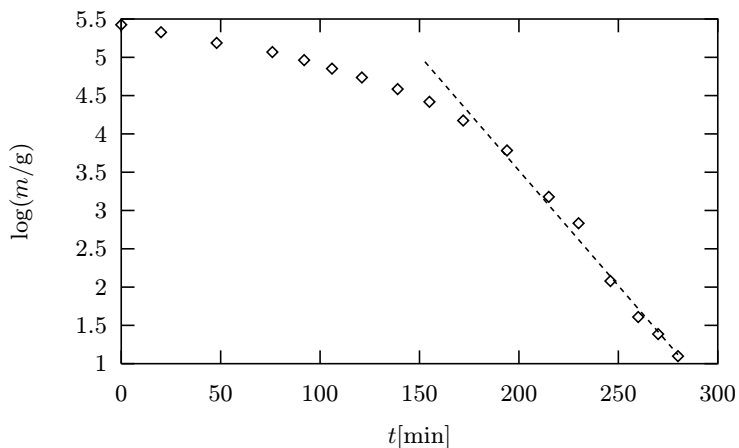
kde α je konstanta úměrnosti. Řešení této diferenciální rovnice vede na exponenciální závislost, která určuje chování v závěru usychání.

A nyní zpět k našim experimentálním datům: V oblasti lineárního poklesu jsme naměřenými hodnotami snadno proložili přímkou (viz obr. 24). Přesné koeficienty této lineární závislosti můžeme zjistit například metodou nejmenších čtverců.

Pokud vyneseme do grafu logaritmus změřených hmotností vody v prádle (viz obr. 25), můžeme usoudit, zda je námi změřená závislost v závěrečné fázi usychání exponenciální. V logaritmické škále se jeví exponenciální závislost jako příмка, což ukazuje následující rovnost:

$$\log m = \log (m_0 e^{-\alpha t}) = \log m_0 - \alpha t.$$

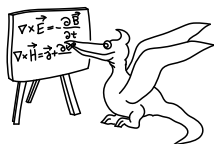
A skutečně, zhruba od času 190 minut můžeme našimi experimentálními daty proložit poměrně dobře v logaritmické škále přímkou. (Rozmyslete si, jak by v exponenciální škále vypadaly v grafu chybové úsečky u jednotlivých experimentálních bodů!)



Obr. 25. Závislost je v závěrečné fázi usychání exponenciální

Na závěr můžeme říct, že daný proces se dá téměř v celém průběhu aproximovat lineární závislostí. Jenom na samém konci procesu je možné hovořit o exponenciální závislosti. Zde je však nutné provádět měření (již velmi malých množství vody) velmi pečlivě.

Poznamenejme, že mnoho z vás proložilo daty jenom lineární lomenou čáru, což je naprosto nefyzikální přístup. Vhodnější je do grafu zakreslit pouze experimentální body a pokusit se jimi proložit křivku (případně více křivek).



Seriál na pokračování

Letošní seriál bude pojednávat o matematickém aparátu fyziky. V prvním díle si povíme něco o komplexních číslech a jejich využití ve fyzice.

Kapitola 1: Komplexní čísla

V reálných číslech nelze odmocňovat záporná čísla, neboť rovnice $x^2 + a = 0$ nemá pro kladná a řešení. Definujme číslo i , tzv. imaginární jednotku, vztahem

$$i^2 = -1. \quad (21)$$

Komplexním číslem pak rozumíme číslo, které se skládá z reálné a imaginární části, např. $3 + 2i$ (můžeme na něj nahlížet jako na součet reálného a ryze imaginárního čísla, přesto se však jedná o jedno číslo). Množinu všech komplexních čísel obvykle značíme \mathbb{C} .

Hned na tomto místě bychom rádi ujasnili pojem odmocniny v komplexních číslech. Zatímco v reálných číslech obvykle máme na mysli *funkci* definovanou na *nezáporných číslech*, v komplexním oboru odmocninou myslíme *víceznačnou funkci*, jejíž hodnotou je množina všech čísel, která umocněná na příslušnou mocninu dávají odmocňované číslo. V praxi to většinou znamená, že pokud chceme odmocninu z komplexního čísla použít, musíme nějakým způsobem specifikovat, které řešení máme na mysli. Např. pro druhou odmocninu můžeme chtít řešení se zápornou imaginární částí; potom lze psát $\sqrt{-1} = -i$.

Základní operace s komplexními čísly

Sčítání a odčítání komplexních čísel je definováno po složkách, tedy např. $(2+i) + (4-3i) = 6-2i$. Při násobení musíme roznásobit všechny členy, tj. $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+cb)i$. Číslem komplexně sdruženým k číslu $z = a + bi$ rozumíme číslo $\bar{z} = a - bi$. Někdy se místo značení \bar{z} používá též značení z^* .

Všimněte si, že $z\bar{z} = a^2 + b^2$ je reálné číslo. To dává návod, jak dělit komplexní čísla, platí totiž

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}.$$

Další zajímavé vlastnosti komplexního sdružení už pouze vyjmenujeme, laskavý čtenář si může vše sám ověřit.

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla

Stejně jako můžeme reálné číslo reprezentovat bodem na číselné ose, můžeme komplexní číslo chápat jako bod, který leží v rovině, které se říká *Gaussova rovina*. Kartézské souřadnice (a, b) bodu v Gaussově rovině odpovídají číslům a, b v již zmiňovaném *algebraickém tvaru* komplexního čísla $a + bi$.

Polohu bodu v rovině však můžeme popsat i pomocí polárních souřadnic, které udávají vzdálenost bodu od počátku souřadného systému (běžně značenou r či ρ) a úhel, který svírá

jeho průvodič s osou x (označme ho φ). Souřadnicím r a φ odpovídá číslo $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Mluvíme pak o komplexním čísle v *goniometrickém tvaru*.

Číslu r říkáme *absolutní hodnota* komplexního čísla a značíme ji $|z|$. Zřejmě platí $|z|^2 = z\bar{z}$. Z vlastností komplexního sdružení přímo plynou následující vlastnosti absolutní hodnoty:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Komplexní exponenciála

Na reálných číslech lze nadefinovat exponenciální funkci $\exp x$ pomocí následujících vlastností:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \exp(x + y) = \exp x \exp y, \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \exp x \geq 1 + x.$$

Skutečně, lze dokázat, že tyto podmínky splňuje právě jedna funkce, a označíme-li $e = \exp 1$ tzv. *Eulerovo číslo*, můžeme psát $\exp x = e^x$.

Přirozený způsob, jak rozšířit exponenciálu na \mathbb{C} , je požadovat platnost první podmínky pro všechna \mathbb{C} . Stačí znát vzorec pro exponenciálu ryze imaginárního čísla. To je tzv. *Eulerův vztah*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (22)$$

Čtenář si může sám ověřit, že toto rozšíření skutečně zachová v platnosti výše zmíněnou vlastnost $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Uvedený vztah nám v mnoha případech velice zjednoduší práci. Jeho užitečnost tkví v tom, že exponenciála je velmi „pěkná“ funkce, se kterou se snadno počítá. Například goniometrický tvar komplexního čísla se použitím tohoto vztahu redukuje na $z = re^{i\varphi}$. Čísla v tomto tvaru můžeme např. velmi jednoduše násobit (násobíme absolutní hodnoty a sčítáme úhly). Vidíme, že např. násobení komplexního čísla faktorem $e^{i\varphi}$ odpovídá jeho otočení o úhel φ v Gaussově rovině. Dosadíme-li $-\varphi$ do (22), dostáváme ze sudosti resp. lichosti cosinu resp. sinu

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Odtud pak můžeme vyjádřit funkce sinus a cosinus takto:

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Z těchto vztahů a z vlastností exponenciály můžeme snadno odvodit třeba součtové vzorce pro funkce $\sin x$ a $\cos x$. Podobně např. *Moiverova věta*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

se při znalosti komplexní exponenciály redukuje na vztah $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$.

Kmity a vlny

Největší uplatnění ve fyzice však vztah (22) nachází při popisu všelikého vlnění a kmitání. Pokud ke klasickému vztahu pro harmonické kmity $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ přičteme libovolnou imaginární část, téměř nic se v praxi nezmění při sčítání a odčítání, derivování a integrování, násobení komplexním číslem, protože všechny tyto operace fungují na komplexních číslech „po složkách“. Stačí si pouze pamatovat, že realitě odpovídá reálná část čísla.

Jednu z možností, jak šikovně přidat imaginární část, ukazuje následující vztah

$$y = A_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = \widehat{A}_0 e^{i\omega t}, \quad (23)$$

kde \widehat{A}_0 je komplexní amplituda, do které můžeme zahrnout počáteční fázi ($\widehat{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0}$). Podobně vlnění popsané vztahem $u = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ můžeme popisovat ve tvaru

$$y = \widehat{A}_0 e^{i\omega t} e^{-ikx}.$$

Komplexní symbolická metoda pro řešení obvodů RLC

Zřejmě neexistuje lepší příklad, než tato metoda pro RLC obvody, jako odpověď na otázku, k čemu vlastně je přepsání harmonických kmitů do komplexních čísel dobré.

RLC obvody jsou obvody, ve kterých se kromě rezistorů vyskytují ještě další dvě lineární součástky – kondenzátory a cívky. Pro všechny tři platí analogie Ohmova zákona i pro harmonický střídavý signál, totiž že poměr amplitudy napětí a proudu je pro danou součástku konstantní (u cívky a kondenzátoru tento koeficient závisí ještě na frekvenci).

Fázově jsou ovšem napětí a proud na cíve a kondenzátoru vůči sobě posunuté, a protože Kirchhoffovy zákony neplatí pro amplitudy, ale pro okamžité hodnoty napětí a proudu, musíme se vydat buď cestou poměrně nepřehledných úprav vztahů se siny a cosiny, kde je navíc třeba neustále kontrolovat znaménko fázového posunutí, případně použít metodu tzv. *fázorů*, kde se harmonické kmity reprezentují jako průmět rovnoměrného pohybu po kružnici do jedné přímky.

Na stejném principu jako fázory funguje i komplexní metoda. Její výhoda spočívá v jednoduchosti popisu – je-li proud v cíve $i = \widehat{I} e^{i\omega t}$, pak napětí je $u = i\omega L \widehat{I} e^{i\omega t}$, podobně kondenzátorem s napětím $u = \widehat{U} e^{i\omega t}$ prochází proud $i = i\omega C \widehat{U} e^{i\omega t}$. Protože člen $e^{i\omega t}$ bude zřejmě u všech veličin společný, stačí napsat Kirchhoffovy zákony pro komplexní amplitudy.

Oproti stejnosměrným obvodům se tedy změní pouze tolik, že napětí a proudy jsou komplexní čísla (jejichž absolutní hodnota odpovídá amplitudě a argument fázi). Podíl komplexního napětí a proudu na součástce či skupině součástek se nazývá *impedance* (je to vlastně zobecněný odpor), přičemž impedance cívky je $Z_L = i\omega L$ a impedance kondenzátoru $Z_C = 1/i\omega C$. Impedance rezistoru je pochopitelně reálná, $Z_R = R$. Vše ostatní je stejné jako u stejnosměrných obvodů.

Příklad: Vyřešme, jaký proud teče sériovým RL obvodem, známe-li amplitudu a frekvenci napětí zdroje. Celková impedance je $Z = R + i\omega L$. Napětí na zdroji zvolíme $\widehat{U} = U$ (\widehat{U} je komplexní veličina, ve které je obsažena informace o amplitudě i fázi, U je amplituda). Samozřejmě jsme mohli zvolit např. $\widehat{U} = -U$ či $\widehat{U} = iU$. U první veličiny, kterou zavádíme, máme totiž vždy možnost volby počáteční fáze. Pochopitelně jsme si vybrali nejjednodušší možnost – nulovou fázi. Pro komplexní proud pak platí $\widehat{I} = \widehat{U}/Z = U/(R + i\omega L)$. Amplituda proudu je tedy $I = |\widehat{I}| = U/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ a fázové posunutí vzhledem k napětí je $\Delta\varphi = -\arctg(\omega L/R)$ (proud se zpožďuje za napětím).

Komplexní analýza

Kdo již umí derivovat, může se zamyslet nad tím, jak je to s derivací komplexní funkce komplexní proměnné. Tato derivace se definuje takto

$$f'(z_0) = \lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Důležité na této definici je to, že tato limita musí být stejná nazávisle na směru, kterým se z přibližuje k z_0 . Pokud místo komplexní funkce komplexní proměnné $f(z)$ budeme na chvíli uvažovat dvě reálné funkce dvou reálných proměnných $u(x, y)$ a $v(x, y)$ takové, že platí $f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$, zjistíme, že aby mohla (komplexní) derivace funkce $f(z)$ existovat, musí platit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Toto jsou takzvané *Cauchy-Riemannovy podmínky*. Funkce, která je na nějaké oblasti splňuje a má tedy na této oblasti derivaci, se nazývá *holonomní*. K zajímavým vlastnostem holonomních funkcí patří např. to, že každá taková funkce má na příslušné oblasti derivace libovolného řádu a rovná se své Taylorově řadě. Její reálná i imaginární část jsou díky Cauchy-Riemannovým podmínkám řešením Laplaceovy rovnice ($\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$, $\partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2 = 0$).

K holonomní funkcím na celé množině \mathbb{C} patří např. libovolné polynomy a mocninné řady, exponenciála a pomocí ní definované funkce sinus a cosinus. Dále např. součin dvou holonomních funkcí je holonomní funkce apod. Každopádně se jedná o vlastnost, kterou má (alespoň na určité oblasti) většina běžně užívaných funkcí.

Díky Cauchy-Riemannovým podmínkám lze s užitím Stokesovy věty o křivkovém integrálu dokázat, že křivkový integrál z holonomní funkce přes uzavřenou křivku je nulový. Ve spojení s další důležitou větou – *residuovou větou* – toto dává velmi silný nástroj pro výpočet jistého typu určitých integrálů, ale to už skutečně přesahuje rámec našeho seriálu.

Úloha I. S ... komplexní čísla

- Spočtete reálnou a imaginární část $\sin(a + bi)$.
- Pomocí komplexní symbolické metody odvoďte vztah pro rezonanční frekvenci paralelního *RLC* obvodu, tj. nalezněte frekvenci, pro kterou má při konstantním napětí celkový proud v obvodu minimální amplitudu.
- Sečtete pomocí komplexních čísel následující řady. (*Návod*: řada $A + Bi$ je geometrická.)

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \cos(n\varphi), \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sin(n\varphi).$$

řešení str. 89

Kapitola 2: Limity a derivace

Řešme jednoduchý úkol. Ze čtvercového plechu o délce strany a chceme vyrobit nádobu tak, že odstříhneme z jeho rohů čtvercové díly o délce strany b a zbylý kus ohneme do výsledného tvaru. Otázkou je, jak velké mají být odstřížené části, aby byl objem nádoby co největší.

Snadno zjistíme, že objem nádoby závisí na b jako

$$V(b) = b(a - 2b)^2. \quad (24)$$

Nyní se podívejme, jak se změní výsledný objem nádoby, změníme-li hodnotu b o Δb . Dosazením do (24) a odečtením původní hodnoty V dostáváme

$$V(b + \Delta b) - V(b) = (a - 2b)(a - 6b)\Delta b + 4(3b - a)\Delta b^2 + 4\Delta b^3. \quad (25)$$

Uvažujme změnu o velmi malou hodnotu Δb . Vidíme, že ve vzorci (25) vystupuje Δb v 1., 2. a 3. mocnině. Pokud je však Δb malá (např. 10^{-6}), bude mít její 2. a 3. mocnina zanedbatelnou velikost oproti 1. mocnině. Vzorec (25) v tomto případě přechází na

$$V(b + \Delta b) - V(b) \approx (a - 2b)(a - 6b)\Delta b \quad (26)$$

Dále uvažujme takto. Pokud má nádoba maximální možný objem, určitě se při jakékoliv malé změně b nezvětší. Hodnota $V(b + \Delta b) - V(b)$ tedy určitě nebude kladná. Pro malé hodnoty Δb však nemůže být ani záporná, protože pokud by tato situace nastala, byla by hodnota $V(b + \Delta b) - V(b)$ pro $-\Delta b$ kladná (jak vidíme z (26)) a to je ve sporu s předpokladem o maximálnosti objemu. Z toho plyne, že pro jakoukoliv malou změnu Δb se hodnota V nezmění (přesněji řečeno, nezmění při zaokrouhlení na řád této změny). Při pohledu na rovnici (26) vidíme, že toho je možno dosáhnout jen v případě, že hodnota $(a - 2b)(a - 6b)$ je nulová. To je splněno v případě, že $a = 2b$ nebo $a = 6b$. Pro $a = 2b$ je však $V = 0$. Hledaným řešením je tedy $b = a/6$.

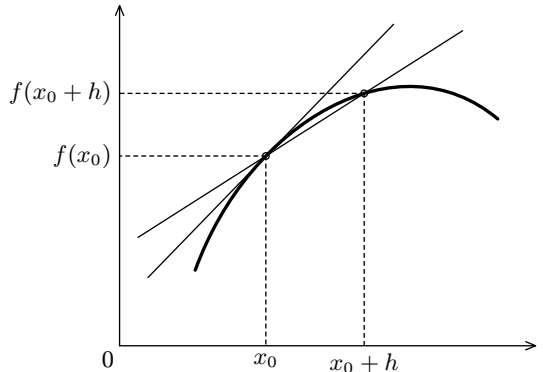
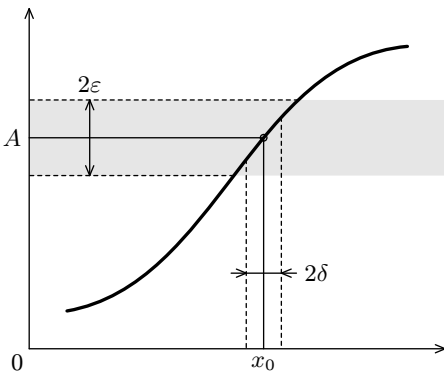
Postup naznačený na tomto příkladě se dá značně zefektivnit a rozsah problémů, které se dají řešit obdobným přístupem, je obrovský. Základní matematické pojmy potřebné k takovému výpočtům si nyní vysvětlíme.

Zavedme pojem limity funkce. Její význam možná není na první pohled zřejmý, ale vyplyne z následujícího textu, takže se jej pokuste alespoň částečně pochopit. Nejprve odstrašující definice:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (27)$$

Nyní se pokusme vyložit, co vlastně tento vzorec znamená. Limitou funkce $f(x)$ pro x blížící se k x_0 je číslo A (levá strana ekvivalence je standardní označení pro limitu), pokud platí výrok na pravé straně implikace.

Ten pak říká, že pro libovolné zadané kladné ε musíme vždy najít takové kladné δ , aby se funkční hodnota v intervalu šířky 2δ kolem x_0 lišila od A o méně než ε (sledujte levý obrázek). Je dobré si uvědomit, že pokud nalezneme k nějakému ε_1 příslušné δ , můžeme každému $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ přiřadit stejné δ . Stačí tedy splnit podmínku v definici (27) pro libovolně malé ε . Všimněte si také toho, že hodnota limity v bodě x_0 vůbec nezávisí na hodnotě funkce f v tomto bodě. Limita funkce tedy jakýmsi způsobem vystihuje to, kam se blíží hodnoty f , pokud se její argument blíží k hodnotě x_0 (může nastat i případ, kdy se tyto hodnoty nikam neblíží, pak řekneme že limita neexistuje).



Pokud by se vám zdálo, že pojem limity je úplně zbytečný, protože se vždy rovná funkční hodnotě v bodě x_0 (jak by mohl napovídat obrázek), mýlíte se. Toto tvrzení platí jen pro spojité funkce (vlastně je to definice spojité funkce). V mnoha zajímavých případech ale námi zkoumaná funkce ve studovaném bodě spojitá není, a tak se bez limit zkrátka neobejdeme.

Nyní se na chvíli vraťme k našemu motivačnímu příkladu. Jak vidíme, hodila by se nám metoda, která by umožnila kvantitativně popsat a vypočítat rychlost růstu funkce, abychom dokázali řešit podobné příklady (a jak se později ukáže, také obrovskou spoustu zcela jiných) bez nutnosti používání krkolomných operací podobných těm, které jsme použili. A k tomu nám poslouží takzvaná *derivace* funkce. Začneme opět definicí:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Význam asi nejsnáze pochopíte z obrázku vpravo. Jak vidíte, jedná se o limitu podílu velikosti přírůstku funkční hodnoty ku přírůstku velikosti argumentu. V bodě x_0 má tento podíl význam směrnice sečny grafu funkce f s průsečíky v bodech $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ (směrnici přímky dané rovnicí $y = px + q$ rozumíme číslo p). Tato sečna se pro zmenšující hodnotu h blíží k tečně ke grafu funkce f . Derivace má tedy význam směrnice tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Poznámka: V definici derivace vystupuje parametr x , takže ačkoliv je derivace definovaná jako limita a to je číslo (viz. definice), je to vlastně funkce (jejím argumentem je x). Derivace je tedy zobrazení, které z funkce udělá opět funkci (a to je zvláštní případ takzvaného operátoru). Pokud původní funkci značíme f , zderivovanou funkci obvykle značíme f' (a tuto znovu zderivovanou f'' atd.). Závise-li nějaká fyzikální veličina na více parametrech a není zřejmé, jako funkci kterého parametru ji zrovna chápeme, držíme se raději už uvedeného značení df/dx . Výjimku představují derivace podle času, které jsou tak časté, že se vyplatí mít pro ně zvláštní značení $du/dt = \dot{u}$ (nad veličinu se píše tečka, v případě druhé derivace dvě tečky).

Stejně jako při výpočtu limit, i při počítání derivací zpravidla nevycházíme z definice. Z didaktických důvodů si však takovýto postup můžeme ukázat. Spočítejme tedy derivaci funkce $f(x) = x^2$ z definice.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x.$$

Mnohem praktičtější je ale zapamatovat si pravidla pro derivování několika základních funkcí, dále součtu, součinu a složení dvou funkcí. Vybavení těmito znalostmi pak pravě zderivujete téměř cokoliv. Nejdříve tedy jak vypadají derivace elementárních funkcí.

$y = a$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = 1/x$	$y' = -1/x^2$
obecně $y = x^r, r \in \mathbb{R}$	$y' = rx^{r-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1/\cos^2 x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln x$	$y' = 1/x$
$y = \arcsin x$	$y' = 1/\sqrt{1-x^2}$
$y = \arccos x$	$y' = -1/\sqrt{1-x^2}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = 1/(1+x^2)$
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$
$y = \operatorname{tgh} x$	$y' = 1/\cosh^2 x$

Derivace některých funkcí v tabulce jsou pomocí pravidel, která si za chvíli vypíšeme, přímo odvoditelné ze znalosti derivací jiných funkcí, např. funkci $y = \operatorname{tg} x$ lze derivovat jako podíl $y = \sin x / \cos x$. Vrhněme se tedy na slíbená pravidla. f, g jsou funkce, a, b konstanty, f^{-1} je inverzní funkce k f .

$y = af$	$y' = af'$
$y = af \pm bg$	$y' = af' \pm bg'$
$y = fg$	$y' = fg' + f'g$
$y = \frac{f}{g}$	$y' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$y(x) = f(ax)$	$y'(x) = af'(ax)$
$y(x) = f(g(x))$	$y'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$y(x) = f^{-1}(x)$	$y'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Pokud jste nepochopili po prvním přečtení všechna pravidla (např. to pro derivování složené a inverzní funkce), nic se neděje, v příštím díle se k nim ještě vrátíme.

Úloha II. S ... limity a derivace

- Dokažte, že těleso, které má v čase t polohu $x = gt^2/2 + v_0t + x_0$, se pohybuje se zrychlením g .
- Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$.
- Nahraďte co nejlépe funkci f v okolí bodu $x = 0$ lineární funkcí, víte-li, že $f(0) = 3$ a $f'(0) = -2$.
- Jaký je poměr výšky a průměru podstavy válce, který má při daném povrchu maximální objem?

řešení str. 90

Kapitola 3: Integrály

Třetí díl seriálu bude pojednávat o integrálním počtu. Pro začátek malé upozornění; pokud jste si zatím nepřečetli druhý díl (ten byl o derivacích) a derivovat neumíte, určitě si ho přečtěte. Dále bych doporučil těm, kteří nejsou v derivování zcela zbláhli (i když jste bez problémů minulý díl pochopili), aby si alespoň zběžně přečetli nějakou knihu, která o této problematice pojednává podrobněji, a propočítali co nejvíce příkladů (minulý díl se dá považovat jen za velmi stručný úvod).

A nyní k integrování. Začneme definicí takzvané primitivní funkce. Řekneme, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$, pokud platí vztah

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Integrováním pak rozumíme proces, který nás přivede od funkce f k funkci F . Integrování je tedy opakem derivování. Funkce F bývá nazývána též neurčitý integrál funkce f nebo jednoduše integrál z f . Tedy například funkce $F(x) = 1/3x^3 + 3$ je primitivní funkcí k $f(x) = x^2$, protože $F' = f$. Všimněte si, že pokud F je primitivní funkcí k f , pak i funkce $F + C$, kde C je libovolná konstanta, je primitivní funkcí k f . Toto tvrzení plyne ihned z pravidla pro derivování součtu dvou funkcí a toho, že derivace konstanty je nula. Primitivní funkce tedy není určena jednoznačně. Vztah mezi funkcí a jejím integrálem se pak značí

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Člen dx můžete chápat tak, že říká, podle které proměnné integrujeme, tedy podle které proměnné musíme zderivovat výsledek, abychom dostali původní funkci (u složitějších funkcí to nemusí být zřejmé). Jeho význam je však poněkud hlubší a vyplyne z následujícího textu.

Určitý integrál

S pojmem primitivní funkce úzce souvisí *určitý integrál*. Určitý integrál funkce $f(x)$ z bodu a do bodu b je definován takto: Označme S_n součet následující řady

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{b-a}{n+1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n+1}\right). \quad (28)$$

Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme pomocí n dělicích bodů na $n+1$ stejně dlouhých intervalů. Nad každým z těchto intervalů nakreslíme obdélník stejné výšky jako funkční hodnota f v levém krajním bodu tohoto intervalu. Suma (28) má pak význam součtu obsahů těchto obdélníků. Je zřejmé že pro rostoucí n je aproximace plochy pod grafem funkce f pomocí takovýchto obdélníků stále přesnější. Určitým integrálem funkce f od a do b pak nazveme číslo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Symbol na levé straně rovnosti je standardním značením pro určitý integrál. Limita na pravé straně je limitou posloupnosti čísel S_n (pokud nevíte, co je to limita posloupnosti, pak vezte, že je to číslo, které charakterizuje, kam se blíží hodnoty S_n pro velká n , a její definice je podobná definici limity funkce). Význam členu dx tedy spočívá v tom, že si můžeme určitý integrál

představit jako sumu (28) při „nekonečně“ jemném dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ tak, že vzdálenost mezi dvěma dělicími body je dx . V tomto případě sčítáme hodnoty $f(x) dx$.

Určitý integrál je tedy „věc“, která přiřadí dvěma číslům a a b a dané funkci číslo. Toto číslo má význam obsahu plochy pod grafem této funkce mezi body a a b .

Jaký je vztah mezi určitým a neurčitým integrálem? Již zmíněná úzká souvislost mezi určitým a neurčitým integrálem je dána následujícím velmi důležitým vztahem (takzvaná Newton-Leibnitzova formule)

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

kde F je jakákoliv pevně zvolená primitivní funkce k f . Máme tedy jednoduchou (a v podstatě také jedinou reálně použitelnou) metodu, jak určité integrály počítat.

Jak integrály počítat?

Pravidla pro výpočet integrálů jsou vlastně jen obrácená pravidla pro výpočet derivací (bohužel nejsou vždy tak přímočará jako v případě derivování). Malý příklad. Derivace funkce $y = x^n$ je $y' = nx^{n-1}$. Integrál z $y = x^n$ je tedy $Y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (jak se snadno přesvědčíme zderivováním). Analogicky zjistíme, jak integrovat další elementární funkce pohledem do tabulky jejich derivací. Tyto základní integrály (až na konstantu) jsou shrnuty v následující tabulce

$y = a$	$\int y dx = ax$
$y = x$	$\int y dx = x^2/2$
$y = x^r, r \neq -1$	$\int y dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$
$y = \sin x$	$\int y dx = -\cos x$
$y = \cos x$	$\int y dx = \sin x$
$y = 1/\cos^2 x$	$\int y dx = \operatorname{tg} x$
$y = e^x$	$\int y dx = e^x$
$y = 1/x$	$\int y dx = \ln x $
$y = 1/\sqrt{1-x^2}$	$\int y dx = \arcsin x$
$y = 1/(1+x^2)$	$\int y dx = \operatorname{arctg} x$
$y = \sinh x$	$\int y dx = \cosh x$
$y = \cosh x$	$\int y dx = \sinh x$
$y = 1/\cosh^2 x$	$\int y dx = \operatorname{tgh} x$

Pro integrál součtu dvou funkcí platí

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Situace se však komplikuje v případě složitějších funkcí. Pro výpočet integrálu ze součinu nebo složení více funkcí totiž neexistují jednoduchá pravidla, která by výpočet převedla na výpočet integrálů elementárních funkcí tak, jako v případě derivací. Existují však pravidla, pomocí kterých převedeme takovéto integrály na integrály jednodušší.

Integrace per partes

Metoda takzvané integrace *per partes* (po částech) je odvozena od pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí. Připomeňme, že toto pravidlo zní

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x).$$

Zintegrovaním této rovnice a přeuspořádáním členů dostáváme

$$\int f(x) \frac{d}{dx} g(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) \frac{d}{dx} f(x) dx.$$

Pro zjednodušení můžeme dále označit $g'(x) = h(x)$, a tedy $g(x) = H(x)$, kde $H(x)$ je primitivní funkce k $h(x)$. Dostáváme pak

$$\int f(x)h(x) dx = f(x)H(x) - \int H(x) \frac{d}{dx} f(x) dx. \quad (29)$$

Použití této metody můžeme demonstrovat na následujícím příkladě. Chceme spočítat integrál z funkce $y = x \sin x$. Položíme $f(x) = x$ a $h(x) = \sin x$. Tedy $f'(x) = 1$ a $H(x) = -\cos x + C_1$ (viz tabulka integrálů). Dosazením do (29) dostáváme

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x + C_1) - \int (-\cos x + C_1) dx + C.$$

Zbývá tedy vypočítat integrál na pravé straně, ale to již není problém. Dostáváme

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

O správnosti tohoto výsledku se můžete přesvědčit jeho zderivováním.

Substituce

Další důležitou metodou pro výpočet integrálů je metoda substituční. Stejně jako je metoda per partes odvozena od vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí, je metoda substituční založena na vzorci pro derivaci složené funkce. Ten vypadá následovně

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Po zintegrovaní a přeznačení $f' = h$, $f = H$ dostáváme

$$\int h(g(x))g'(x) dx = H(g(x)) + C.$$

V praxi při počítání integrálů substitucí postupujeme následovně: Funkci $g(x)$ substituujeme novou proměnnou $y = g(x)$. Nepřesně matematicky, ale šikovně pro představu, můžeme funkci y zderivovat a napsat $dy = g' dx$. Pak můžeme dosadit a psát

$$\int h(g(x))g'(x) dx = \int h(y) dy = H(y) + C = H(g(x)) + C.$$

Pro vyjasnění není nic lepšího, než spočítat příklad. Zintegrujme tedy funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Zavedeme substituci $y = \cos x$, $dy = -\sin x dx$, dosadíme a získáme výsledek

$$\int \operatorname{tg} x dx = - \int \frac{dy}{y} = -\ln |y| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

Aplikace

S neurčitými integrály se ve fyzice setkáváme většinou v případech, kdy odněkud známe derivaci funkce, která nás zajímá (většinou známe jen vztah svazující hledanou funkci a její derivace – tzv. diferenciální rovnici, ale o těch si povíme až v příštím díle), a výsledek je tedy primitivní funkcí k této derivaci. Například víme, že časová derivace polohy tělesa padajícího volným pádem je $gt + v_0$. Pro polohu tohoto tělesa tedy platí

$$x(t) = \int (gt + v_0) dt = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C.$$

Konstanta C pak má význam počáteční polohy.

Určité integrály pak nacházejí uplatnění při výpočtu veličin jako je objem, moment setrvačnosti, poloha těžiště, elektrické či gravitační pole apod., tedy všude, kde je třeba nějakým způsobem sčítat malé příspěvky (k objemu, hmotnosti, intenzitě pole atd.).

Poznámka: V tomto textu se dopouštíme velkého množství drobných nepřesností usnadňujících výklad. Rozhodně se tedy nejedná o matematicky korektní pojednání o integrálním počtu, ale spíše o jakýsi úvod do problému sloužící k získání intuitivní představy.

Úloha III. S ... integrály

- a) Spočítejte integrály funkcí $y = x^2 e^x$, $y = \sin^3 x \cos^2 x$.
 b) Určete obsah obrazce, který je ohraničen funkcemi $y_1 = \sqrt{|x|} + \sqrt{1 - |x|}$, $y_2 = \sqrt{|x|} - \sqrt{1 - |x|}$. Tento obrazec nakreslete.

řešení str. 91

Kapitola 4: Diferenciální rovnice

V druhém díle seriálu jsme si ukázali aplikaci derivací na výpočet extrému funkce. To je však jen malá část z možných využití diferenciálního počtu ve fyzice. Teprve v rukou fyzika znalého teorie diferenciálních rovnic se derivace stávají silným nástrojem pro řešení řady úloh z mnoha oborů fyziky. V mnoha případech totiž nedokážeme popsat zkoumaný děj přímo, ale pouze v řeči derivací. Tímto postupem pak dospějeme k rovnici pro neznámou závislost a její derivace – takzvanou *diferenciální rovnici*. Demonstrovat to můžeme například na následující úloze.

Do nádoby plné roztoku soli přitéká konstantní rychlostí čistá voda a stejnou rychlostí roztok odtéká (koncentrace je v celé nádobě stejná). Jak bude záviset koncentrace C soli v nádobě na čase? Pokud by měl roztok vytékající z nádoby stále stejnou koncentraci, bylo by řešení jednoduché. Koncentrace by lineárně klesala až do vyprázdnění (protože za jednotku času by z nádoby vyteklo vždy stejné množství soli). To však v našem případě neplatí. Koncentrace vytékajícího roztoku se však dá považovat za konstantní v průběhu velmi (infinitesimalně) krátkého časového intervalu dt . Změnu koncentrace za tento časový interval tedy můžeme spočítat jako

$$dC = -kC dt, \quad (30)$$

kde dC je změna koncentrace a k je kladná konstanta charakterizující rychlost výtoku roztoku. Mínus na pravé straně značí to, že koncentrace s časem klesá (tj. její změna je záporná). Tento vztah představuje již částečně rozřešenou diferenciální rovnici (v základním tvaru by měla

tvar $\dot{C} = -kC$). Řešit ji můžeme vydělením rovnice koncentrací C a integrací obou stran. Dostáváme

$$\ln C = -kt + A, \quad (31)$$

$$C = Be^{-kt}, \quad (32)$$

kde A je integrační konstanta a $B = e^A$. Hodnotu B můžeme určit ze znalosti počáteční koncentrace dosazením $t = 0$ tedy $B = C_0$. Vidíme, že koncentrace soli klesá exponenciálně.

Zavedme nyní několik užitečných pojmů. Řádem diferenciální rovnice budeme rozumět řád nejvyšší derivace vystupující v této rovnici (například rovnice $y''' + 3y' = 0$ je třetího řádu). Řekneme, že diferenciální rovnice je *lineární*, pokud platí, že součet jejích libovolných dvou řešení a násobek libovolného řešení konstantou je opět řešením. Dále dělíme diferenciální rovnice na *nehomogenní* a *homogenní* (s pravou stranou a bez pravé strany). V nehomogenní rovnici vystupuje kromě neznámé funkce ještě další (zadaná) funkce, která nehraje roli koeficientu (tedy není vynásobená neznámou funkcí ani žádnou její derivací). Tuto funkci pak většinou píšeme na pravou stranu znaménka = (odtud plyne alternativní název). Příkladem takové rovnice je $y'' + 4x^2y = \sin x$. V homogenní rovnici pak žádná takováto funkce nevystupuje. Pokud se v diferenciální rovnici vyskytují pouze obyčejné derivace, říkáme jí *obyčejná diferenciální rovnice*. V opačném případě pak mluvíme o *diferenciálních rovnicích parciálních*.

Pro získání představy o problematice uvedme stručný přehled základních typů diferenciálních rovnic a metod jejich řešení.

a) Diferenciální rovnice prvního řádu

Velmi často se setkáváme (viz motivační příklad) s rovnicemi typu

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)g(y(x)). \quad (33)$$

Takovou rovnici můžeme řešit takzvanou metodou *separace proměnných*. Princip této metody spočívá v tom, že s derivací můžeme většinou pracovat jako se zlomkem (díváme se na ni jako na podíl dvou malých přírůstků). Rovnici tedy můžeme vynásobit výrazem dx a vydělit funkcí $g(y)$. Dostáváme

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx, \quad (34)$$

což je rovnice se separovanými proměnnými (to znamená, že výrazy obsahující y jsou všechny na jedné straně rovnítko a výrazy obsahující x jsou všechny na druhé straně). Tuto rovnici můžeme řešit integrací obou stran. Pokud bychom chtěli integrovat rovnici v původním tvaru, dostali bychom na pravé straně integrál podle x z funkce závisující na $y(x)$. To znamená, že bychom pro provedení integrace museli funkci y , tedy hledané řešení, znát a tím bychom se dostali do „začarovaného“ kruhu.

Jako příklad uvedme výpočet závislosti koncentrace C chemikálie, která se účastní reakce řídicí se takzvanou kinetikou 2. řádu. Pro C pak platí

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2. \quad (35)$$

Rovnice se separovanými proměnnými má pak tvar

$$\frac{dC}{C^2} = -k dt. \quad (36)$$

Integrací obou stran dostáváme

$$-\frac{1}{C} = -kt + A, \quad (37)$$

kde A je integrační konstanta. Její hodnotu můžeme určit dosazením $t = 0$. Tím dostáváme $A = -1/C_0$ (C_0 značí počáteční koncentraci). Po úpravě dostáváme

$$C = \frac{C_0}{1 + C_0kt}. \quad (38)$$

b) *Metoda variace konstant a rovnice typu*

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x). \quad (39)$$

Příslušnou homogenní rovnici (případ $b = 0$) bychom dokázali vyřešit pomocí separace proměnných. Všimněte si, že pokud bychom našli jedno (takzvané *partikulární*) řešení rovnice (39), dokázali bychom již snadno sestavit obecné řešení přičtením obecného řešení příslušné homogenní rovnice. Toto tvrzení plyne z faktu, že rozdíl libovolných dvou řešení (39) řeší příslušnou homogenní rovnici (jako cvičení doporučujeme důkaz provést). *Obecným řešením* diferenciální rovnice myslíme funkci obsahující několik konstant (v našem případě jednu), jejichž vhodnou volbou dostaneme jakékoliv řešení. Tedy například vztah (38) představuje obecné řešení (pokud na C_0 pohlížíme jako na obecnou konstantu) rovnice (35). Dodejme ještě, že v obecném řešení diferenciální rovnice n -tého řádu musí vystupovat n konstant, neboť při jejím řešení musíme n krát integrovat.

A jak hledat partikulární řešení? Vydeme z řešení homogenní rovnice. To má vždy tvar

$$y = Ce^{-A(x)}, \quad (40)$$

kde C je libovolná konstanta a $A(x)$ je primitivní funkcí k $a(x)$ (vzpomeňte si třeba na motivační příklad). K tomuto tvaru snadno dospějeme řešením příslušné homogenní rovnice metodou separace proměnných. Jádro metody variace konstant spočívá v tom, že budeme předpokládat partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = C(x)e^{-A(x)}. \quad (41)$$

Předpokládáme tedy, že místo konstanty C vystupující v řešení homogenní rovnice, bude v partikulárním řešení vystupovat funkce. Problém nalezení partikulárního řešení se tedy redukuje na nalezení funkce $C(x)$. Dosazením y_p do rovnice (39) dostáváme po úpravě (označme $e^{-A(x)} = u(x)$)

$$C'u + Cu' + aCu = b, \quad (42)$$

$$C'u + C(u' + au) = b, \quad (43)$$

$$C' = \frac{b}{u}. \quad (44)$$

Pro funkci $C(x)$ tedy dostáváme jednoduchou diferenciální rovnici řešitelnou přímou integrací. Pro přehlednost zopakujeme postup ještě jednou. Nejprve jsme vyřešili příslušnou homogenní

rovnici metodou separace proměných. Dostali jsme řešení ve tvaru (40). Dále jsme předpokládali, že partikulární řešení bude mít tvar (41) a neznámou funkci $C(x)$ jsme určili dosazením y_p do původní (nehomogenní) rovnice. Tím jsme problém převedli na vyřešení rovnice (44). Obecné řešení pak je

$$y_o = C(x)u(x) + Ku(x), \quad (45)$$

kde K je libovolná konstanta. Postup si můžete procvičit na řešení rovnice $y' + 2xy = e^{-x^2} \cos x$ (obecné řešení je $y = (\sin x + K)e^{-x^2}$).

Poznámka: Metoda variace konstant se dá aplikovat i na složitější nehomogenní diferenciální rovnice, například na rovnice vyšších řádů v případě, že je příslušná homogenní rovnice lineární. V tomto případě ale hledáme sadu n funkcí, kde n je řád rovnice, které „vzniknou“ z n integračních konstant. Máme pro ně však jen jednu rovnici, kterou získáme dosazením variovaného řešení rovnice homogenní do nehomogenní. Tato volnost se v praxi odstraňuje dodefinováním dalších podmínek na tyto funkce tak, aby byla výsledná soustava rovnic co nejjednodušší. Můžete si sami vymyslet nehomogenní rovnici vyššího řádu a vyřešit ji. Pomocí variace konstant můžeme řešit také soustavy rovnic.

c) Homogenní lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnice typu (n v závorce v exponentu značí n -tou derivaci)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0. \quad (46)$$

Takovéto rovnice se dají řešit velmi jednoduše. Stačí předpokládat řešení ve tvaru $y(x) = e^{kx}$ (místo obratu „předpokládat řešení ve tvaru“ se můžete setkat i se slovem „ansatz“, jehož význam je obdobný) a dosazením zjistit přípustné hodnoty parametru k (takto převedeme diferenciální rovnici na takzvanou *charakteristickou rovnici*, což je rovnice polynomiální). Pokud bude mít charakteristická rovnice n různých kořenů k_1, \dots, k_n , můžeme obecné řešení psát ve tvaru

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + \dots + c_n e^{k_nx}, \quad (47)$$

kde c_1, \dots, c_n jsou konstanty. Postup můžeme demonstrovat na následující rovnici

$$y'' + 2y' - 3y = 0. \quad (48)$$

Po dosazení $y = e^{kx}$ a vydělení celé rovnice exponenciálou dostáváme

$$k^2 + 2k - 3 = 0. \quad (49)$$

Kořeny této (kvadratické) rovnice jsou $k_1 = 1$ a $k_2 = -3$. Obecné řešení (48) je tedy

$$y = c_1e^x + c_2e^{-3x}. \quad (50)$$

V případě, kdy má charakteristická rovnice alespoň jeden vícenásobný kořen, nemůže být (47) obecným řešením, protože by obsahovalo méně než n konstant. Předpoklad o tvaru řešení v tomto případě tedy není zcela správný. Dá se ukázat, že je-li k_j m -násobným kořenem charakteristického polynomu, pak rovnici (46) řeší kromě funkce e^{k_jx} také funkce $x^l e^{k_jx}$, $l = 1, \dots, m - 1$. Stačí dosadit do (46) exponenciálu vynásobenou mocninou funkce, použít Leibnitzovu formuli pro i -tou derivaci součinu dvou funkcí $(fg)^{(i)} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} f^{(j)} g^{(i-j)}$, (která

vypadá úplně stejně jako binomická věta), uvědomit si, že m -násobný kořen polynomu je zároveň kořenem i jeho 1. až $m - 1$ -té derivace, a důkaz je hotov. Obecně tedy při řešení (46) postupujeme tak, že nejprve předpokládáme řešení ve tvaru exponenciály, a pokud má charakteristická rovnice vícenásobné kořeny, doplníme do obecného řešení ještě příslušné exponenciály vynásobené obecným polynomem stupně $m - 1$, kde m je násobnost kořenu. Jako cvičení vyřešte rovnici $y''' - 3y'' + 4y = 0$ (řešením je $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + c_3e^{-x}$).

Poznámka: Stupeň charakteristického polynomu se rovná řádu diferenciální rovnice, takže při řešení rovnic řádu vyššího než druhého nastává problém s nalezením jeho kořenů (s trochou námahy je možné nalézt kořeny polynomu třetího a čtvrtého řádu, u polynomů vyššího řádu je to však již obecně nemožné a musíme přistoupit buď k hádání nebo k numerickým metodám). Naštěstí se však ve fyzice setkáváme s diferenciálními rovnicemi třetího a vyššího řádu jen velmi zřídka a u fyzikálně nemotivovaných diferenciálních rovnic (jako je ta poslední) se kořeny dají většinou uhodnout nebo nalézt metodou pokus omyl (protože tyto rovnice bývají sestaveny tak, aby se daly snadno řešit). Může se nám také stát, že kořeny charakteristického polynomu budou komplexní. To však ničemu nevádí. Stačí, když si vzpomenete na vzorec pro exponenciálu komplexního čísla z prvního dílu seriálu, a uvidíte, že v tomto případě dostaneme oscilující řešení (vyřešte si rovnici pro harmonický oscilátor $y'' + \omega^2y = 0$).

Metoda charakteristického polynomu využívá toho, že jsme „uhodli“ tvar řešení, a dosazením jsme pouze určili hodnoty parametrů k_i . Takovýto postup se dá aplikovat i na jiné typy diferenciálních rovnic. Otázkou však je, v jakém tvaru předpokládat řešení v jiných případech než u rovnic typu (46). V obecném případě můžeme hledat řešení ve tvaru Taylorova rozvoje

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k. \quad (51)$$

To vlastně není téměř vůbec žádný předpoklad, protože ve tvaru Taylorova rozvoje můžeme napsat celou řadu funkcí. Bohužel ne úplně každá funkce se rovná svému Taylorovu rozvoji. Jako příklad uveďme $y = |x|$ rozvinutou v okolí bodu $x = 1$, nebo zajímavější funkci $y = e^{-1/x^2}$ dodefinovanou v bodě $x = 0$ nulou (jako cvičení si nakreslete její graf), jejíž Taylorův rozvoj okolo bodu 0 je identicky nulová funkce – a ta se evidentně nerovná rozvíjené funkci v žádném bodě kromě nuly. Naštěstí však pro většinu normálních funkcí platí to, že se svému Taylorovu rozvoji rovnají alespoň na omezeném intervalu

Dosazením řady (51) do vyšetřované rovnice pak dostaneme opět mocninnou řadu, ale s jinými koeficienty. Ty se pak musí rovnat koeficientům Taylorova rozvoje pravé strany rovnice, což bývá často nula. Takto získáme (typicky rekurentní) vztah pro koeficienty a_k . Například řešením rovnice $y' - y = 0$ touto metodou dostáváme pro koeficienty a_k (z nulovosti koeficientu u x^j) podmínku $ja_{j+1} - a_j = 0$. Výsledkem je tedy řada pro funkci e^x , která evidentně řeší původní rovnici. Ne vždy však lze řadu pro řešení sečíst zpět na elementární funkci (elementární funkcí rozumíme například exponencialu, logaritmus, sinus atd.) tak, jako tomu bylo v posledním příkladě. To je ale svým způsobem výhoda, protože to znamená, že je tato metoda použitelná i v případech, kdy studovaná diferenciální rovnice nemá řešení mezi elementárními funkcemi (a takových případů je ve fyzice velmi mnoho). Navíc můžeme některé vlastnosti řešení (například chování pro velké argumenty) nahlédnout bez znalosti součtu příslušné řady pouze z vlastností jejich koeficientů.

Soustavy diferenciálních rovnic

Soustavou diferenciálních rovnic rozumíme soustavu rovnic svazující několik neznámých funkcí a jejich derivace. Uvedme malý příklad

$$\begin{aligned} f' &= 2f - g, \\ g' &= 4f - g. \end{aligned} \quad (52)$$

Nejjednodušší metoda řešení je převedení této soustavy na jednu diferenciální rovnici vyššího řádu (řád výsledné rovnice je roven počtu původních rovnic). V uvedeném příkladě to provedeme dosazením za $g = 2f - f'$ z první rovnice do druhé (dostáváme $g' = f' + 2f$), zderivováním první rovnice (dostáváme $f'' = 2f' - g'$) a dosazením za g' z druhé do první (zderivované) rovnice dostáváme

$$f'' - f' + 2f = 0. \quad (53)$$

Tuto rovnici již snadno vyřešíme metodou charakteristického polynomu. Funkci g pak dopočítáme například z první (nezderivované) rovnice dosazením f . Tato metoda se tedy podobá metodě řešení soustavy (algebraických) lineárních rovnic. Na rovnici (52) můžeme pohlížet také tak, že dvojice funkcí f, g tvoří složky vektoru. Rovnici bychom pak mohli napsat v řeči matic (pokud nevíte, jak se pracuje s maticemi, tak buď nahlédněte do příslušné literatury, nebo odložte čtení následujícího odstavce a vraťte se k němu až po přečtení příštího dílu seriálu, který bude pojednávat o lineární algebře)

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Označíme-li vektor $\mathbf{u} = (f, g)$ a příslušnou matici A , můžeme zapsat rovnici (52) v kompaktním tvaru

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u}. \quad (54)$$

Pokud by bylo A obyčejné číslo a \mathbf{u} obyčejná funkce, byla by řešením evidentně funkce $u = Ce^{Ax}$. Vězte, že řešení vypadá v případě, že \mathbf{u} je vektor a A je matice, úplně stejně. Otázkou je ovšem, co je to exponenciála matice. Ta je definována pomocí Taylorovy řady (narozdíl od exponenciály dokážeme mocninu matice spočítat přímo) jako

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad (55)$$

kde za nultou mocninu matice bereme takzvanou jednotkovou matici I (platí $I\mathbf{u} = \mathbf{u}$ pro každý vektor \mathbf{u}). Výpočet exponenciály matice z definice je však ve většině případů téměř neproveditelný (jak už to většinou bývá) a existují jednodušší způsoby. Jedním z nich je například převedení matice na takzvaný diagonální tvar, jehož exponenciála se dá spočítat velmi jednoduše.

Jinou možností je využití následující věty. Všimněte si, že věta platí i pro případ, kdy A je číslo a ne matice, protože na něj můžeme nahlížet jako na matici 1×1 . V tomto případě je platnost tvrzení jednoduchým důsledkem reziduové věty zmiňované v prvním díle seriálu.

$$e^A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z}{zI - A}, \quad (56)$$

kde Γ značí uzavřenou křivku v komplexní rovině obíhající spektrum matice A , ale to už poněkud přesahuje rámec našeho seriálu.

Úloha IV . S ... diferenciální rovnice

- a) Organizátor FYKOSu vypil velmi rychle láhev tvrdého alkoholu. Alkohol se z žaludku vstřebává do krve rychlostí úměrnou jeho množství (v žaludku) s konstantou úměrnosti α a z krve je odbouráván játry podle stejného vztahu, tentokrát však s konstantou úměrnosti β . Sestavte diferenciální rovnici popisující tyto děje, určete závislost množství alkoholu v krvi na čas, určete čas, ve kterém je koncentrace maximální, a vypočítejte ji.
- b) Šnek plazící se rychlostí $1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ se v čase t_0 postaví na začátek gumového lana dlouhého 1 m a začne se plazit. Ve stejném okamžiku se lano začne napínat rychlostí $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (je nekonečně pružné, takže nikdy nepraskne). Rozhodněte, zda šnek dosáhne konce lana v konečném čase a pokud ano, spočítejte, za jak dlouho se tak stane.
- c) Takzvaná redukovaná Gaussova rovnice má tvar

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$$

Předpokládejte řešení ve tvaru Taylorova polynomu, určete vztah pro jeho koeficienty a vyšetřete asymptotické chování řešení (tj. určete jakou funkci by se dalo vystihnout jeho chování pro velká x). Určete pro jaké hodnoty koeficientů γ a α je konečný tento integrál

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} F(\alpha, \gamma, x) dx,$$

kde $F(\alpha, \gamma, x)$ značí řešení Gaussovy rovnice (takzvaná redukovaná hypergeometrická funkce). Poznámka: Pokud označíme $E = -1/\alpha^2$, dostaneme z poslední rovnice pro E zajímavou podmínku. A pokud se vám při pohledu na ni začíná vybavovat vzorec pro možné hodnoty energie elektronu v atomu vodíku, pak vezte, že podobnost s vašim výsledkem není vůbec náhodná.

řešení str. 92

Kapitola 5: Lineární algebra

Narozdíl od předcházejících dílů, jejichž výsledky byly přímočaře aplikovatelné na řešení fyzikálních problémů, bude matematický aparát probraný v tomto díle o něco abstraktnější. Zdůrazníme také, že v tomto díle se kvůli zjednodušení výkladu dopustíme ještě více nepřesností než v dílech předcházejících.

Zaveďme nyní takzvaný *lineární vektorový prostor* (zkráceně vektorový prostor či jen prostor). Vektorový prostor je množina prvků, takzvaných *vektorů* (význam pojmu vektor je mnohem obecnější, než jen orientovaná úsečka v našem trojrozměrném euklidovském prostoru), na které jsou definovány operace sčítání dvou vektorů a násobení vektoru číslem. Pro vektorový prostor musí dále platit, že součet libovolných dvou prvků a násobek libovolného prvků číslem je opět prvkem tohoto prostoru - říkáme, že vektorový prostor je uzavřený vůči operaci sčítání a násobení. Na vektorové prostory jsou kladeny ještě další podmínky, které ale nejsou příliš důležité a ve většině případů jsou splněny.

Jednoduchým příkladem takového prostoru je „náš“ trojrozměrný prostor. Vektory jsou v tomto případě všem známé „špičky“, sčítání a násobení je definováno po složkách a to, že součet dvou vektorů či násobek vektoru číslem leží opět v tomto prostoru, je jasné (z definice vektorového prostoru ale vidíme, že pokud bychom tento prostor rozdělili například na dva „menší prostory“ rovinou procházející počátkem souřadné soustavy, pak by tyto prostory díky

neuzavřenosti na násobení zápornými čísly nebyly vektorovými prostory). Tento prostor je standardně označován \mathbb{E}^3 . Jiným příkladem vektorového prostoru je množina všech polynomů nejvýše n -tého stupně (polynomem n -tého stupně rozumíme funkci $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, kde a_k jsou konstanty). Polynomy můžeme jednoduše sčítat i násobit číslem a výsledek těchto operací je opět polynom nejvýše n -tého stupně (příklad pro $n = 2$, součet vektorů $v_1 = 3x^2 - 4x + 5$ a $v_2 = -3x^2 + 2$ je $v_1 + v_2 = -4x + 7$). Jako poslední příklad uveďme vektorový prostor uspořádaných n -tic reálných čísel (sčítání a násobení je definováno po složkách). Takovýto prostor bývá standardně označován jako \mathbb{R}^n . Jako cvičení vymyslete další příklady vektorových prostorů.

Pro další výklad budeme potřebovat následující pojmy. *Lineární kombinací* vektorů v_1, \dots, v_k budeme rozumět výraz $\sum_{i=1}^k a_i v_i$, kde a_i jsou čísla, takzvané koeficienty lineární kombinace (lineární kombinace vektorů je opět vektor). O vektorech v_1, \dots, v_n řekneme, že jsou *lineárně nezávislé*, pokud nelze žádný z těchto vektorů vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních (tedy pokud je nějaká lineární kombinace všech těchto vektorů nulová, pak musí být nulové všechny její koeficienty).

Dalším důležitým pojmem je *báze vektorového prostoru*. Z každého vektorového prostoru V můžeme vždy vybrat několik vektorů v_1, \dots, v_n tak, aby se dal libovolný vektor tohoto prostoru vyjádřit jako jejich lineární kombinace. Pokud jsou vektory v_1, \dots, v_n navíc lineárně nezávislé, řekneme, že tvoří bázi prostoru V . Například za bázi „našeho“ trojrozměrného prostoru můžeme zvolit tři vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ délky jedna, rovnoběžné se souřadnými osami kartézské souřadné soustavy. V případě prostoru polynomů nejvýše třetího stupně budou bázi například funkce $x^3, x^2, x, 1$ ale můžeme zvolit i jinou bázi jako $x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1, 1$ (ověřte, že tyto funkce splňují požadavky kladené na bázi).

Počet prvků báze pak udává takzvanou *dimenzi* vektorového prostoru (podle takzvaného Steinitzova lemmatu má každá báze vektorového prostoru stejný počet prvků). Tedy například „náš“ prostor má dimenzi 3 a prostor polynomů nejvýše třetího stupně má dimenzi 4 a prostor všech pětice reálných čísel má dimenzi 5. (Na prostorech dimenze vyšší než 3 není vůbec nic „mystického“. Nemusíte si je nijak představovat, stačí, když víme, jak s nimi počítat). Každý vektor z n -dimenzionálního prostoru tedy můžeme popsat n -tíci čísel představujících koeficienty u jednotlivých prvků báze (díky tomu jsou všechny prostory o stejné dimenzi jistým způsobem ekvivalentní). Těmto číslům říkáme složky či souřadnice vektoru v dané bázi.

Na některých vektorových prostorech můžeme zavést takzvaný *skalární součin*. Skalární součin je zobrazení, které dvojici vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} z prostoru V přiřadí číslo (značíme $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$) a splňuje následující podmínky

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z},$$

$$(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}},$$

$$(\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$$

(pruhem zde značíme komplexní sdružení – na reálných prostorech je tedy skalární součin komutativní). Například na „našem“ prostoru můžeme skalární součin dvou vektorů zadaných v kartézské bázi spočítat jako $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, kde a_i, b_i jsou jejich souřadnice. Na prostoru \mathbb{R}^n se pak skalární součin počítá jako $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, kde a_i, b_i jsou souřadnice násobených vektorů v bázi tvořené vektory $(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), (0, 0, 1, \dots), \dots$. Možností jak definovat

skalární součin máme více, ale všechny jsou jistým způsobem ekvivalentní. Dodejme ještě, že délku (jinak normu) vektoru můžeme spočítat jako $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

Věnujme nyní pozornost *lineárním zobrazením* (jinak také *lineárním operátorům*) na vektorovém prostoru V . Lineární zobrazení A na prostoru V je zobrazení, které každému vektoru $x_1 \in V$ přiřadí vektor $x_2 \in V$ (píšeme $A : V \rightarrow V$) a splňuje následující podmínky

$$(\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad A(\alpha x) = \alpha A(x), \quad (57)$$

$$(\forall x_1, x_2 \in V) \quad A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2). \quad (58)$$

Zvolíme-li na prostoru V nějakou bázi, bude každý vektor popsán n -tíci čísel (souřadnic). Dá se ukázat, že každé lineární zobrazení se dá popsat pomocí n^2 čísel A_{ij} , kde $i, j = 1, \dots, n$ (jejich hodnoty závisí na volbě báze) tak, že souřadnice vzoru a_1, \dots, a_n a obrazu b_1, \dots, b_n jsou svázány vztahem

$$b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} a_j. \quad (59)$$

Veličiny A_{ij} , kde $i, j = 1, \dots, n$ nazýváme *matice* a zapisujeme je do čtvercové tabulky tak, že hodnota a_{nm} je zapsána v n -tém řádku a m -tém sloupci. Například matici $A_{11} = 1, A_{12} = -2, A_{21} = 2, A_{22} = 3$ zapíšeme jako

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Souřadnice vektoru pak obvykle zapisujeme do sloupce. Výsledek působení zobrazení A na vektor \mathbf{a} spočítáme podle (59), což v tomto druhu značení znamená, že i -tou souřadnici výsledku získáme „skalárním vynásobením“ i -tého řádku matice s vektorem \mathbf{a} (nejedná se skutečný skalární součin, ale formálně vypadají tyto operace stejně). Takovýto proces pak nazýváme násobením matice vektorem. Například součin matice (60) s vektorem o souřadnicích $(-5, 6)$ bude (při násobení zapisujeme vektor na pravou stranu matice)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) \\ -5 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Stejně jako vektory můžeme i matice sčítat a násobit čísly. Sčítání matic a násobení matice číslem je definováno po složkách, tedy například

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

To, že je rozumné definovat tyto operace právě takto, můžeme odůvodnit tím, že součet matic A a B odpovídajících zobrazením Z_A a Z_B je díky této definici matice odpovídající zobrazení $Z_A + Z_B$, což je výsledek, který od sčítání matic „očekáváme“ (ověřte). Matice však můžeme také násobit. Součin dvou matic A, B je definován jako

$$C_{kj} = \sum_i A_{ki} B_{ij} \quad (64)$$

(součin dvou matic je opět matice). Tato definice je motivována tím, že požadujeme, aby součin dvou matic byla matice odpovídající složení příslušných zobrazení. Skutečně, můžeme psát

$$\beta_k = \sum_i A_{ki} \left(\sum_j B_{ij} \alpha_j \right) = \sum_j \left(\sum_i A_{ki} B_{ij} \right) \alpha_j. \quad (65)$$

Odtud vidíme, že postupné násobení vektoru \mathbf{a} maticemi B a A je ekvivalentní jeho vynásobení jednou maticí C danou vzorcem (64).

Zapišeme-li násobené matice A, B jako tabulky, získáme prvek ležící na n -tém řádku a m -tém sloupci jejich součinu tak, že „skalárně vynásobíme“ n -tý řádek A s m -tým řádkem B (poloha maticového elementu, který tímto způsobem spočítáme, je stejná jako poloha průsečíku příslušného řádku a sloupce). Raději než definici (64) si zapamatujte pravidlo „řádek krát sloupec“ (které se velmi podobá pravidlu pro násobení matice a vektoru). Jako cvičení ověřte následující rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 & 9 \\ 10 & 20 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Všimněte si, že matice A a B nehrají při jejich násobení stejnou roli (vždy násobíme řádek první matice se sloupcem druhé matice). Díky tomu je násobení matic *nekomutativní*. To znamená, že součin AB se obecně nerovná součinu BA . O tom se můžeme přesvědčit na následujícím příkladě (ověřte)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

„Mírou nekomutativity“ dvou matic je jejich *komutátor*. Ten je definován jako $[A, B] = AB - BA$. Například komutátor matic z (67) je

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Pokud je komutátor dvou matic nulová matice (všechny její prvky jsou nulové), říkáme, že tyto matice komutují.

Zaveďme nyní několik užitečných pojmů. Matice je *regulární*, pokud každý nenulový vektor zobrazí opět na nenulový vektor. V opačném případě říkáme, že je matice *singulární* (analogicky můžeme regularitu definovat takto; matice je regulární, pokud je dimenze prostoru obrazů všech vektorů z prostoru V stejná jako dimenze V).

Jednotková matice je matice, která pro všechny vektory \mathbf{u} splňuje vztah $\mathbb{I}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ (kromě symbolu \mathbb{I} se jednotková matice někdy označuje také jako \mathbb{E} či $\mathbf{1}$). Jakýkoliv vektor se tedy při vynásobení jednotkovou maticí nezmění. Jednotková matice vypadá ve všech bázích stejně, a to (n je dimenze prostoru)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_n$$

Násobení jednotkovou maticí nezmění kromě vektoru ani libovolnou matici (násobení matic je zavedeno tak, aby odpovídalo složení dvou zobrazení).

Matici *inverzní* k matici A nazýváme takovou maticí A^{-1} , pro kterou platí $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$. Matice inverzní k matici A však neexistuje vždy, ale pouze tehdy, je-li A regulární. Pro výpočet inverzní matice existuje jednoduchý algoritmus. Vyjdeme z toho, že rovnost $AB = C$ zůstane zachována, pokud provedeme stejné řádkové úpravy na maticích A a C (například přičteme n -tý řádek matice A k jejímu m -tému řádku a zároveň přičteme n -tý řádek matice C k jejímu m -tému řádku, dále můžeme řádky prohazovat a násobit konstantami). Tedy pokud zapíšeme rovnost $AA^{-1} = \mathbb{I}$, (A je zadaná matice) můžeme simultánně upravovat A a jednotkovou matici na pravé straně za zachování rovnosti. Pokud provádíme tyto úpravy tak, že z matice A „vyrobíme“ jednotkovou matici, dostáváme $\mathbb{I}A^{-1} = B$, kde B je matice získaná úpravami \mathbb{I} . Při pohledu na poslední vzorec vidíme, že právě B je hledaným výsledkem ($B = \mathbb{I}A^{-1} = A^{-1}$). Postup si ukážeme na následujícím příkladě

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Správnost výsledku snadno ověříme vynásobením (provedte)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jako cvičení si vymyslete matici 3×3 a invertujte ji (pokud nebude inverze možná, zvolili jste singulární matici).

Řekneme, že matice A je *symetrická*, pokud platí $A_{ij} = A_{ji}$. Pokud platí $A_{ij} = -A_{ji}$, řekneme, že A je *antisymetrická*.

Transpozicí matice A rozumíme matici A^T vzniklou z A přehozením řádků a sloupců (tedy $A_{ij} = A_{ji}^T$). V „tabulkovém“ zápisu odpovídá transpozici „otočení“ matice okolo její diagonály (diagonální prvky matice jsou ty, které leží na „spojnici“ levého horního a pravého dolního rohu). Symetrická matice se při transpozici nezmění, transpozice antisymetrické matice je ekvivalentní jejímu vynásobení číslem -1 .

Velmi důležité jsou pojmy *vlastní číslo* a *vlastní vektor* matice (je na nich vybudována celá kvantová mechanika). Vlastní vektor matice A je každý nenulový vektor \mathbf{v} takový, že platí $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Číslo λ pak říkáme vlastní číslo matice A . Například jednotková matice má jediné vlastní číslo 1 a každý (nenulový) vektor je jejím vlastním vektorem. Naznačme postup výpočtu vlastních čísel. Rovnost $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ jistě zůstane zachována, i pokud její pravou stranu vynásobíme jednotkovou maticí. Tím dostáváme $A\mathbf{v} = \mathbb{I}\lambda\mathbf{v}$. Dále můžeme tento výraz upravit takto $A\mathbf{v} - \mathbb{I}\lambda\mathbf{v} = (A - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v} = 0$. Hledáme tedy taková λ , pro která je matice $A - \lambda\mathbb{I}$ singulární (musí zobrazit nenulový vektor \mathbf{v} na nulový). Matice je singulární právě tehdy, když je nulový její *determinant*. Determinanty se nebudeme blíže zabývat. Uvedme pouze, že se jedná o zobrazení které každé matici přiřadí číslo. Pro matici 2×2 ho spočteme jako $\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ a pro matici 3 (podle takzvaného Sarrusova pravidla) jako $\det A = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32}$. Díky tvaru determinantu se tak problém hledání vlastních čísel matice $n \times n$ převede na hledání kořenů polynomu n -tého stupně. Vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_i pak nalezneme jako

prvky jádra matice $A - \lambda_i \mathbb{I}$. (Jádro matice je množina všech vektorů, které se působením této matice vynulují (je dalším příkladem vektorového prostoru). Singularita matice $A - \lambda_i \mathbb{I}$ nám zaručuje to, že jeho dimenze bude alespoň 1).

Na začátku výkladu jsme zdůraznili, že matice odpovídající danému zobrazení vypadá různě v různých bázích. Stručně popišme, jak ze znalosti matice v jedné bázi spočteme její tvar v bázi jiné. Předpokládejme, že známe matici A v bázi tvořené vektory $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, a zajímá nás její vyjádření v bázi $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, přičemž známe vztah svazující vektory staré a nové báze $\varphi_i = C_{i1}\varepsilon_1 + \dots + C_{in}\varepsilon_n$. Koeficienty C_{ij} tvoří takzvanou *matici přechodu* od báze ε_i k bázi φ_i . Vektor ve staré bázi \mathbf{v} pak získáme z vektoru \mathbf{v}' v bázi nové jako $\mathbf{v} = C\mathbf{v}'$ (rozmyslete). Nyní můžeme postupovat takto: Vektor v nové bázi můžeme převést do báze staré působením matice C . Ve staré bázi provedeme lineární zobrazení vynásobením maticí A . Obdržený výsledek ještě musíme převést zpět do nové báze, což provedeme vynásobením maticí C^{-1} . Výsledkem je tedy vektor $C^{-1}AC\mathbf{v}'$. Odtud vidíme, že matice A bude mít v nové bázi tvar

$$A' = C^{-1}AC.$$

Ríkáme, že matice A a A' jsou *podobné*. Jako cvičení si rozmyslete, proč mají podobné matice stejná vlastní čísla a proč vypadá jednotková matice ve všech bázích stejně.

Ukažme si nyní několik jednoduchých aplikací. Pomocí matic můžeme elegantně popsat rotace vektorů v rovině a v („našem“) prostoru (rotace je lineární zobrazení). Začneme popisem rotací v rovině. Pro popis vektorů použijeme kartézský systém souřadnic (tomu odpovídá volba báze tvořené dvěma kolmými vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ délky 1 rovnoběžnými se souřadnými osami). Každý vektor \mathbf{v} tedy bude popsán souřadnicemi x, y . Zajímá nás, jaké budou souřadnice vektoru \mathbf{v}' vzniklého rotací \mathbf{v} o úhel φ . Z obrázku snadno zjistíme, že vektor \mathbf{e}_1 (o souřadnicích $(1, 0)$) se při otočení o úhel φ proti směru hodinových ručiček změní na vektor o souřadnicích $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Vektor \mathbf{e}_2 (jeho souřadnice jsou $(0, 1)$) se při této rotaci změní na $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$. Protože vektor \mathbf{v} o souřadnicích (x, y) můžeme napsat jako $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, budou složky otočeného vektoru \mathbf{v}' (díky linearitě rotace) $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$. Rotaci o úhel φ v rovině tedy odpovídá matice

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Jako cvičení vynásobte dvě matice odpovídající rotacím o úhly α a β , interpretujte výsledek (viz motivace pro definici násobení matic) a na jeho základě odvoďte součtové vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$ (obdržené výsledky porovnejte s tabulkami).

Při konstrukci matic popisujících rotace v prostoru můžeme postupovat analogicky. Například matice pro rotaci okolo osy z bude mít tvar

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice popisující rotace okolo os x a y si spočítejte sami.

Jinou jednoduchou „fyzikální“ aplikaci nachází výše nastíněný matematický aparát v geometrické optice. V dalším se omezíme na takzvanou „paraxiální“ aproximaci, tedy budeme uvažovat jen paprsky v blízkosti optické osy, které s ní svírají malý úhel. Pro malé úhly φ platí $\varphi \sim \sin \varphi \sim \tan \varphi$, o čemž se můžete snadno přesvědčit pomocí kalkulačky (úhly měříme

v radiánech). Vyšetřujeme chod paprsku soustavou centrovaných čoček. Paprsek popíšeme vektorem, jehož první složka bude odpovídat vzdálenosti paprsku od osy (v daném místě) a druhá složka bude odpovídat úhlu, který svírá s optickou osou (tento vektor není vektor směru šíření paprsku, ale jakýsi „stavový“ vektor, kterým popisujeme stav paprsku v daném bodě optické osy). Šíření paprsku prostředím pak můžeme popsat pomocí násobení „stavového vektoru“ maticemi. Chod paprsku prostředím délky a bez lámavých ploch můžeme popsat násobením maticí (nezapomeňte, že používáme paraxiální aproximaci)

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tvar této matice vyplývá z toho, že úhel svíraný paprskem a osou se nezmění a vzdálenost paprsku od osy se změní o $x' - x = a \tan \varphi \sim a\varphi$. Při průchodu z prostředí o indexu lomu n_1 do prostředí o indexu lomu n_2 oddělených lámavou plochou o poloměru R (poloměr budeme považovat za kladný, pokud leží její střed vpravo od této plochy (paprsek se šíří zleva)) se pak „stavový“ vektor paprsku transformuje maticí (rozmyslete)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1}{n_2} & \frac{n_1 - n_2}{Rn_2} \end{pmatrix}.$$

Chod paprsku libovolnou soustavou čoček tedy můžeme popsat násobením stavového vektoru maticemi. Díky nekomutativitě maticového násobení je nutné matice násobit ve správném pořadí, odpovídajícímu pořadí průchodu paprsku jednotlivými částmi soustavy (například při záměně pořadí násobení dvou matic odpovídajících průchodu plochami o poloměrech R a $-R$ dostaneme matici odpovídající tenké rozptylce místo tenké spojky).

Na posledním místě stručně vysvětlíme využití matic při popisu setrvačných vlastností tělesa. Není pravdou (jak bývá často chybně uváděno), že moment hybnosti rotujícího tělesa \mathbf{L} má v obecném případě stejný směr jako vektor jeho úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}$. Dá se ukázat, že existuje lineární transformace, svazující vektor \mathbf{L} v bázi spojené s rotujícím tělesem, s vektorem $\mathbf{\Omega}$ popsaná maticí I ($\mathbf{L} = I\mathbf{\Omega}$)-takzvaným *tenzorem setrvačnosti*, která má pro hmotný bod tvar

$$I = \begin{pmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_2 r_1 & r_1^2 + r_3^2 & -r_2 r_3 \\ -r_3 r_1 & -r_3 r_2 & r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix},$$

kde r_i jsou složky polohového vektoru tohoto bodu. Pro obecné těleso bychom tenzor setrvačnosti spočítali pomocí objemového integrálu. Nerovnoběžnost vektorů \mathbf{L} s vektorem $\mathbf{\Omega}$ způsobuje to, že pokud roztočíme obecně „šišaté“ těleso kolem osy procházející jejím těžištěm, bude to s osou „házet“ (v prostoru vektor \mathbf{L} obíhá po kuželi, takže pro udržení polohy osy na ni musíme působit podle druhé impulsové věty nenulovým a navíc nekonstantním momentem síly). Existují však význačné směry, takzvané *hlavní směry momentu setrvačnosti*. Jedná se o směry dané nám již známými vlastními vektory tenzoru setrvačnosti. Při rotaci okolo osy dané jedním z vlastních směrů platí, že $\mathbf{L} = \lambda\mathbf{\Omega}$ (viz. definice vlastních vektorů). Vektor \mathbf{L} je v tomto případě konstantní, takže těleso rotuje bez „házení“. Symetrie tenzoru setrvačnosti pak zaručuje kolmost vlastních směrů. Díky tomu se dá každé těleso co do setrvačných vlastností nahradit homogenním elipsoidem. Symetrie tohoto elipsoidu pak vždy vystihuje symetrii původního tělesa. Zajímavým důsledkem tohoto faktu je to, že krychle a pravidelný čtyřstěn mají stejné setrvačné vlastnosti jako koule, tedy mají stejné momenty setrvačnosti vůči všem osám procházejícím těžištěm. A pokud vám až dosud připadala lineární algebra jako zbytečné

hraní s tabulkami čísel, spočítejte si moment setrvačnosti krychle a čtyřřetěnu vůči libovolné ose pomocí objemového integrálu.

Úloha V. S ... algebra

- a) Dokažte, že vektory $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ jsou lineárně závislé.
 b) Vyřešte následující soustavu diferenciálních rovnic pomocí výpočtu exponenciály matice

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diskutujte tvar trajektorie řešení v rovině x, y v závislosti na znaménku parametrů a, b .

Nápověda: Zjistěte zda „náhodou“ neexistuje jistá podobnost mezi maticí této soustavy a komplexním číslem $a + bi$ a vzpomeňte si na vzorec pro exponenciálu komplexního čísla z prvního dílu seriálu.

- c) Napište matice R_1, R_2, R_3 popisující prostorové rotace o úhel $\pi/2$ okolo os x, y a z a spočítejte komutátory $[R_1, R_2]$, $[R_1, R_3]$ a $[R_2, R_3]$.

Jako nepovinný bonus se můžete pokusit své výsledky zapsat v jednotném tvaru pomocí takzvaného *Levi-Civittova* ε [čti: levičivitova]. Levi-Civittovo ε je symbol se třemi indexy ε_{ijk} , $i, j, k = 1, 2, 3$, který nabývá následujících hodnot: Mají-li alespoň dva z jeho indexů stejnou hodnotu, je $\varepsilon_{ijk} = 0$. Dále $\varepsilon_{123} = 1$ a pro všechny ostatní permutace indexů $(1, 2, 3)$ získáme jeho hodnotu tak, že vyjdeme z posloupnosti $1, 2, 3$, kterou budeme postupně modifikovat přehazováním poloh čísel (např. $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3)$) a to tak dlouho, dokud nedospějeme k permutaci indexů, která nás zajímá. Pokud byl počet kroků (přehození dvou čísel) sudý, bude $\varepsilon_{ijk} = 1$ a v opačném případě je $\varepsilon_{ijk} = -1$ (jedná se o totálně antisymetrický tenzor třetího řádu).

řešení str. 95

Kapitola 6: Vícerozměrné integrály

Ve třetím díle jsme si ukázali, jak počítat integrály funkcí jedné proměnné. Také jsme si řekli, že integrovat musíme vždy, když chceme nějakým způsobem sčítat infinitezimálně malé příspěvky. Například když chceme znát hmotnost salámu, který má v každém místě jiný průřez p , musíme tento salám myšlenkově rozkrájet na velmi (infinitezimálně) tenké plátky tloušťky dx a sečíst (zintegrovat) hmotnosti těchto plátek. Je-li hustota salámu ρ a jeho délka l , bude jeho hmotnost $m = \int_0^l \rho p(x) dx$.

Obdobným způsobem však často musíme sčítat (integrovat) „infinitezimálně malé“ příspěvky rozložené nikoliv jen na přímce, ale v nějakém objemu nebo ploše. V tomto díle si ukážeme, jak takovéto integrály počítat.

Pro začátek uveďme jednoduchý příklad. Podobně, jako jsme spočítali hmotnost salámu, můžeme spočítat například hmotnost čtvercového plechu, který má v každém bodě jinou tloušťku. V tomto případě ale budeme sčítat hmotnosti malých elementů rozložených po ploše. Zaveďme si souřadnice tak, aby jeden roh plechu ležel v bodě $(0, 0)$ a aby byly souřadné osy rovnoběžné s jeho stranami. Délka jeho strany je 1 , jeho hustota je ρ a závislost tloušťky na poloze je dána funkcí $d = 10 + x^2 - xy^2$. Plech si můžeme myšlenkově rozdělit na tenké proužky šířky dx rovnoběžné s osou y . Každý z těchto proužků pak můžeme rozdělit na malé čtverečky o délce stran dx a dy . Celkovou hmotnost pak spočítáme tak, že nejprve spočítáme hmotnost jednoho proužku s danou x -ovou souřadnicí (integrací funkce d podle proměnné y ,

přičemž budeme považovat x za konstantu) a poté sečteme hmotnosti těchto proužků (říkáme, že integrujeme funkci $d(x, y)$ přes čtverec). Hmotnost proužku ležícího v bodě x širokého dx je

$$dm = \varrho \left[\int_0^1 (10 + x^2 - xy^2) dy \right] dx = \varrho \left(10 + x^2 - \frac{1}{3}x \right) dx. \quad (69)$$

Nyní sečteme hmotnosti jednotlivých proužků integrací přes x a dostaneme výslednou hmotnost

$$m = \varrho \int_0^1 \left(10 + x^2 - \frac{1}{3}x \right) dx = \varrho \left(10 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \varrho \left(10 + \frac{1}{6} \right). \quad (70)$$

Hmotnost plechu samozřejmě nezávisí na způsobu, jakým jsme si ho myšlenkově „rozkrájeli“. Mohli bychom tedy postupovat také tak, že bychom nejprve spočítali hmotnost proužku rovnoběžného s osou x a poté sečetli hmotnosti těchto proužků. Skutečně, tímto postupem dostaneme

$$m = \varrho \int_0^1 \left[\int_0^1 (10 + x^2 - xy^2) dx \right] dy = \varrho \int_0^1 \left(10 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \varrho \left(10 + \frac{1}{6} \right), \quad (71)$$

což je stejný výsledek jako (70).

Obecně pokaždé, když počítáme vícerozměrný integrál, si oblast přes kterou integrujeme (například čtverec z minulého příkladu) vhodným způsobem rozdělíme na elementární „buňky“ a celý integrál pak spočítáme postupně pomocí obyčejných jednorozměrných integrálů. Výsledek přirozeně nezávisí na tom, jak jsme oblast rozdělili a v jakém pořadí počítáme jednotlivé integrály.

Ne vždy je ale situace tak jednoduchá jako v minulém příkladu. V něm jsme totiž integrovali přes čtverec, takže meze jednotlivých integrálů byly pevné (0,1). Pokud ale integrujeme přes složitější oblast, jsou meze jednotlivých integrálů obecně závislé na souřadnicích. Jak řešit takovéto problémy si ukážeme na dalším příkladě. Uvažujme opět plech z prvního příkladu. Tentokrát ho však rozříznem podél uhlopříčky spojující rohy o souřadnicích (1, 0) a (0, 1) a budeme počítat hmotnost pouze jednoho z takto vzniklých trojúhelníků (například (1, 0), (0, 0) a (0, 1)). Ten si opět myšlenkově rozdělíme na tenké proužky šířky dx rovnoběžné s osou x . Tyto proužky ale nebudou všechny stejně dlouhé. Délka proužku ležícího v pásu $x, x + dx$ je $1 - x$ a jeho hmotnost je tedy dána integrálem přes y .

$$dm = \varrho \left(\int_0^{1-x} 10 + x^2 - xy^2 dy \right) dx = \left(10(1-x) + x^2(1-x) - \frac{1}{3}x(1-x)^3 \right) \quad (72)$$

Celková hmotnost plechu pak bude součtem hmotností všech těchto proužků

$$m = \varrho \int_0^1 \left(10(1-x) + x^2(1-x) - \frac{1}{3}x(1-x)^3 \right) dx = 4 + \frac{11}{15}. \quad (73)$$

Rozhodně doporučujeme při výpočtu jakéhokoliv vícerozměrného integrálu kreslit obrázky – pomohou vám při rozhodování o tom, jak je výhodné dělit integrační oblast a jak závisí meze jednotlivých integrálů na souřadnicích. Jako cvičení si můžete spočítat hmotnost tohoto plechu tak, že si ho rozdělíte na proužky rovnoběžné s jeho přeponou a poté sečtete jejich hmotnosti (doporučujeme si v tomto případě natočit souřadné osy kartézských souřadnic tak, aby byla přepona rovnoběžná s jednou z těchto os). Zdůrazníme ještě, že ačkoliv výsledek vícerozměrné integrace nezávisí na pořadí provedení jednotlivých jednorozměrných integrací, dostali bychom

například prohozením pořadí integrací (72) a (73) (bez dodatečných úprav) chybný výsledek. Meze integrálu (72) totiž závisí na proměnné x , takže pokud bychom bezmyslenkovitě provedli nejprve integraci podle x , zůstala by tato proměnná v horní mezi integrálu podle y a dostali bychom tak nesmyslný výraz. Pořadí integrací tedy přehazovat můžeme, ale musíme je provést správným způsobem. Pamatujte si, že pokud integrujete podle nějaké proměnné, pak se tato proměnná nesmí vyskytovat v žádné z mezí, ale pouze ve funkci kterou integrujeme.

Důležitou aplikací vícerozměrných integrálů je výpočet objemů, povrchů a obsahů těles. Objem (povrch, obsah) tělesa spočítáme jednoduše tak, že zintegrujeme funkci 1 přes zkoumaný objem (povrch, obsah, ...). Ověříme například známý vztah pro obsah kruhu o poloměru R . Kruh si rozdělíme na tenké proužky šířky dx rovnoběžné s osou y . Obsah celého kruhu pak spočítáme tak, že nejprve spočítáme obsah jednoho proužku a poté tyto obsahy sečteme. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} S &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, dy \right) dx = \\ &= 2 \int_0^R 2\sqrt{R^2-x^2} \, dx = 4 \int_0^{\pi/2} R^2 \cos^2 t \, dt = \pi R^2. \end{aligned} \quad (74)$$

Při integraci jsme mohli změnit meze vnějšího integrálu, protože obsah kruhu je dvojnásobkem obsahu půlkruhu (pokud bychom počítali integrál v nezměněné podobě, dostali bychom se do problémů s monotonií substituující funkce), a dále jsme zavedli substituci $x = R \sin t$. Pokud bychom chtěli počítat například objem koule, museli bychom ji rozřezat nejprve na tenké kruhy a tyto kruhy bychom dále rozdělili stejným způsobem jako v předchozím příkladě. Celkový objem by pak byl dán integrálem (počítáme objem pouze jedné osminy koule, který násobíme osmi)

$$V = 8 \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dy \right) dx. \quad (75)$$

Jako cvičení dopočítejte tento integrál. Můžete si také spočítat objem čtyřrozměrné koule zobecněním výše uvedeného postupu. Doporučujeme opět spočítat pouze objem jedné šestnáctiny této koule ležící v prvním kvadrantu. Pokud se doberete k číslu $\pi^2 R^4/2$, postupovali jste správně.

Vraťme se nyní na chvíli k obyčejným integrálům a ukažme si, jak spočítat délku křivky dané grafem nějaké funkce $y(x)$. K tomu potřebujeme znát délku elementu této křivky ležícího v pásu $x, x + dx$. Tento element můžeme díky malosti dx považovat za příčný a jeho délku spočítat pomocí Pythagorovy věty. Domyslíme si k němu dvě odvěsny rovnoběžné se souřadnými osami, přičemž jedna z těchto odvěsen bude mít délku dx a délka druhé bude odpovídat přírůstku dy funkční hodnoty funkce y na intervalu dx . Tento přírůstek snadno spočítáme jako $dy = y' dx$. Délka elementu naší křivky tedy bude $dl = \sqrt{(dx)^2 + (y' dx)^2} = dx \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$. Délka úseku křivky ležícího mezi body $x = a$ a $x = b$ pak bude

$$l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx. \quad (76)$$

Analogicky bychom mohli spočítat, že povrch elementární plošky vyřiznutý z plochy dané funkcí $f(x, y)$ ležící nad obdélníčkem dx, dy je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy. \quad (77)$$

Pro demonstraci spočítejme povrch plochy ležící nad čtvercem s vrcholy o souřadnicích $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, která je dána funkcí $f(x, y) = 2(x^{3/2} + y^{3/2})/3$. Parciální derivace f podle x a y jsou $\partial f/\partial x = \sqrt{x}$, $\partial f/\partial y = \sqrt{y}$. Dosazením do (77) dostáváme pro velikost elementární plošky $dS = \sqrt{1 + |x| + |y|}$ (na absolutní hodnoty můžeme v dalším zapomenout) a celkový povrch je tedy

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + x + y} \, dx \, dy = \frac{2}{3} \int_0^1 \left[(2 + y)^{3/2} - (1 + y)^{3/2} \right] dy = \\ &= \frac{4}{15} \left(3^{5/2} - 22^{5/2} + 1 \right) \approx 1,41. \end{aligned} \quad (78)$$

Z předcházejících příkladů je patrné, že použití kartézských souřadnic je při výpočtu některých vícerozměrných integrálů nevýhodné (meze jednotlivých integrálů vyjádřené v těchto souřadnicích jsou složité). Často se proto využívá jiných souřadných systémů. Z nich jsou nejběžnější polární a sférické souřadnice. Polární souřadnice popisují bod v rovině pomocí parametrů značených r a φ . Jejich význam je vzdálenost bodu od počátku souřadné soustavy a úhel, který svírá průvodič (vektor mířící na tento bod) s pevně daným směrem (zpravidla daným osou x). Pomocí sférických souřadnic r, ϑ, φ , po řadě značících vzdálenost bodu od počátku souřadné soustavy, úhel, který svírá průvodič s osou z , a úhel, který svírá projekce průvodiče do roviny xy s osou x , pak popisujeme polohu bodu v prostoru. Při použití jiných, než kartézských souřadnic (označme je q_1, \dots, q_n) však objem oblasti vymezené souřadnicemi $(q_1, q_1 + dq_1), \dots, (q_n, q_n + dq_n)$ není $dV = dq_1 dq_2 \dots dq_n$. Například při použití polárních souřadnic je element plochy dán výrazem $dS = r dr d\varphi$ a v souřadnicích sférických je element objemu $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$. Použijeme-li jiné než polární nebo sférické souřadnice, můžeme velikost elementu objemu buďto uhádnout, nebo můžeme postupovat takto: Vyjádříme kartézské souřadnice v závislosti na nových souřadnicích a dostaneme tak vztahy $x_1 = f_1(q_1, \dots, q_n), \dots, x_n = f_n(q_1, \dots, q_n)$ (například ve sférických souřadnicích bychom dostali $x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi, x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, x_3 = r \cos \vartheta$). Spočítáme parciální derivace $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, které zapíšeme do matice a spočítáme její determinant $\det \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ (ten bývá označován jako *Jacobiho determinant* či *Jakobián*). Element objemu pak bude mít tvar $dV = \det \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_1 dq_2 \dots dq_n$, pokud si uvědomíte, že geometrický význam absolutní hodnoty determinantu matice je objem rovnoběžnostěny dané vektory tvořící její řádky a rozmyslíte si význam parciálních derivací $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, zjistíte, že toto tvrzení je docela přirozené.

Užitečnost sférických souřadnic můžeme demonstrovat na výpočtu objemu koule (srovnejte se složitostí (75)). V těchto souřadnicích je koule daná rovnicemi $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$, $r \in \langle 0, R \rangle$, kde R je její poloměr, rozmyslete si, proč úhel φ probíhá hodnoty z $\langle 0, 2\pi \rangle$, ale úhel ϑ probíhá jen hodnoty z $\langle 0, \pi \rangle$. Objem koule je tedy dán integrálem

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 1 \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = 4\pi \int_0^R r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (79)$$

Jako cvičení vypočítejte objem elipsoidu daného rovnicí $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$. K výpočtu použijte takzvané *eliptické souřadnice* r, ϑ, φ (značení je stejné jako u souřadnic sférických díky jejich podobnosti) dané vztahy $x/a = r \sin \vartheta \cos \varphi, y/b = r \sin \vartheta \sin \varphi, z/c = r \cos \vartheta$ (správný výsledek je $V = \frac{4\pi}{3} abc$).

A na závěr: Pokud vám nebylo něco v tomto nebo v předcházejících dílech seriálu jasné, napište s řešením této série (nejlépe přímo do řešení seriálu), na co byste se chtěli zeptat. V poslední dílu seriálu se pokusíme vaše dotazy zodpovědět.

Úloha VI. S ... vícerozměrné integrály

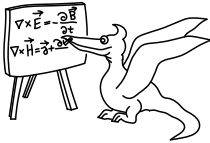
- a) Spočítejte průměrnou vzdálenost cestovatele náhodně se pohybujícího po severní polokouli od severního pólu k rovníku (předpokládejte, že cestovatel se pohybuje rovnoměrně po celém povrchu polokoule, za vzdálenost berete délku cesty po povrchu Země).
- b) Uvažujte nekonečně vysokou rotačně symetrickou věž, jejíž poloměr ve výšce h nad zemí je $r = a/(1 + (h/a))$, kde $a = 1$ m. K dispozici máme barvu, jejíž krycí schopnost je 10 m^2 na litr. Rozhodněte, zda potřebujeme více barvy na natření nebo naplnění této věže barvou.
- c) Trpaslíci se rozhodli, že pomohou Sněhurce při vaření. Sněhurka tedy rozkrájela jeden (dokonale kulatý) brambor na sedm stejně tlustých plátků a rozdala je trpaslíkům k oškrábání. Rozhodněte, který z trpaslíků bude mít nejvíce práce (trpaslíkem vynaložené úsilí je úměrné povrchu oškrábané šlupky).

řešení str. 97

Dovětek

Na závěr seriálu bychom rádi poznamenali, že text rozhodně nebyl určen k tomu, aby jej celý pochopil čtenář, který se s problematikou setkává poprvé. Naopak (možná ne zcela vydařeným) záměrem autora bylo, aby si z každého dílu něco odnesli jak začínající, tak pokročilejší, neboť věk a znalosti řešitelů se zákonitě liší. Proto je naprosto normální, jestli jste něco nepochopili (pro zajímavost uvedme, že se vzorcem (56) ze čtvrtého dílu seriálu se nesetká ani student MFF během prvních sedmi semestrů základního kurzu matematiky a většina z nich ani po zbytek studia ...).

Doufáme tedy, že jsme vás neodradili od dalšího bádání v oblasti matematiky, či snad dokonce přírodních věd vůbec, a že vaše touha po poznání nebude podlomena několika případnými neúspěchy.



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I. S ... komplexní čísla (4 body; průměr 2,24; řešilo 21 studentů)

- a) Spočtete reálnou a imaginární část $\sin(a + bi)$.
 b) Pomocí komplexní symbolické metody odvodte vztah pro rezonanční frekvenci paralelního RLC obvodu, tj. nalezněte frekvenci, pro kterou má při konstantním napětí celkový proud v obvodu minimální amplitudu.
 c) Sečtěte pomocí komplexních čísel následující řady. (Návod: řada $A + Bi$ je geometrická.)

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \cos(n\varphi), \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sin(n\varphi).$$

- a) Vyjádřeme si $\sin(a + bi)$ pomocí Eulerova vztahu. Pro $\sin x$ dostaneme (jak již bylo uvedeno v seriálu): $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$. Nyní dosazením $a + bi$ za x obdržíme

$$\begin{aligned} \sin(a + bi) &= \frac{1}{2i} \left(e^{i(a+bi)} - e^{-i(a+bi)} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{ia} e^{-b} - e^{-ia} e^b \right) = \\ &= -\frac{i}{2} \left(e^{-b} (\cos a + i \sin a) - e^b (\cos a - i \sin a) \right) = \\ &= -\frac{i}{2} (e^{-b} - e^b) \cos a + \frac{1}{2} (e^{-b} + e^b) \sin a. \end{aligned}$$

Tedy reálná a imaginární část čísla $\sin(a + bi)$ jsou rovny

$$\operatorname{Re}(\sin(a + bi)) = \frac{1}{2} (e^b + e^{-b}) \sin a, \quad \operatorname{Im}(\sin(a + bi)) = \frac{1}{2} (e^b - e^{-b}) \cos a.$$

- b) V případě paralelního zapojení je převrácená hodnota výsledné impedance rovna součtu převrácených hodnot impedancí jednotlivých členů obvodu. Aplikace tohoto poznatku dává

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \left(\frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \right) \hat{U}, \\ \hat{I} &= \left(\frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right) \hat{U}. \end{aligned}$$

Nás ovšem zajímá pouze velikost proudu, nikoliv jeho fáze. Potom

$$|\hat{I}| = |\hat{U}| \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

K rezonanci bude docházet, jestliže se druhý člen pod odmocninou bude rovnat nule. Tedy $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. V případě paralelní rezonance nastává minimum proudu. Velikost proudu není pro $\omega \rightarrow \infty$ nijak omezena.

- c) Dle návodu využijeme toho, že řada $A + Bi$ je geometrická, a tedy ji bude možno za jistých předpokladů sečíst. Tedy

$$A + Bi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta} \cos(n\varphi) + i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta} \sin(n\varphi),$$

$$A + Bi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta} e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\delta} e^{i\varphi})^n.$$

Jedná se proto o geometrickou řadu s kvocientem $e^{-\delta} e^{i\varphi}$. Aby byla řada konvergentní, musí být velikost kvocientu menší než jedna. Velikost $e^{i\varphi}$ je rovna jedné, a proto musí být velikost $e^{-\delta}$ menší než jedna. Čili $\delta > 0$. Známý vztah na součet nekonečné geometrické řady začínající jedničkou je $s = \frac{1}{1-q}$, kde q je kvocient. Přímým dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{1 - e^{-\delta} e^{i\varphi}} = \frac{1}{1 - e^{-\delta} \cos \varphi - i e^{-\delta} \sin \varphi} = \\ &= \frac{1 - e^{-\delta} \cos \varphi + i e^{-\delta} \sin \varphi}{(1 - e^{-\delta} \cos \varphi)^2 + (e^{-\delta} \sin \varphi)^2} = \frac{1 - e^{-\delta} \cos \varphi + i e^{-\delta} \sin \varphi}{1 + e^{-2\delta} - 2e^{-\delta} \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Potom tedy je součet řady A roven reálné části tohoto součtu a obdobně součet řady B imaginární části.

$$A = \operatorname{Re} s = \frac{1 - e^{-\delta} \cos \varphi}{1 + e^{-2\delta} - 2e^{-\delta} \cos \varphi},$$

$$B = \operatorname{Im} s = \frac{e^{-\delta} \sin \varphi}{1 + e^{-2\delta} - 2e^{-\delta} \cos \varphi}.$$

Úloha II. S ... limity a derivace (4 body; průměr 3,64; řešilo 39 studentů)

- a) Dokažte, že těleso, které má v čase t polohu $x = gt^2/2 + v_0t + x_0$, se pohybuje se zrychlením g .
- b) Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$.
- c) Nahradte co nejlépe funkci f v okolí bodu $x = 0$ lineární funkcí, víte-li, že $f(0) = 3$ a $f'(0) = -2$.
- d) Jaký je poměr výšky a průměru podstavy válce, který má při daném povrchu maximální objem?
- a) Jak bylo uvedeno v seriálu, je okamžitá rychlost první derivací dráhy podle času. Stejně tak okamžité zrychlení je první časovou derivací rychlosti. Tedy ve výsledku je okamžité zrychlení druhou časovou derivací dráhy dle času. Pro funkci ze zadání dostaneme $v = \dot{x} = gt + v_0$ a $a = \dot{v} = g$.
- b) Zadaná funkce je v bodě 1 zjevně nespojitá. Proto ji nahradíme v jistém okolí bodu 1 funkcí spojitou, která jí je na tomto okolí rovna. Potom bude limita původní funkce rovna funkční hodnotě nové funkce v bodě 1. Nejsnáze to provedeme tak, že čitatel i jmenovatel vydělíme výrazem $(x - 1)$. Tedy dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x + 3} = -\frac{1}{2}.$$

- c) V bodě nejlépe funkci nahrazuje její tečna. Víme, že směrnice tečny je rovna derivaci funkce v daném bodě. Dále známe jeden bod, kterým tečna musí procházet, její rovnice tedy je $y = -2x + 3$.
- d) Pro válec platí

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \quad V = \pi r^2 h,$$

kde r je poloměr podstavy a h výška válce. Jelikož je dán povrch, vyjádříme objem válce pomocí jeho povrchu.

$$S = 2\pi r(h + r) \Rightarrow h = \frac{S}{2\pi r} - r \Rightarrow V = \frac{1}{2}Sr - \pi r^3.$$

Pro určení extrému objemu vypočteme první derivaci objemu podle r . To, že první derivace nabývá nulové hodnoty, sice neznamená vždy, že funkce má v daném bodě extrém, ale není těžké přesvědčit se, že pro náš případ funkce extrému nabývá např. dosazením blízkých hodnot vypočteného r .

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow S = 6\pi r^2.$$

Dosazením do vztahu pro S dostaneme, že $h = 2r$.

Úloha III. S ... integrály (4 body; průměr 3,40; řešilo 30 studentů)

- a) Spočítejte integrály funkcí $y = x^2 e^x$, $y = \sin^3 x \cos^2 x$.
- b) Určete obsah obrazce, který je ohraničen funkcemi $y_1 = \sqrt{|x|} + \sqrt{1 - |x|}$, $y_2 = \sqrt{|x|} - \sqrt{1 - |x|}$. Tento obrazec nakreslete.
- a) Budeme integrovat dvakrát *per-partes*, abychom se zbavili funkce x^2 před e^x

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2, & f(x) &= 2x, \\ g(x) &= e^x, & G(x) &= e^x, \end{aligned}$$

$$I_1 = \int x^2 e^x dx = \int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx, \quad (80)$$

zintegrujeme podruhé *per-partes*

$$I_1 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

Relativně dost řešitelů nenapsalo konstantu na konec výrazu. Primitivní funkce k dané funkci není jen jedna, ale je jich hned několik – tedy lépe řečeno nekonečně mnoho. A dále spousta řešitelů psala konstanty tam, kde nemusí být. Takže pro pořádek – když provádíme substituci, k funkci g hledáme primitivní funkci, k integraci *per-partes* ale nepotřebujeme všechny primitivní funkce, ale stačí nám pouze jedna, proto zde konstantu nepíšeme. Ve výrazu (80) také nemusíme psát konstantu, protože ta je *schována* v druhém integrálu.

Druhá funkce je *lichá* v sinu, a proto je nejvýhodnější použít substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x dx$. Ještě ověříme, že substituce je definovaná na definičním oboru integrálu a všude má vlastní derivaci, což u cosinu je splněno. Pak už můžeme psát

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \sin^3 x \cos^2 x dx = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x (-\sin x) dx = \\ &= - \int (1 - y^2)y^2 dy = \int y^4 dy - \int y^2 dy = \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + C, \end{aligned}$$

a ještě musíme zpátky dosadit substituci

$$I_2 = \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

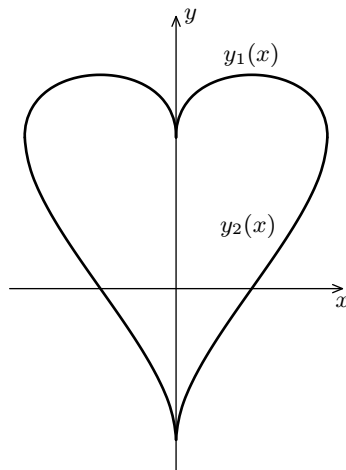
- b) Nejprve zjistíme definiční obor funkcí, $D_y = \langle -1; 1 \rangle$. Funkce jsou sudé, a tedy plochu nemusíme počítat jako dva integrály, celková plocha bude dvojnásobek plochy mezi funkcemi na intervalu $(0; 1)$.

Obsah plochy mezi dvěma funkcemi se spočítá jako určitý integrál $\int_a^b |y_1(x) - y_2(x)|$. Snadno pak ověříme, že y_1 je na celém svém definičním oboru větší než y_2 , a proto můžeme počítat

$$S = 2 \int_0^1 (y_1(x) - y_2(x)) dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{|x|} + \sqrt{1 - |x|} - \sqrt{|x|} - \sqrt{1 - |x|}) dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x} dx.$$

Zavedeme substituci $z = 1 - x$, $dz = -dx$, musíme ale také změnit meze určitého integrálu

$$S = -4 \int_1^0 z^{1/2} dz = 4 \int_0^1 z^{1/2} dz = 4 \left[\frac{2}{3} z^{3/2} \right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$



Obr. 26. Graf zadaných funkcí

Úloha IV. S ... diferenciální rovnice (5 bodů; průměr 3,90; řešilo 10 studentů)

- a) Organizátor FYKOSu vypil velmi rychle láhev tvrdého alkoholu. Alkohol se z žaludku vstřebává do krve rychlostí úměrnou jeho množství (v žaludku) s konstantou úměrnosti α a z krve je odbouráván játry podle stejného vztahu, tentokrát však s konstantou úměrnosti β . Sestavte diferenciální rovnici popisující tyto děje, určete závislost množství alkoholu v krvi na čase, určete čas, ve kterém je koncentrace maximální, a vypočítejte ji.
- b) Šnek plazící se rychlostí $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ se v čase t_0 postaví na začátek gumového lana dlouhého 1 m a začne se plazit. Ve stejném okamžiku se lano začne napínat rychlostí $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (je nekonečně pružné, takže nikdy nepraskne). Rozhodněte, zda šnek dosáhne konce lana v konečném čase a pokud ano, spočítejte, za jak dlouho se tak stane.
- c) Takzvaná redukovaná Gaussova rovnice má tvar

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0.$$

Předpokládejte řešení ve tvaru Taylorova polynomu, určete vztah pro jeho koeficienty a vyšetřete asymptotické chování řešení (tj. určete jakou funkcí by se dalo vystihnout jeho chování pro velká x). Určete pro jaké hodnoty koeficientů γ a α je konečný tento integrál

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} F(\alpha, \gamma, x) dx,$$

kde $F(\alpha, \gamma, x)$ značí řešení Gaussovy rovnice (takzvaná redukovaná hypergeometrická funkce). *Poznámka:* Pokud označíme $E = -1/\alpha^2$, dostaneme z poslední rovnice pro E zajímavou podmínku. A pokud se vám při pohledu na ni začíná vybavovat vzorec pro možné hodnoty energie elektronu v atomu vodíku, pak vězte, že podobnost s vaším výsledkem není vůbec náhodná.

- a) Množství alkoholu v žaludku (označme A) podle zadání klesá rychlostí úměrnou A , takže se vyvíjí podle diferenciální rovnice

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A.$$

Tuto rovnici vyřešíme metodou separace proměnných

$$\int \frac{dA}{A} = \int -\alpha dt,$$

$$\ln A = -\alpha t + C.$$

V čase $t = 0$ je množství alkoholu v žaludku rovno jeho počátečnímu (vypitému) množství A_0 , takže integrační konstanta má hodnotu $\ln A_0$. Množství alkoholu v žaludku tedy klesá podle vztahu

$$A = A_0 e^{-\alpha t}.$$

Koncentrace alkoholu v krvi (označme B) je zvyšována jeho vstřebáváním z trávicího ústrojí, ale zároveň je snižována odbouráváním játry. Vyvíjí se tedy podle rovnice

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{dA}{dt} - \beta B.$$

Dosazením za dA/dt dostaneme

$$\frac{dB}{dt} + \beta B = \alpha A_0 e^{-\alpha t}. \quad (81)$$

Tuto nehomogenní diferenciální rovnici vyřešíme metodou variace konstant. Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici. Na ni můžeme použít například metodu charakteristického polynomu. Budeme předpokládat, že řešení má tvar $B = Ce^{\lambda t}$. Tím dostaneme

$$\lambda B + \beta B = 0,$$

tedy $\lambda = -\beta$. Řešení homogenní rovnice nyní dosadíme do původní rovnice (81) a budeme předpokládat, že konstanta C , která v něm vystupuje není konstantní, ale je závislá na čase. Dostáváme

$$\frac{dC}{dt} e^{-\beta t} - \beta C e^{-\beta t} + \beta C e^{-\beta t} = \alpha A_0 e^{-\alpha t},$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha A_0 e^{(\beta-\alpha)t}.$$

Poslední rovnici vyřešíme integrací podle času

$$C(t) = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha} e^{(\beta-\alpha)t} + K,$$

kde K je integrační konstanta. Řešení (81) má tedy tvar

$$B = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} + K e^{-\beta t}.$$

Jedná se dokonce o obecné řešení, protože v něm vystupuje obecný násobek řešení homogenní rovnice. Hodnotu K určíme z požadavku, aby v čase $t = 0$ bylo $B = 0$ (na začátku je organizátor střízlivý). Závislost B na čase je tedy

$$B = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \right). \quad (82)$$

Z (81) vidíme, že B je maximální, když $\alpha A = \beta B$. Tato rovnost je splněna v čase

$$t = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dosazením do (82) dostáváme pro maximální koncentraci

$$B_{\max} = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha} \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}} \right).$$

- b) Polohu šneka popíšeme parametrem x udávajícím jeho relativní polohu vůči konci vlákna (na začátku je $x = 0$ a na konci $x = 1$). Za krátký časový okamžik dt se šnek posune vůči místu, na kterém zrovna stojí, o malou vzdálenost $ds = v_s dt$, kde v_s je rychlost šneka (protážení úseku ds je zanedbatelné). V čase t je délka lana $l = l_0 + v_l t$, kde v_l je rychlost konce lana. Změna relativní polohy šneka za čas dt je tedy

$$dx = \frac{ds}{l} = \frac{v_s dt}{l_0 + v_l t}.$$

Tím dostáváme rozseparovanou diferenciální rovnici, kterou vyřešíme integrací obou stran

$$\int dx = \int \frac{ds}{l} = \int \frac{v_s dt}{l_0 + v_l t},$$

$$x = \frac{v_s}{v_l} \ln \left(\frac{l_0}{v_l} + t \right) + C.$$

V čase $t = 0$ je $x = 0$, takže integrační konstanta C má hodnotu

$$C = -\frac{v_s}{v_l} \ln \frac{l_0}{v_l}.$$

Relativní poloha šneka tedy na čase závisí jako

$$x = \frac{v_s}{v_l} \ln \left(1 + \frac{v_l t}{l_0} \right).$$

Na konec lana se šnek dostane v momentě, kdy $x = 1$, což nastane za čas

$$t = \frac{l_0}{v_l} \left(e^{v_l/v_s} - 1 \right) = (e^{1000} - 1) \text{ s} \approx 10^{434} \text{ s}.$$

- c) Řešení rovnice $zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0$ budeme předpokládat ve tvaru $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Z podmínky nulovosti koeficientů u všech mocnin z dostaneme vztah pro koeficienty a_n

$$\begin{aligned} n(n+1)a_{n+1} + \gamma(n+1)a_{n+1} - (n+\alpha)a_n &= 0, \\ a_{n+1} &= \frac{(n+\alpha)a_n}{(n+1)(n+\gamma)}. \end{aligned} \quad (83)$$

Pro velká n budou α i γ oproti n zanedbatelné, takže (83) přejde na

$$a_{n+1} \approx \frac{a_n}{n}$$

a koeficienty a_n tedy klesají zhruba jako $a_n \approx c/n!$, kde c je nějaká konstanta. Stejný Taylorův rozvoj má funkce e^z a řešení redukované hypergeometrické rovnice se tedy asymptoticky chová jako exponenciála (pokud $c \neq 0$). Zadaný integrál tedy v obecném případě není konečný, protože i po vynásobení klesající exponenciálou $e^{-z/2}$ se řešení stále asymptoticky chová jako $e^{z/2}$. Při pohledu na (83) však zjistíme, že pokud bude α nekladné celé číslo, budou od určitého n ($n = -\alpha$) všechny koeficienty a_n nulové. V tomto případě se tedy řešení Gaussovy rovnice zredukuje na pouhý polynom. A vzhledem k tomu, že $\int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx$ je konečný pro všechna k a že součet konečně mnoha konečných čísel je konečný, bude konečný i zadaný integrál. Podmínka konečnosti tedy zní $\alpha = 0, -1, -2, -3, \dots$

Poznámka nakonec. Pokud ani argumenty uvedené ve čtvrtém díle seriálu náhodou nepodlomily vaši případnou důvěru v to, že každá funkce má Taylorův rozvoj, zamyslete se nad tím, proč jsme naznačeným postupem získali pouze jedno řešení, ačkoliv jsme řešili diferenciální rovnici druhého řádu.

Úloha V. S ... algebra (5 bodů; průměr 4,31; řešilo 13 studentů)

- a) Dokažte, že vektory $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 1)$ jsou lineárně závislé.
b) Vyřešte následující soustavu diferenciálních rovnic pomocí výpočtu exponenciály matice

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diskutujte tvar trajektorie řešení v rovině x, y v závislosti na znaménku parametrů a, b .

- c) Napište matice R_1, R_2, R_3 popisující prostorové rotace o úhel $\pi/2$ okolo os x, y a z a spočítejte komutátory $[R_1, R_2], [R_1, R_3]$ a $[R_2, R_3]$. Jako bonus se můžete pokusit své výsledky zapsat v jednotném tvaru pomocí takzvaného Levi-Civittova ε .
- a) Lineární závislost vektorů v_1, v_2, v_3 , ověříme tak, že nalezneme tři čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, z nichž je alespoň jedno nenulové, a platí $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ (symbol „0“ na pravé straně této rovnosti představuje nulový vektor a nikoliv číslo 0!). Nulový vektor má nulové všechny složky. Odtud dostáváme pro koeficienty α podmínky

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \quad 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Tuto soustavu rovnic můžeme vyřešit metodou Gaussovy eliminace. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Vidíme, že poslední řádek této matice se vynuloval, což znamená, že α_3 musí splňovat podmínku $0 \cdot \alpha_3 = 0$ a můžeme ho tedy volit libovolně (např. 2). Lineární závislost je tímto dokázána. Pro úplnost můžeme ještě dopočítat zbylé koeficienty α_1, α_2 . Pohledem na poslední matici v (84) snadno zjistíme, že $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = -1$ (zvolili jsme $\alpha_3 = 2$). Jinou metodou, jak dokázat lineární závislost zadaných vektorů, je koeficienty α uhádnout.

b) Pomocí matice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (85)$$

můžeme reprezentovat komplexní číslo $a + bi$. Skutečně, nechť $x = a + bi$ a $y = c + di$ jsou dvě komplexní čísla. Součet a součin těchto čísel je $x + y = (a + b) + (c + d)i$ a $xy = (ab - cd) + (ad + bc)i$. Pokud těmto číslům přiřadíme matice podle (85) (označme je X, Y), bude součet a součin těchto matic (ověřte)

$$X + Y = \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix}, \quad XY = YX = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}.$$

Diagonální a nediagonální prvky výsledných matic tedy odpovídají reálné a imaginární části součtu (součinu) čísel x, y , tak jako v (85). Dále uvažujme takto. Exponenciála matice je definována pomocí Taylorovy řady $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} X^n/n!$. V této definici vystupují pouze operace sčítání a násobení, které (jak jsme ověřili výše) jsou zachovány při zobrazení mezi komplexními čísly a maticemi typu (85) (obraz součtu je součet obrazů a obraz součinu je součin obrazů). Exponenciálu matice M typu (85) tedy můžeme spočítat tak, že jí přiřadíme komplexní číslo m , spočítáme jeho exponenciálu (s využitím vzorce $e^{(a+bi)} = e^a(\cos b + i \sin b)$ z prvního dílu seriálu) a výsledku přiřadíme zpět matici, kterou prohlásíme za exponenciálu M .

Stačí si již jen vzpomenout na čtvrtý díl seriálu, ve kterém bylo uvedeno, že řešení soustavy diferenciálních rovnic $\frac{d}{dt} \mathbf{v} = A\mathbf{v}$, kde \mathbf{v} je vektor, jehož složky jsou neznámé funkce, a A je matice soustavy, lze zapsat jako $\mathbf{v}(t) = e^{At} \mathbf{v}_0$, kde \mathbf{v}_0 je vektor počáteční podmínky (všimněte si, že tato formule vypadá formálně úplně stejně jako v jednodimenzionálním případě).

Řešením zadané soustavy je tedy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

V tomto výsledku poznáváme nám známou matici pro rotaci o úhel bt okolo počátku (vynásobenou faktorem e^{at}). Vektor (x, y) se tedy s časem vyvíjí tak, že se otáčí okolo počátku s úhlovou rychlostí $\omega = b$ a zároveň se mění jeho délka úměrně faktoru e^{at} . Trajektorie řešení tedy tvoří spirály. Smysl rotace je dán znaménkem parametru b a znaménko parametru a rozhoduje o tom, zda se spirála zavíjí nebo rozvíjí. Ve speciálním případě $a = 0$ pak trajektorie tvoří kružnice.

Pokuste se na základě těchto výsledků rozhodnout, za jakých podmínek bude poloha $(0,0)$ stabilní, tj. kdy se řešení s počáteční podmínkou danou vektorem $(0,0)$ vrátí zpět do blízkosti tohoto bodu v případě, že ho malinko postrčíme mimo počátek souřadné soustavy.

c) Matici R_3 popisující rotaci o úhel $\pi/2$ okolo osy z snadno nalezneme, známe-li matici popisující rotaci o obecný úhel φ okolo této osy (ta byla uvedena v pátém díle) pouhým

dosazením $\varphi = \pi/2$, dostáváme

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Zbylé dvě matice R_1, R_2 získáme buď tak, že si uvědomíme, jak si vymění role osy x, y, z při ostatních rotacích, a přehodíme příslušné řádky a sloupce v (86). Jinou možností je si přímo rozmyslet, jak se při těchto rotacích mění báze vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Například při rotaci okolo osy x se \mathbf{e}_1 nezmění, \mathbf{e}_2 přejde na \mathbf{e}_3 a \mathbf{e}_3 přejde na $-\mathbf{e}_2$ (pro R_2 můžeme postupovat analogicky). Dostáváme

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komutátory těchto matic jsou

$$[R_1, R_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [R_2, R_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [R_3, R_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha VI. S ... vícerozměrné integrály (5 bodů; průměr 3,73; řešilo 11 studentů)

- Spočítejte průměrnou vzdálenost cestovatele náhodně se pohybujícího po severní polokouli od severního pólu k rovníku (předpokládejte, že cestovatel se pohybuje rovnoměrně po celém povrchu polokoule, za vzdálenost berte délku cesty po povrchu Země).
- Uvažujte nekonečně vysokou rotačně symetrickou věž, jejíž poloměr ve výšce h nad zemí je $r = a/(1 + (h/a))$, kde $a = 1$ m. K dispozici máme barvu, jejíž krycí schopnost je 10 m^2 na litr. Rozhodněte, zda potřebujeme více barvy na natření nebo naplnění této věže barvou.
- Trpaslíci se rozhodli, že pomohou Sněhurce při vaření. Sněhurka tedy rozkrájela jeden (dokonale kulatý) brambor na sedm stejně tlustých plátků a rozdala je trpaslíkům k oškrábání. Rozhodněte, který z trpaslíků bude mít nejvíce práce (trpaslíkem vynaložené úsilí je úměrné povrchu oškrábané šlupky).
- Průměrnou vzdálenost cestovatele od pólu (rovníku) spočteme takto: Pravděpodobnost nalezení cestovatele v oblasti o ploše S je $\frac{S}{2\pi R^2}$, kde R je poloměr Země. Jeho průměrná vzdálenost od pólu pak bude rovna součtu vzdáleností všech elementárních plošek dS ležících na severní polokouli (míst, kde se může cestovatel nacházet) od pólu vážených pravděpodobností nalezení cestovatele na dané ploše. Tedy

$$\langle d_P \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R \vartheta \frac{1}{2\pi R^2} R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = R \int_0^{\pi/2} \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = R.$$

Analogicky nalezneme střední vzdálenost od rovníku jako

$$\langle d_R \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R(\pi/2 - \vartheta) \frac{1}{2\pi R^2} R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = R \frac{\pi}{2} - d_P = R \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

- b) Objem (povrch) věže spočítáme pomocí vzorce pro výpočet objemu (povrchu) rotačního tělesa. Dostáváme

$$V = \int_0^\infty \pi \left(\frac{a}{1+h/a} \right)^2 dh = \pi a^2 \left[\frac{-a}{1+h/a} \right]_0^\infty = \pi a^3$$

a pro povrch

$$S = \int_0^\infty 2\pi \frac{a}{1+h/a} \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dh} \right)^2} dh.$$

Výraz pod odmocninou v tomto integrálu má vždy hodnotu alespoň jedna a proto můžeme povrch zdola odhadnout tak, že jej nahradíme jedničkou (zmenšíme-li hodnotu integrované funkce, zmenší se i celý integrál), tedy

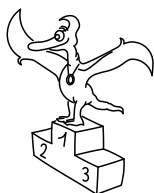
$$S > \int_0^\infty 2\pi \frac{a}{1+h/a} dh = [2\pi a^2 \ln(1+h/a)]_0^\infty = \infty.$$

Povrch věže je tedy narozdíl od objemu nekonečný, a proto ji můžeme barvou naplnit, ale nikoliv natřít.

- c) Spočítejme povrch slupky velmi tenkého „chipsu“ tloušťky dx ukrojeného ze sférického bramboru, jehož střed leží ve vzdálenosti d od středu bramboru. Obvod takového chipsu je $2\pi\sqrt{R^2-d^2}$, kde R je poloměr bramboru. Jeho slupka však svírá s osou rotační symetrie chipsu úhel $\cos\varphi = \sqrt{1-d^2/R^2}$. Povrch slupky chipsu je tedy

$$dS = \frac{2\pi\sqrt{R^2-d^2}}{\sqrt{1-d^2/R^2}} dx = 2\pi R dx.$$

Vidíme, že výsledek je nezávislý na vzdálenosti chipsu od středu bramboru, tedy povrch libovolného plátku bramboru (ten si můžeme představit jako složený z chipsů) závisí pouze na jeho tloušťce, a nikoliv na místě, ze kterého byl ukrojen. Všichni trpaslíci tedy budou mít stejně práce.



Výsledková listina XVI. ročníku

Kategorie 4. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	194
1. Jaroslav Trnka	G Na Pražáčce	164
2. Lukáš Chvátal	G Brno Bystrc	118
3. Jan Prachař	G F. M. Pelcla	81
4. Tibor Vansa	G Matiční	66
5. Miroslav Hejna	G F. M. Pelcla	63
6. Karel Tůma	G Matiční	54
7. Jiří Lipovský	G Bystřice n. Pernštejnem	32
8. Lukáš Vozdecký	G Vejrostova, Brno	29
9. Václav Cviček	G Petra Bezruče	26
10.–11. Marek Paulů	SOU Litovel	23
<i>Jan Perný</i>	G Nová Paka	23

Kategorie 3. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	194
1. Matouš Ringel	G Broumov	181
2. Jana Matějová	SPŠ Chrudim	134
3. Alexandr Kazda	G Nad Alejí, Praha	129
4. Jan Moláček	G J. K. Tyla	69
5. Lucie Strmisková	G Kyjov	53
6. Vojtěch Krejčířík	G Kroměříž	50
7. Pavel Hála	G Český Krumlov	49
8.–9. Petr Dostál	G Žamberk	46
<i>Martin Rybář</i>	GOA Blansko	46
10. Jan Ondruš	G F. M. Pelcla	38
11.–12. Michal Růžek	G Arcibiskupské	36
<i>Vladimír Sommer</i>	G Žďár nad Sázavou	36
13. Zuzana Rozlůvková	G Boženy Němcové	35
14. Hynek Hanke	G Budějovická, Praha	33
15. Jan Fazekáš	ISS Sokolov	28
16. Jakub Závodný	G Bratislava, Grösslingova	27
17. Jana Hrudíková	G Přerov	23

Kategorie 2. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	194
1. Anton Repko	G Sv. Mikuláša, Prešov	104
2. Petr Houštěk	G Pelhřimov	64
3. Peter Greškovič	G Svidník	57
4. Lenka Rychtrová	G Louny	43
5. Michal Humpula	G Uherský Brod	33
6. Martin Takáč	G Nové Zámky	30
7. Mária Sedivá	G Ludovíta Štúra	23
8. Hana Suchomelová	G Ludovíta Štúra	21

Kategorie 1. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	194
1. Tereza Klímošová	G Lanškroun	51
2. Jan Valášek	G Broumov	41
3. Jana Vrábelová	G Ludovíta Štúra	36
4.–5. Michal Šivák	G Ludovíta Štúra	30
<i>Vladimír Šivák</i>	G Ludovíta Štúra	30
6. Jan Bednář	COP Hronov	27
7. Ondrej Bogár	ZŠ Trenčín	21

Ve výsledkových listinách jsou pouze nejlepší řešitelé. Kompletní výsledkové listiny včetně bodování jednotlivých úloh jsou na našich webových stránkách.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.