

Zadání IV. série



Termín odeslání: 3. března 2003

Milí řešitelé!

Se zadáním čtvrté série FYKOSu si vás dovoluujeme pozvat na naši tradiční akci – Den s experimentální fyzikou, během které se můžete porozhlédnout po fyzikálních pracovištích UK MFF a ČVUT FJFI. Koná se 20. března 2003 v budově MFF v Tróji. Přihlášku nám pošlete do 3. března poštou spolu s řešením nebo lépe e-mailem na adresu dsef@fykos.mff.cuni.cz. Stačí uvést jméno a číslo svého OP, které musíme předem odevzdat obsluze jaderného reaktoru. S další sérií obdrží přihlášení popis cesty, podrobný program a omluvenku do školy.

Kromě návštěvy jaderného reaktoru Vrabc jsou v plánu exkurze na lineární urychlovač částic, pracoviště elektronové mikroskopie, katedru nízkých teplot a další. Uvidíte i místo, kde vzniká FYKOS!

A nakonec upozornění. Pokud jste v tomto ročníku ještě neposlali žádné řešení a chcete nadále dostávat vzorová řešení a nová zadání, ozvěte se nám (poštou nebo e-mailem). Ostatní vyřadíme z databáze řešitelů.

vaši organizátoři

Úloha IV.1 ... rámus ve vesmíru

- Hustota mezihvězdného prostředí je asi 10 až 10000 částic na metr krychlový. Tvoří ho převážně vodík. Vzdálenost mezi částicemi je tak velká, že se toto prostředí chová jako ideální plyn. Na vás je rozmyslet, zda se v takovém „vakuu“ může šířit zvuk a pokud ano, jaká může být jeho frekvence?
- Jaká je maximální frekvence zvuku, který se může šířit ve vzduchu za normálních podmínek?

Úloha IV.2 ... galaktický paradox

Ve sluneční soustavě se planety, které jsou ke Slunci blíže, pohybují rychleji než planety vzdálenější. V Galaxii se hvězdy blíže středu pohybují pomaleji než hvězdy vzdálenější. Zdůvodněte tento zdánlivý rozpor.

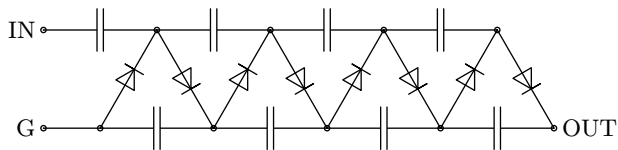
Úloha IV.3 ... plavající ledovec

Představme si ve vesmíru rotující planetu pokrytou po celém povrchu hlubokým oceánem. Na planetě v určitém místě přistane kosmický mnohoživelník, který volně plove na hladině a není vybaven pohonem použitelným ve vodě. Jakým směrem se začne z klidu pohybovat?

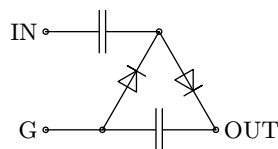
Úloha IV.4 ... ekvipotenciály

Zjistěte poměr velikostí nábojů dvou částic. Ekvipotenciály jejich elektrického pole vidíte na obr. 3 na str. 2. Zkuste také odhadnout přesnost vaší metody.

Úloha IV. P ... násobič napětí



Obr. 1. Násobič napětí

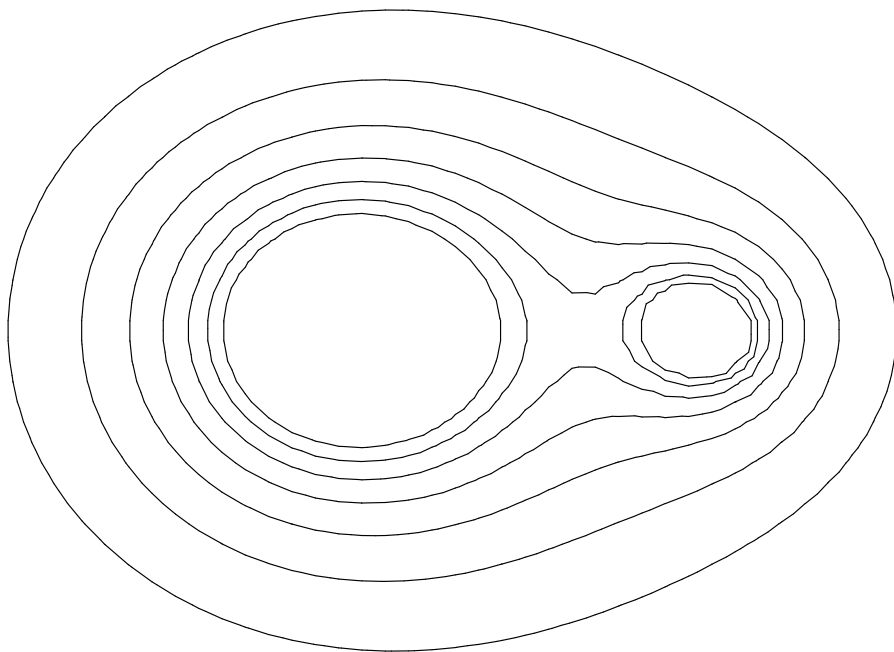


Obr. 2. Miniverze

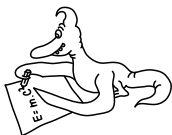
Na vstup (IN) obvodu na obr. 1 přivedeme vůči zemi (G) harmonické střídavé napětí o amplitudě U a frekvenci f . Jaké napětí naměříme na výstupu (OUT)? Diody považujte za ideální, velikosti kapacit si zvolte nebo řešte úlohu obecně. Nevíte-li si rady, zkuste nejprve jednodušší případ – zapojení pouze se dvěma diodami a kondenzátory (viz obr. 2).

Úloha IV. E ... od medvídky Pú

Výzkumný ústav medvídky Pú při AV ČR vypsal grant ve výši osmi (výjimečně více) bodů na změření závislosti viskozity medu na teplotě. Nezapomeňte uvést druh medu, který používáte.



Obr. 3. Naměřený tvar ekvipotenciál elektrického pole dvou částic



Řešení II. série

Úloha II.1 ... ztraceni v temnotě (3 body; průměr 1,52; řešilo 31 studentů)

Jeníček a Mařenka, zabráni do závažné diskuze nad zajímavým fyzikálním problémem, zbloudili v temném hvozdu. A tak, ve snaze nalézt východisko ze zoufalé situace, rozhodl se Jeníček vylézt na statný smrk v naději, že svým ostrížím zrakem zahlédne spásný záblesk světla. Jak nejdále od této dřeviny by se muselo nacházet nechvalně proslulé obydlí ještě nechvalněji proslulé okultistky a gurmánky Jagy Babové, aby Jeníček získal falešnou naději na záchranu v důsledku osvětlení 100 W žárovkou svítící v obývacím pokoji výše zmíněného domu?

Fotometrický přístup

Příklad budeme řešit třemi různými způsoby a výsledky porovnáme. Prvně řešme problém z hlediska fotometrických veličin. Žárovku považujeme za zdroj světla o svítivosti 200 cd. Minimální osvětlení, které je lidské oko ještě schopné registrovat, je přibližně $3 \cdot 10^{-5}$ lux. Tyto hodnoty si většina z vás někde našla a považovala je za správné. Mezi osvětlením I a svítivostí E platí vztah

$$I = \frac{E}{r^2} \quad \implies \quad r = \sqrt{\frac{E}{I}} = 2600 \text{ m.}$$

Jelikož žárovka nesvítí jenom ve viditelné části spektra, ale převážně v infračervené, budeme ve skutečnosti žárovku vidět jako slabší zdroj. Budeme ji tedy vidět blíže než jsme spočetli. Dále svítivost žárovky závisí na geometrii jejího natočení vůči pozorovateli. Když se na žárovku díváme z boku, zdá se nám méně jasná, než když se na ni díváme z vrchu. Geometrii natočení dále neuvažujeme.

Bolometrický přístup 1

Bolometrická korekce je rozdíl magnitud naměřených vizuálně (pouhým okem) a bolometrem (přístrojem zaznamenávajícím veškeré záření). U Slunce je přibližně $-0,07^{\text{mag}}$. Pro těleso s barevnou teplotou 2800 K, kterou většinou uvádějí výrobci žárovek, má bolometrická teplota hodnotu¹ $-3,8^{\text{mag}}$.

V závislosti na spektru tato hodnota může kolísat i o několik desetín magnitudy. žárovka, kterou budeme vidět jako hvězdu 6^{mag} , bude mít díky bolometrické korekci bolometrickou magnitudu $2,2^{\text{mag}}$.

Použijme nyní Pogsonovu rovnici, která nám popisuje vztah mezi magnitudou a zářivým výkonem hvězdy (m_1 a m_2 jsou magnitudy příslušející intenzitám záření I_1 a I_2)

$$m_1 - m_2 = \log \frac{I_2}{I_1}.$$

Nulový kalibrační bod je dán tak, že těleso zářící s intenzitou $1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ vnímáme jako hvězdu z jasností $-13,89^{\text{mag}}$. Nejslabší hvězdy viditelné pouhým okem mají zhruba 6^{mag} (za

¹⁾ Pro výpočet byl použit empirický fit podle článku *The Composite Observational – Theoretical HR Diagram*, The Journal of the Royal Astronomical Society of Canada, February/March 1998 Volume 92 Number 1 [669] page 36.

předpokladu čisté oblohy, nepřesvětlené okolním pouličním osvětlením). Ostrý zrak dovede vidět hvězdy až sedmé magnitudy. Fyziologické maximum je odhadováno na 9^{mag} , takový pozorovatel by ale musel být několik dní zavřen v úplné temnotě, aby si jeho oči zvykly na tmu. Dále budeme počítat s tím, že Jeník vidí hvězdy nanejvýš 6^{mag} .

$$2,2^{\text{mag}} - (-13,89^{\text{mag}}) = -2,5 \log \frac{P_0}{4\pi r_1^2 \mathfrak{S}_0} = -2,5 \log \frac{100\text{W}}{4\pi r_1^2 \cdot 1 \text{W}\cdot\text{m}^{-2}},$$

kde P_0 je výkon žárovky a \mathfrak{S}_0 je jednotková intenzita. Po dosazení dostaneme vzdálenost zhruba 4600 metrů.

Bolometrický přístup 2

Lze také počítat s tím, že intenzitě $2,52 \cdot 10^{-8} \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ odpovídá² bolometrických 0^{mag} . Magnitudě $2,2^{\text{mag}}$ odpovídá intenzita $I = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$. Po dosazení do vzorce

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}},$$

dostaneme vzdálenost zhruba 4900 metrů.

Závěr

Vidíme tedy, že třemi různými způsoby dostaneme dva různé výsledky. Domníváme se, že rozdíl je způsoben především hodnotami v prvním případě, které nejsou příliš přesné.

Kdybychom chtěli výsledek přesněji, nesmíme zapomínat na extinkci vzduchu. Ta činí zhruba 1^{mag} na 15 kilometrů. To je zhruba 15 %, tedy Jaga bydlí o půl kilometru blíže. Nezbývá nic jiného, než popřát Jeníčkovi a Mařence bloudění krajem do rozednění. Zachrání tím život stařence.

V případě, že Jaga přesedlala na halogenky, jejichž teplota bývá zhruba 4200 K, budou to mít dále. O kolik, to si pilný čtenář dopočte sám.

Pavol Habuda

bzuc0@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.2 ... malý velký problém (4 body; průměr 2,34; řešilo 35 studentů)

Hvězdný koráb se skládá ze dvou kabin o hmotnosti M , mezi nimiž se nalézá spojnice délky $2l$ (koráb tedy vypadá trochu jako činka). Jedna z kabin byla zasažena malým (hmotnost $m \ll M$), ale pekelně rychlým (rychlost u) meteoritem. Po této fatální kolizi se loď začala pohybovat a také rotovat (úhlovou rychlost rotace označme ω). Jak daleko od nezasažené kabiny onen meteorit proletěl? Můžete předpokládat, že rychlost zbytků po meteoritu vzhledem ke kabině je zanedbatelná v porovnání s rychlostí u .

Nejlepší bude, budeme-li srážku popisovat v rovině, ve které je rychlost meteoritu \mathbf{u} a spojnice obou kabin. Tato rovina je výhodná, protože se v ní bude odehrávat celý pohyb. Ze zadání plyne, že hvězdný koráb se před srážkou nepohybuje. Úhel mezi rychlostí \mathbf{u} a spojnici kabin označme α . Je tedy zřejmé, že minimální vzdálenost od druhé kabiny je $x = 2l \sin \alpha$, pro úhly $\alpha < \pi/2$, pro větší úhly bude nejmenší vzdálenost druhé kabiny $2l$ (při nárazu), protože meteor před dosažením nejmenší vzdálenosti narazí do první kabiny.

²⁾ Viz Vladimír Vanýsek, *Základy astronomie a astrofyziky*, Academia, Praha 1980, str. 185.

Nyní musíme spočítat, jak výsledná úhlová rychlost ω souvisí s úhlem nárazu α . To spočítáme ze zákona zachování momentu hybnosti. Moment hybnosti hvězdného korábu před srážkou je nulový, letícího kamene $m u \sin \alpha$. Po srážce je moment hybnosti kamene zanedbatelná a hvězdného korábu $J\omega$. Tedy podle zákona zachování momentu hybnosti platí

$$J\omega = m u \sin \alpha.$$

Musíme tedy spočítat moment setrvačnosti korábu J . Budeme-li kabiny považovat za malé dostaneme

$$J = 2Ml^2.$$

Dosazením do předchozích vztahů dostaneme

$$\sin \alpha = \frac{2Ml\omega}{mu}.$$

Nyní již spočítáme hledanou minimální vzdálenost.

$$x = \frac{4Ml^2\omega}{um}.$$

Na první pohled se zdá, že je úlohu možné řešit pomocí zákona zachování energie a zákona zachování hybnosti. Toto řešení není správné, protože se při této srážce nezachovává energie. To je vidět z toho, že pokud by se meteor odrazil pružně, byla by velikost jeho výsledné rychlosti srovnatelná s u , jelikož hmotnost lodi je mnohem větší než hmotnost meteoritu. Energie, se spotřebuje na rozbití meteoritu a lodi.

Karel Honzl

kaja@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.3 ... zase jde vo prachy ... (4 body; průměr 1,94; řešilo 17 studentů)

Mějme dvě prášková dielektrika o permitivitách ε_1 a ε_2 . Smísíme je tak, že poměr jejich hmotností bude $m_1 : m_2$, poměr jejich objemů bude $V_1 : V_2$ a poměr jejich látkových množství bude $n_1 : n_2$. Jaká bude výsledná permitivita této směsi?

Nejdříve se zamysleme nad tím, co vlastně chceme spočítat. Víme, že permitivita je úměrnost mezi *elektrickou indukcí* \mathbf{D} a *intenzitou elektrického pole* \mathbf{E} . Což vlastně v sobě skrývá to, že odezva látky na vnější pole (elektrická indukce) je úměrná intenzitě tohoto pole. Proto, když smícháme dvě látky které mají lineární odezvy, čekáme, že jejich odezva ve směsi bude také lineární. A tento koeficient úměry určuje výslednou permitivitu.

Na to, abychom s permitivitou mohli pracovat, si představíme deskový kondenzátor. V něm platí

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Nyní bychom chtěli spočítat kapacitu kondenzátoru, ve kterém je směs dvou látek s různou permitivitou. Tato úloha se bohužel nedá řešit jednoznačně, pokud neznáme přesné prostorové rozložení jednotlivých složek. Kdybychom chtěli počítat přímo pro rovnoměrně rozloženou látku, museli bychom definovat, co přesně tím rovnoměrným rozložením myslíme. Podrobněji to rozebereme níže. Nyní se pokusíme odhadnout hodnoty alespoň pro krajní případy.

1) *Pásky látek se střídají rovnoběžně z deskou kondenzátoru*

V tomto případě si můžeme představit, že máme n za sebou sériově zapojených kondenzátorů

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{S\varepsilon_i},$$

kde d_i je šířka i -tého pásu a ε_i je buď ε_a nebo ε_b , podle toho z jaké látky je daný pruh. Při daných objemech jednotlivých složek víme, že součet délek pruhů ze stejných materiálů je $\sum_a d_i = V_a/S$, $\sum_b d_i = V_b/S$. Po dosazení dostáváme

$$C = \left(\frac{V_a}{V\varepsilon_a} + \frac{V_b}{V\varepsilon_b} \right)^{-1} \frac{S}{d},$$

kde V je celkový objem. Takže pro celkovou permitivitu dostáváme

$$\varepsilon_{\parallel} = \left(\frac{f_a}{\varepsilon_a} + \frac{f_b}{\varepsilon_b} \right)^{-1},$$

kde f_a resp. f_b , jsme označili objemový podíl dané látky.

2) *Pásky látky se střídají příčně na desku kondenzátoru*

V tomto případě uvažujeme stejný postup jako předtím. S tím rozdílem, že teď se kondenzátory chovají jako paralelně zapojené. A také platí $\sum_{a,b} S_i = V_{a,b}/d$. Výsledek který potom dostaneme je

$$\varepsilon_{\perp} = f_a\varepsilon_a + f_b\varepsilon_b.$$

Vidíme, že výsledné permitivity nevyšly v obou případech stejně. Možná by se na první pohled zdálo, že problém je v rozložení látky, které jsme uvažovali. Skutečnost ukazuje, že řešení tohoto problému bohužel není zdaleka tak jednoduché, jak by se na první pohled zdálo.³ Zde se vám pokusíme složitost tohoto problému nastínit. Například pro kuličky látky „b“ rovnoměrně rozložené v objemu látky „a“ se dá dostat výsledek

$$\frac{\varepsilon_{\text{MGa}} - \varepsilon_b}{\varepsilon_{\text{MGa}} + 2\varepsilon_b} = f_a \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_b}{\varepsilon_a + 2\varepsilon_b},$$

kde ε_{MGa} je výsledná permitivita pojmenovaná po objevitelích tohoto vztahu Maxwellovi a Garnettovi a „a“ značí, která látka je chápána jako dominantní. Jak vidíme, toto není obecné řešení, protože když vyměníme látky, výsledek se změní. Pokud bychom navíc neměli kuličky, ale nějakou úplně jinou směs, dostali bychom nějaký jiný výsledek.

Ale až tak beznadějně to není. Výsledek vlastně závisí na tom, jak moc se změní elektrická intenzita. Pro intenzitu všude stejnou (což je 2. případ, protože se permitivita ve směru pole je pořád stejná a nevznikají tam rozhraní na kterých by se hromadil náboj) máme výsledek ε_{\perp} . A pro často se měnící intenzitu (to je 1. případ, protože vznikají rozhraní s různou permitivitou a tím i polarizací a na rozhraních se hromadí náboj) je výsledek ε_{\parallel} . V každém jiném případě se

³⁾ Podobný problém (ovšem s magneticky anizotropními složkami) řešil bývalý šéf FYKOSu Jirka Franta od před-diplomky přes diplomku ... a jestli ho to nepřestalo bavit, tak ho řeší dodnes.

čáry intenzity ohýbají a část se jich rozhraním vyhne. Takže skutečná výsledná permitivita je mezi ε_{\perp} a ε_{\parallel} , což je pro blízké permitivity přibližně stejné. Chytré knížky říkají, že v izotropním případě bude výsledek mezi ε_{MGA} a ε_{MGB} .

Na závěr bychom ještě zdůraznili fakt, že výsledná permitivita bude záviset na objemových podílech (jak nám vyšlo) a ne na podílu látkových množství, či hmotností daných složek. Plyne to mimo jiné i z toho, že pro energii elektrického pole platí $W = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}V$.

Jak vidno, ne všechny úlohy mají ve fyzice jednoduchá a přímočará řešení. Snad vás tento fakt příliš nerozladil a těší vás, že jste přičichli ještě k živému problému fyziky.

Miro Kladiva

miro@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.4 ... mokrá hrozba (4 body; průměr 1,83; řešilo 30 studentů)

Představte si koryto řeky široké 100 m. Jeho spád označme α . Otázkou je, jak závisí výška hladiny na průtoku vody touto řekou. Váš teoretický výsledek můžete zkusit porovnat s údaji ze srpnových povodní.

Předpokládejme, že hloubka vody v řece H je oproti šířce koryta d zanedbatelná, takže tření vody o břehy můžeme zanedbat, a že proudění vody je laminární (oprávněnost druhého předpokladu je diskutabilní, ale jakýkoliv složitější model by byl neřešitelný metodami středoškolské fyziky). Zkoumejme tenkou vrstvu vody o tloušťce dh v hloubce h pod hladinou. Tečné napětí v této vrstvě je

$$\tau = \frac{F}{S} = h \rho g \sin \alpha,$$

gradient rychlosti vody v v hloubce h je tedy

$$-\frac{dv}{dh} = \frac{h \rho g \sin \alpha}{\eta}.$$

Znaménko mínus vyjadřuje fakt, že rychlost vody s hloubkou klesá, η značí dynamickou viskozitu vody (ta je definována jako konstanta úměrnosti mezi tečným napětím a gradientem rychlosti proudění a vyjadřuje velikost tření v kapalině). Integrací dostáváme vztah mezi rychlostí proudění a hloubkou

$$v(h) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} (C - h^2),$$

hodnotu integrační konstanty C můžeme určit z požadavku $v(H) = 0$, tedy $C = H^2$ (kdyby tomu tak nebylo, tak by se rychlost proudění u dna chovala nespojitě a to je fyzikální nesmysl). Průtok P již snadno spočítáme jako

$$P = \int_0^H dv dh = \frac{d \rho g \sin \alpha}{3\eta} H^3.$$

Průtok vody v řece tedy roste s třetí mocninou výšky hladiny.

Pavel Augustinský

pavel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. P ... basic instinct (5 bodů; průměr 1,77; řešilo 13 studentů)

Sekáček na led – známý vražedný nástroj z tohoto filmu (vy, kdo jste tento výplod kinematografie ještě neshlédli, vězte, že toto náčiní vypadá zhruba jako šroubovák s ostrou špičkou) postavila chladnokrevná vražedkyně z dlouhé chvíle na hrot. Pomocí relací neurčitosti odhadněte maximální dobu, po kterou corpou delikti setrvává v této poloze.

Podle zadání je sekáček umístěn do labilní rovnovážné polohy. V takovém případě sebemenší výchylka z rovnovážné polohy způsobí to, že se sekáček začne pohybovat a dříve nebo později spadne. Jak dlouho to bude trvat v závislosti na velikosti počáteční výchylky za chvíli vyřešíme.

V této úloze řešíme kvantově-mechanické aspekty setrvání tělesa v labilní poloze. Mnozí z vás uváděli chvění podložky, tepelný pohyb molekul sekáčku a jiné podobné důvody porušení rovnováhy. To je sice pravda, nicméně z Heisenbergova principu neurčitosti plyne, že sekáček nutně spadne i bez přispění těchto vlivů.

Místo polohy a hybnosti potřebujeme v kvantové mechanice znát tzv. vlnovou funkci interpretovanou většinou pomocí kvadrátu její normy, který udává hustotu pravděpodobnosti nalezení systému v daném stavu. Lidsky řečeno – nelze užít dvě veličiny (polohu a hybnost) k popisu stavu sekáčku. Pracujeme s vlnovou funkcí, pomocí které lze počítat statistická rozdělení výsledků opakovaných měření na daném systému. Ano – stejná měření dopadají pokaždé různě a náhodně. Navíc každé měření změní kvantový stav, takže před opakováním musíme znovu nastavit původní podmínky. Celou věc navíc komplikuje to, že neexistuje způsob, jak současně změřit polohu i hybnost. Takže změříme-li jednu z těchto veličin, nemáme už žádnou šanci změřit tu zbývající, protože měřením jsme stav změnil. Kvalitativně je tento fakt obsažen ve vztahu

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1)$$

Míra exaktnosti vzorce (1) závisí na definici veličin Δx a Δp . V našem příkladě nám bude stačit pouze přibližná představa, že součin chyb (tj. nepřesností, neurčitostí, nejistot, ...) v určení polohy a hybnosti nesmůže být menší, než nějaká konstanta.

Vraťme se nyní k problému s padajícím sekáčkem. Úplné kvantově mechanické řešení by znamenalo vyřešení Shrödingerovy rovnice a následné nalezení takové vlnové funkce, která se bude co nejpomaleji „rozplývat“. Takové řešení je sice proveditelné, ale bohužel ne středoškolskými prostředky.

Abychom spočítali alespoň něco, zvolme následující „poloklasický“ postup: Počáteční výchylku vrcholu sekáčku z rovnovážné polohy označme x_0 , počáteční rychlost v_0 . Dobu pádu maximalizujeme, pokud bude současně co nejmenší x_0 a v_0 . Musíme však splnit relace neurčitosti a proto

$$x_0 m v_0 = \frac{\hbar}{2}. \quad (2)$$

Znovu připomeňme, že se jedná pouze o odhad. Zmíněná „poloklasičnost“ spočívá v tom, že navzdory relacím neurčitosti připouštíme, že současně známe rychlost i polohu sekáčku a počítáme úlohu klasicky. Pochopitelně stavy, mezi kterými budeme hledat kandidáta na nejpomalejší pád, splňují relace neurčitosti s rovností. Za počáteční hodnoty do klasického řešení dosazujeme přitom kvantové neurčitosti. Lze si to představit tak, že bude-li počáteční kvantový stav sekáčku hodně lokalizovaný v prostoru, bude naměřená hodnota x_0 hodně malá, ale zato hodnota p_0 měřená na stejném stavu bude díky velké neurčitosti naopak pravděpodobně velmi velká. Musíme tedy najít nejlepší „kompromis“.

Tím máme fyzikální úvahu za sebou a zbývající postup už je přímočarý – v závislosti na x_0 a v_0 klasicky spočítáme dobu pádu a pak se při splnění vztahu (2) budeme snažit nalézt takové počáteční podmínky, při kterých bude pád co nejdelší.

Vzdálenost těžiště sekáčku od špičky označme l . Těžiště se bude pohybovat po oblouku kružnice a polohu sekáčku budeme popisovat vzdáleností těžiště od rovnovážné polohy po tomto oblouku (označme ji x). Dále pro jednoduchost předpokládejme, že hmotnost sekáčku m je soustředěná do těžiště. Tím jsme úlohu převedli na problém velmi připomínající matematické kyvadlo. Stejně jako u matematického kyvadla se omezíme na malé úhly⁴ a provedeme linearizaci. Pohybová rovnice pak vypadá následovně.

$$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0, \quad \text{kde } \lambda^2 = \frac{g}{l}.$$

Ty, kdo neví, že \ddot{x} je druhá derivace x podle času, tedy zrychlení, odkazujeme na seriál. Rovnice pro kyvadlo se od této liší jen kladným znaménkem a podobně kosmeticky vypadá i odlišnost řešení⁵

$$x = x_0 \cosh \lambda t + \frac{v_0}{\lambda} \sinh \lambda t$$

(v rovnici pro harmonické kmity nejsou hyperbolické, ale goniometrické funkce). Hyperbolické funkce lze vyjádřit pomocí lineární kombinace klesající a rostoucí exponenciály. Vzhledem k uvažovaným počátečním podmínkám je zřejmé, že klesající část můžeme zanedbat a řešení přepsat do tvaru

$$x = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right) e^{\lambda t}. \quad (3)$$

Nyní je vidět, že maximalizace doby pádu znamená minimalizaci výrazu v závorce. Dosaíme tedy za v_0 ze vztahu (2). Označíme-li $a^2 = \hbar/2m\lambda$, upraví se výraz v závorce do tvaru

$$a \left(\frac{x_0}{a} + \frac{a}{x_0} \right)$$

Tento výraz nabývá minima $2a$ pro $x_0 = a$. Kdo si to nedokáže zdůvodnit pomocí derivací, může ověřit

$$\frac{x_0}{a} + \frac{a}{x_0} = 2 + \left(\sqrt{\frac{x_0}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x_0}} \right)^2,$$

z čehož je uvedený fakt viditelný na první pohled. Po dosazení dostává vztah pro pohyb pohyb „nejpomaleji padajícího“ sekáčku tvar $x = a e^{\lambda t}$. Dobu pádu můžeme odhadnout jako čas, ve kterém bude výchylka srovnatelná s l . Po krátkém výpočtu a dosazení hodnot $l = 20$ cm, $m = 200$ g dostáváme

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{l}{a} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{2ml\sqrt{gl}}{\hbar} = 5 \text{ s.}$$

Diskuse výsledku je snadná. Asi nejpodstatnějším závěrem je to, že přestože jsme uvažovali velmi idealizovaný model a neuvažovali početné vlivy vedoucí k pádu sekáčku (např. různé

⁴⁾ S přesností na dvě platné cifry budou naše vztahy platit v rozmezí pár desítek stupňů a když už se sekáček dostane tak daleko, spadne již téměř okamžitě.

⁵⁾ Pilný čtenář může derivováním a dosazením do pohybové rovnice ověřit správnost tohoto vztahu.

fluktuační proudění vzduchu apod.), lze z krátkého času usuzovat, že kvantové vlivy hrají i v tomto případě svou roli.

Ještě zajímavější než samotná hodnota T je tvar výsledného vzorce. Před logaritmem stojí čas řádově odpovídající délce periody kmitů kyvadla délky l a v logaritmu je podíl veličiny rozměru momentu hybnosti sestavené z hodnot m , l , g (tedy pro „rozumné“ velikosti a hmotnosti veličina řádu jednotek J·s) a ve jmenovateli redukovaná Planckova konstanta $\hbar \doteq 1 \cdot 10^{-34}$ J·s. Díky vlastnostem logaritmu nebude jeho hodnota extrémní (malá či velká) a hlavně bude velmi málo reagovat na změny parametrů (větší a těžší sekáčky apod.) To je také důvod, proč většinu řešitelů vychátele podobné hodnoty přesto, že jsme konkrétní čísla nezadali.

Jediným způsobem, jak udržet po delší dobu těleso v labilní poloze, je tedy menší podvod – je třeba systém sestavit tak, aby se nalézal v sice úzké, ale přesto stabilní⁶ poloze (což lze zajistit třeba ztupením hrotu sekáčku).

Honza Houšťek

honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. E ... difúze (8 bodů; průměr 5,07; řešilo 14 studentů)

Jak je známo, kapka roztoku v čisté vodě začne difundovat a zvolna se rozplývat. Svůj experimentální um můžete prokázat tím, že naměříte závislost koncentrace roztoku v určitém bodě nádoby na čas. Můžete též proměřit, jak se změní charakter této závislosti, změníte-li tvar použité nádoby tak, že se roztok může šířit jen v jednom nebo dvou směrech (tj. nádoba bude buďto úzká a podlouhlá, nebo v ní bude jen tenká vrstva vody).

Úvod a teorie

Difúze je samovolné pronikání molekul z oblasti vyšší koncentrace do oblasti nižší koncentrace vlivem tepelného pohybu částic a jejich srážek. Pro měření je vhodná difúze kapaliny do jiné kapaliny, neboť plyny difundují příliš rychle, pevné látky pomalu a zrníčko rozpouštějící se v kapalině by se mohlo pomaleji rozpouštět než difundovat pryč, což by měření znehodnotilo.

Má-li difundující látka nevelkou koncentraci, platí pro tok částic jednotkovou plochou za jednotku času 1. Fickův zákon, který říká, že tok \mathbf{j} je úměrný gradientu koncentrace

$$\mathbf{j} = -k\nabla c,$$

kde ∇c je vektor o složkách $(\frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial y}, \frac{\partial c}{\partial z})$. Z tohoto vztahu a zachování počtu částic se dá odvodit 2. Fickův zákon, který říká, že časová změna koncentrace v daném místě je úměrná změně koncentračního gradientu

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) = D\nabla^2 c = D\Delta c, \quad (4)$$

kde kladné konstantě D se říká difúzní součinitel.

Není zcela přímočaré odvodit, že řešení této rovnice, pro počáteční podmínku, kdy jsou všechny difundující částice uprostřed souřadné soustavy, je

$$c = N \left(\frac{1}{4\pi Dt} \right)^{\frac{m}{2}} e^{-r^2/4Dt}. \quad (5)$$

⁶⁾ Při velké snaze lze stabilní polohu nalézt dokonce i u tzv. Kolumbova vejce aniž by bylo nutné ho nakřápnout.

Konstanta N úzce souvisí s počtem difundujících částic, m je počet směrů, ve kterých se částice mohou šířit, tedy nejčastěji $m = 1, 2, 3$, r^2 je kvadrát vzdálenosti od středu, tedy např. pro $m = 3$ je $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Že vztah (5) je skutečně řešením (4) pro nekonečně velkou nádobu můžeme snadno ověřit dosazením.

Zkoumejme, jak se chová (5) pro zafixovanou polohu. Nakreslíme-li si graf funkce $y(t) = t^{-m/2} e^{-k/t}$, vidíme, že nejprve z nuly roste až do času $t = 2k/m$, pak klesá k nule. K nule klesá tím pomaleji, čím menší je m .

My ale nebudeme měřit pro nádobu nekonečného rozměru. Tudíž ve velkém čase se koncentrace nebude blížit nule, ale určité rovnovážné hodnotě c_0 . Budeme-li měřit blízko kraje nádoby, bude se koncentrace k c_0 blížit monotónně.

Následující odstavec čtenář, který se nezajímá dále o matematickou stránku problému, může přeskočit. Explicitně bychom rovnicí (4) pro konečnou oblast řešili s okrajovými podmínkami, kdy je normálová složka gradientu koncentrace na krajích nulová, neboť difundující roztok nemůže z nádoby vytékat. Funkci bychom periodicky rozšířili na reálnou osu, pro obdélník na rovinu, pro kvádr na celý prostor, čímž automaticky splníme okrajovou podmínku (rozmyslete). Řešení by pak bylo konvolucí funkce (5) (Greenovy funkce úlohy) a periodicky rozšířené počáteční podmínky (která není ničím jiným než Diracovou delta distribucí). Řešení vede v jednom rozměru na řadu typu (až na konstanty, které pilný čtenář sám dopočte)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx e^{-n^2 t}.$$

Tuto řadu ale stejně neumíme sečíst a pro více rozměrů je jen složitější. Nicméně vidíme, že pro nekonečný čas se řešení blíží konstantě tak, jak očekáváme. Jinak se funkce chová podobně jako pro řešení v nekonečné oblasti.

Postup měření

Musíme vyřešit, jak měřit koncentraci látky, aniž bychom dělali cokoli, co způsobí proudění, které by zničilo difuzi. Ve vašich řešeních se objevily tři způsoby.

- a) Měření koncentrace opticky. Méně přesná byla metoda, kdy jste porovnávali barvu roztoku v daném místě s předem připravenou škálou barev známé koncentrace. Nesmí se přitom zapomenout na to, aby tloušťka roztoku, přes kterou se dívám, byla stejná jako tloušťka pomocných kyvet, se kterými porovnávám.

Poměrně hodně přesnou metodu požil Anton Repko, který měřil pohlcování červeného světla v síranu měďnatém. Na kyvetu z difundujícím roztokem svítil laserovou diodou a měřil proud procházející fototranzistorem na druhé straně kyvetu, který je úměrný prošlému světelnému toku Φ , jež na koncentraci závisí exponenciálně $\Phi = \Phi_0 e^{-kc}$.

Tato metoda se ovšem nedá použít pro trojrozměrnou difuzi, neboť při ní nenalezneme směr, ve kterém je koncentrace podél paprsku konstantní.

- b) Měření pomocí pH roztoku. Několik z vás napadlo měřit difuzi nějaké kyseliny či zásady ve vodě. Koncentrace se pak dá zjistit pomocí pH v daném bodě, které měříme lakmusovými papírkami nebo pH-metrem. Pro dostatečně silnou kyselinu je její koncentrace přibližně $c = 10^{-pH}$ mol·l⁻¹. Pro silnou zásadu je $c = 10^{-(14-pH)}$ mol·l⁻¹. Jelikož je ale těžké měřit pH dostatečně přesně, nedávala tato metoda pěkné výsledky.
- c) Měření koncentrace pomocí vodivosti resp. odporu disociovaného roztoku. Do daného místa roztoku ponoříme dvě elektrody. Měly by být dostatečně chemicky stabilní. Měříme odpor mezi nimi. I tato metoda má své potíže. Například změnu měřeného odporu při změně

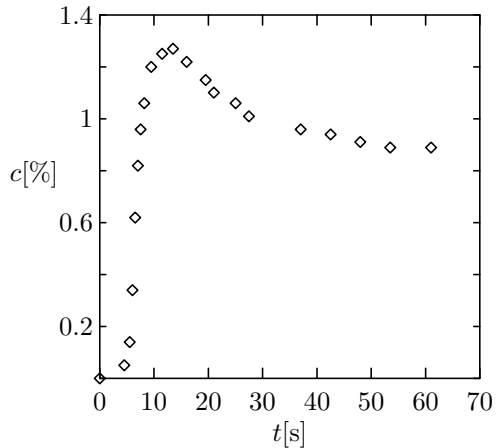
stupnice ohmmetru nebo nelinearitu závislosti vodivosti na koncentraci. Nejšikovnější bylo si naměřit kalibrační křivku závislosti odporu na koncentraci. Špatně se bude takto měřit dvourozměrná difúze, neb elektrody se celé neponoří do tenké vrstvičky, ale to nám tolik nevadí.

Měření

Uvedeme jedno z ukázkových měření pomocí postupu c), které provedl Jarda Trnka. Nechal difundovat barevnou koupelovou sůl. Bohužel nenapsal, jak přesně vypadaly jeho elektrody, ani jak daleko od místa, kam na počátku umístil sůl, elektrody byly. Koncentraci z naměřeného odporu určoval pomocí naměřené kalibrační křivky. Graf na obr. 4 udává výsledky pro difuzi v míse o objemu asi 3 litry, kam opatrně nejlépe pipetou doprostřed dáme 3 ml nasyceného roztoku soli.

Závěr

Shrňme tedy ještě jednou důležité výsledky. Závislost koncentrace difundujícího roztoku na čase v určitém bodě vypadá buď jako na grafu na obr. 4 nebo monotónně roste, měříme-li dostatečně blízko ke krajům nádoby. Každopádně po dlouhém čase se koncentrace ustálí. Změníme-li tvar nádoby tak, že se roztok může šířit pouze ve dvou či jenom směru, difúze probíhá pomaleji, tedy koncentrace v daném místě pomaleji roste popř. pomaleji klesá. Přesná měření těchto závislostí jsou velmi obtížná.



Obr. 4. Závislost koncentrace na čase

Lenka Zdeborová

lenka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. S ... limity a derivace (4 body; průměr 3,64; řešilo 39 studentů)

- Dokažte, že těleso, které má v čase t polohu $x = gt^2/2 + v_0t + x_0$ se pohybuje se zrychlením g .
 - Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$.
 - Nahradte co nejlépe funkci f v okolí bodu $x = 0$ lineární funkcí, víte-li $f(0) = 3$ a $f'(0) = -2$.
 - Jaký je poměr výšky a průměru podstavy válce, který má při daném povrchu maximální objem?
- Jak bylo uvedeno v seriálu, je okamžitá rychlost první derivací dráhy podle času. Stejně tak okamžité zrychlení je první časovou derivací rychlosti. Tedy ve výsledku je okamžité zrychlení druhou časovou derivací dráhy dle času. Pro funkci ze zadání dostaneme $v = \dot{x} = gt + v_0$ a $a = \dot{v} = g$.
 - Zadaná funkce je v bodě 1 zjevně nespojitá. Proto ji nahradíme v jistém okolí bodu 1 funkcí spojitou, která je jí rovna. Potom bude limita původní funkce rovna funkční hodnotě nové funkce v bodě 1. Nejsnáze to provedeme tak, že čitatel i jmenovatel vydělíme výrazem $(x - 1)$. Tedy dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x + 3} = -\frac{1}{2}.$$

- c) V bodě nejlépe funkci nahrazuje její tečna. Víme, že směrnice tečny je rovna derivaci funkce v daném bodě. Dále známe jeden bod, kterým tečna musí procházet, její rovnice tedy je $y = -2x + 3$.
- d) Pro válec platí

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \quad V = \pi r^2 h,$$

kde r je poloměr podstavy a h výška válce. Jelikož je dán povrch, vyjádříme objem válce pomocí jeho povrchu.

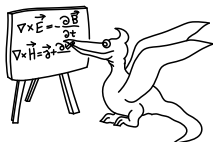
$$S = 2\pi r(h + r) \Rightarrow h = \frac{S}{2\pi r} - r \Rightarrow V = \frac{1}{2} S r - \pi r^3.$$

Pro určení extrému objemu vypočteme první derivaci objemu podle r . To že první derivace nabývá nulové hodnoty sice neznamena vždy, že funkce má v daném bodě extrém, ale není těžké přesvědčit se, že pro náš případ funkce extrému nabývá (např. dosazením blízkých hodnot vypočteného r).

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow S = 6\pi r^2.$$

Dosazením do vztahu pro S dostaneme, že $h = 2r$.

Míra Šulc
mira@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 4: Diferenciální rovnice

V druhém díle seriálu jsme si ukázali aplikaci derivací na výpočet extrému funkce. To je však jen malá část z možných využití diferenciálního počtu ve fyzice. Teprve v rukou fyzika znalého teorie diferenciálních rovnic se derivace stávají silným nástrojem pro řešení řady úloh z mnoha oborů fyziky. V mnoha případech totiž nedokážeme popsat zkoumaný děj přímo, ale pouze v řeči derivací. Tímto postupem pak dospějeme k rovnici pro neznámou závislost a její derivace – takzvanou *diferenciální rovnici*. Demonstrovat ho můžeme například na následující úloze.

Do nádoby plné roztoku soli přitéká konstantní rychlostí čistá voda a stejnou rychlostí roztok odtéká (koncentrace je v celé nádobě stejná). Jak bude záviset koncentrace C soli v nádobě na čase? Pokud by měl roztok vytékající z nádoby stále stejnou koncentraci, bylo by řešení jednoduché. Koncentrace by lineárně klesala až do vyprázdnění (protože za jednotku času by z nádoby vyteklo vždy stejné množství soli). To však v našem případě neplatí. Koncentrace vytékajícího roztoku se však dá považovat za konstantní v průběhu velmi (infinitezimalně) krátkého časového intervalu dt . Změnu koncentrace za tento časový interval tedy můžeme počítat jako

$$dC = -kC dt, \tag{6}$$

kde dC je změna koncentrace a k je kladná konstanta charakterizující rychlost výtoku roztoku. Mínus na pravé straně značí to, že koncentrace s časem klesá (tj. její změna je záporná). Tento vztah představuje již částečně rozřešenou diferenciální rovnici (v základním tvaru by měla tvar $\dot{C} = -kC$). Řešit ji můžeme vydělením rovnice koncentrací C a integrací obou stran. Dostáváme

$$\ln C = -kt + A, \quad (7)$$

$$C = Be^{-kt}, \quad (8)$$

kde A je integrační konstanta a $B = e^A$. Hodnotu B můžeme určit ze znalosti počáteční koncentrace dosazením $t = 0$ tedy $B = C_0$. Vidíme, že koncentrace soli klesá exponenciálně.

Zavedme si nyní několik užitečných pojmů. *Řádem* diferenciální rovnice budeme rozumět řád nejvyšší derivace vystupující v této rovnici (například rovnice $y''' + 3y' = 0$ je třetího řádu). Řekneme, že diferenciální rovnice je *lineární* pokud platí, že součet jejích libovolných dvou řešení a násobek libovolného řešení konstantou je opět řešením. Dále dělíme diferenciální rovnice na *nehomogenní* a *homogenní* (s pravou stranou a bez pravé strany). V nehomogenní rovnici vystupuje kromě neznámé funkce ještě další (zadaná) funkce, která nehraje roli koeficientu (tedy není vynásobená neznámou funkcí ani žádnou její derivací). Tuto funkci pak většinou píšeme na pravou stranu znaménka = (odtud plyne alternativní název). Příkladem takové rovnice je $y'' + 4x^2y = \sin x$. V homogenní rovnici pak žádná takováto funkce nevystupuje. Pokud se v diferenciální rovnici vyskytují pouze obyčejné derivace, říkáme jí *obyčejná diferenciální rovnice*. V opačném případě pak mluvíme o *diferenciálních rovnicích parciálních*.

Pro získání představy o problematice uvedme stručný přehled základních typů diferenciálních rovnic a metod jejich řešení.

a) Diferenciální rovnice prvního řádu

Velmi často se setkáváme (viz motivační příklad) s rovnicemi typu

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)g(y(x)). \quad (9)$$

Takovou rovnici můžeme řešit takzvanou metodou *separace proměnných*. Princip této metody spočívá v tom, že s derivací můžeme většinou pracovat jako se zlomkem (díváme se na ni jako na podíl dvou malých přírůstků). Rovnici tedy můžeme vynásobit výrazem dx a vydělit funkcí $g(y)$. Dostáváme

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx, \quad (10)$$

což je rovnice se separovanými proměnnými (to znamená, že výrazy obsahující y jsou všechny na jedné straně rovnítko a výrazy obsahující x jsou všechny na druhé straně). Tuto rovnici můžeme řešit integrací obou stran. Pokud bychom chtěli integrovat rovnici v původním tvaru, dostali bychom na pravé straně integrál podle x z funkce závisující na $y(x)$. To znamená že bychom pro provedení integrace museli funkci y , tedy hledané řešení, znát a tím bychom se dostali do „začarovaného“ kruhu.

Jako příklad uvedme výpočet závislosti koncentrace C chemikálie, která se účastní reakce řídicí se takzvanou kinetikou 2. řádu. Pro C pak platí

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2. \quad (11)$$

Rovnice se separovanými proměnými má pak tvar

$$\frac{dC}{C^2} = -k dt. \quad (12)$$

Integrací obou stran dostáváme

$$-\frac{1}{C} = -kt + A, \quad (13)$$

kde A je integrační konstanta. Její hodnotu můžeme určit dosazením $t = 0$. Tím dostáváme $A = -1/C_0$ (C_0 značí počáteční koncentraci). Po úpravě dostáváme

$$C = \frac{C_0}{1 + C_0kt}. \quad (14)$$

b) Metoda variace konstant a rovnice typu

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x). \quad (15)$$

Příslušnou homogenní rovnici (případ $b = 0$) bychom dokázali vyřešit pomocí separace proměných. Všimněte si, že pokud bychom našli jedno (takzvané *partikulární*) řešení rovnice (15), dokázali bychom již snadno sestavit obecné řešení přičtením obecného řešení příslušné homogenní rovnice. Toto tvrzení plyne z faktu, že rozdíl libovolných dvou řešení (15) řeší příslušnou homogenní rovnici (jako cvičení doporučujeme důkaz provést). *Obecným řešením* diferenciální rovnice myslíme funkci obsahující několik konstant (v našem případě jednu), jejichž vhodnou volbou dostaneme jakékoliv řešení. Tedy například vztah (14) představuje obecné řešení (pokud na C_0 pohlédneme jako na obecnou konstantu) rovnice (11). Dodejme ještě, že v obecném řešení diferenciální rovnice n -tého řádu musí vystupovat n konstant, neboť při jejím řešení musíme n krát integrovat.

A jak hledat partikulární řešení? Vyjdeme z řešení homogenní rovnice. To má vždy tvar

$$y = Ce^{-A(x)}, \quad (16)$$

kde C je libovolná konstanta a $A(x)$ je primitivní funkcí $k a(x)$ (vzpomeňte si třeba na motivační příklad). K tomuto tvaru snadno dospějeme řešením příslušné homogenní rovnice metodou separace proměných. Jádro metody variace konstant spočívá v tom, že budeme předpokládat partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = C(x)e^{-A(x)}. \quad (17)$$

Předpokládáme tedy, že místo konstanty C vystupující v řešení homogenní rovnice, bude v partikulárním řešení vystupovat funkce. Problém nalezení partikulárního řešení se tedy redukuje na nalezení funkce $C(x)$. Dosazením y_p do rovnice (15) dostáváme po úpravě (označme $e^{-A(x)} = u(x)$)

$$C'u + Cu' + aCu = b, \quad (18)$$

$$C'u + C(u' + au) = b, \quad (19)$$

$$C' = \frac{b}{u}. \quad (20)$$

Pro funkci $C(x)$ tedy dostáváme jednoduchou diferenciální rovnici řešitelnou přímou integrací. Pro přehlednost zopakujeme postup ještě jednou. Nejprve jsme vyřešili příslušnou homogenní rovnici metodou separace proměných. Dostali jsme řešení ve tvaru (16). Dále jsme předpokládali, že partikulární řešení bude mít tvar (17) a neznámou funkci $C(x)$ jsme určili dosazením y_p do původní (nehomogenní) rovnice. Tím jsme problém převedli na vyřešení rovnice (20). Obecné řešení pak je

$$y_o = C(x)u(x) + Ku(x), \quad (21)$$

kde K je libovolná konstanta. Postup si můžete procvičit na řešení rovnice $y' + 2xy = e^{-x^2} \cos x$ (obecné řešení je $y = (\sin x + K)e^{-x^2}$).

Poznámka: Metoda variace konstant se dá aplikovat i na složitější nehomogenní diferenciální rovnice, například na rovnice vyšších řádů v případě, že je příslušná homogenní rovnice lineární. V tomto případě ale hledáme sadu n funkcí, kde n je řád rovnice, které „vzniknou“ z n integračních konstant. Máme pro ně však jen jednu rovnici, kterou získáme dosazením variovaného řešení rovnice homogenní do nehomogenní. Tato volnost se v praxi odstraňuje dodefinováním dalších podmínek na tyto funkce tak, aby byla výsledná soustava rovnic co nejjednodušší. Můžete si sami vymyslet nehomogenní rovnici vyššího řádu a vyřešit ji. Pomocí variace konstant můžeme řešit také soustavy rovnic.

c) Homogenní lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnice typu (n v závorce v exponentu značí n -tou derivaci)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0. \quad (22)$$

Takovéto rovnice se dají řešit velmi jednoduše. Stačí předpokládat řešení ve tvaru $y(x) = e^{kx}$ (místo obratu „předpokládat řešení ve tvaru“ se můžete setkat i se slovem „ansatz“, jehož význam je obdobný) a dosazením zjistit přípustné hodnoty parametru k (takto převedeme diferenciální rovnici na takzvanou *charakteristickou rovnici*, což je rovnice polynomiální). Pokud bude mít charakteristická rovnice n různých kořenů k_1, \dots, k_n , můžeme obecné řešení psát ve tvaru

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + \dots + c_n e^{k_nx}, \quad (23)$$

kde c_1, \dots, c_n jsou konstanty. Postup můžeme demonstrovat na následující rovnici

$$y'' + 2y' - 3y = 0. \quad (24)$$

Po dosazení $y = e^{kx}$ a vydělení celé rovnice exponenciálou dostáváme

$$k^2 + 2k - 3 = 0. \quad (25)$$

Kořeny této (kvadratické) rovnice jsou $k_1 = 1$ a $k_2 = -3$. Obecné řešení (24) je tedy

$$y = c_1e^x + c_2e^{-3x}. \quad (26)$$

V případě, kdy má charakteristická rovnice alespoň jeden vícenásobný kořen, nemůže být (23) obecným řešením, protože by obsahovalo méně než n konstant. Předpoklad o tvaru řešení v tomto případě tedy není zcela správný. Dá se ukázat, že je-li k_j m -násobným kořenem charakteristického polynomu, pak rovnici (22) řeší kromě funkce e^{k_jx} také funkce $x^l e^{k_jx}$, $l = 1, \dots, m - 1$. Stačí dosadit do (22) exponenciálu vynásobenou mocninnou funkcí, použít

Leibnitzovu formuli pro i -tou derivací součinu dvou funkcí $(fg)^{(i)} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} f^{(j)} g^{(i-j)}$, (která vypadá úplně stejně jako binomická věta), uvědomit si, že m -násobný kořen polynomu je zároveň kořenem i jeho 1. až $m - 1$ -té derivace a důkaz je hotov. Obecně tedy při řešení (22) postupujeme tak, že nejprve předpokládáme řešení ve tvaru exponenciály, a pokud má charakteristická rovnice vícenásobné kořeny, doplníme do obecného řešení ještě příslušné exponenciály vynásobené obecným polynomem stupně $m - 1$ kde m je násobnost kořenu. Jako cvičení vyřešte rovnici $y''' - 3y'' + 4y = 0$ (řešením je $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + c_3e^{-x}$).

Poznámka: Stupeň charakteristického polynomu se rovná řádu diferenciální rovnice, takže při řešení rovnic řádu vyššího než druhého nastává problém s nalezením jeho kořenů (s trochou námahy je možné nalézt kořeny polynomu třetího a čtvrtého řádu, u polynomů vyššího řádu je to však již obecně nemožné a musíme přistoupit buď k hádání nebo k numerickým metodám). Naštěstí se však ve fyzice setkáváme s diferenciálními rovnicemi třetího a vyššího řádu jen velmi zřídka a u fyzikálně nemotivovaných diferenciálních rovnic (jako je ta poslední) se kořeny dají většinou uhodnout nebo nalézt metodou pokus omyl (protože tyto rovnice bývají sestaveny tak, aby se daly snadno řešit). Může se nám také stát, že kořeny charakteristického polynomu budou komplexní. To však ničemu nevaří. Stačí když si vzpomenete na vzorec pro exponenciálu komplexního čísla z prvního dílu seriálu a uvidíte, že v tomto případě dostaneme oscilující řešení (vyřešte si rovnici pro harmonický oscilátor $y'' + \omega^2 y = 0$).

Metoda charakteristického polynomu využívá toho, že jsme „uhodli“ tvar řešení, a dosazením jsme pouze určili hodnoty parametrů k_i . Takovýto postup se dá aplikovat i na jiné typy diferenciálních rovnic. Otázkou však je, v jakém tvaru předpokládat řešení v jiných případech než u rovnic typu (22). V obecném případě můžeme hledat řešení ve tvaru Taylorova rozvoje

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k. \quad (27)$$

To vlastně není téměř vůbec žádný předpoklad, protože ve tvaru Taylorova rozvoje můžeme napsat celou řadu funkcí. Bohužel ne úplně každá funkce se rovná svému Taylorovu rozvoji. Jako příklad uveďme $y = |x|$ rozvinutou v okolí bodu $x = 1$, nebo zajímavější funkci $y = e^{-1/x^2}$ dodefinovanou v bodě $x = 0$ nulou (jako cvičení si nakreslete její graf), jejíž Taylorův rozvoj okolo bodu 0 je identicky nulová funkce – a ta se evidentně nerovná rozvíjené funkci v žádném bodě kromě nuly. Naštěstí však pro většinu normálních funkcí platí to, že se svému Taylorovu rozvoji rovnají alespoň na omezeném intervalu

Dosazením řady (27) do vyšetřované rovnice pak dostaneme (typicky rekurentní) vztah pro koeficienty a_k (po dosazení získáme opět mocninnou řadu, ale s jinými koeficienty. Ty se pak musí rovnat koeficientům Taylorova rozvoje pravé strany rovnice, což bývá často nula). Například řešením rovnice $y' - y = 0$ touto metodou dostáváme pro koeficienty a_k (z nulovosti koeficientu u x^j) podmínku $ja_{j+1} - a_j = 0$. Výsledkem je tedy řada pro funkci e^x , která evidentně řeší původní rovnici. Ne vždy však lze řadu pro řešení sečíst zpět na elementární funkci (elementární funkci rozumíme například exponenciálu, logaritmus, sinus atd.) tak, jako tomu bylo v posledním příkladě. To je ale svým způsobem výhoda, protože to znamená, že je tato metoda použitelná i v případech, kdy studovaná diferenciální rovnice nemá řešení mezi elementárními funkcemi (a takových případů je ve fyzice velmi mnoho). Navíc můžeme některé vlastnosti řešení (například chování pro velké argumenty) nahlédnout bez znalosti součtu příslušné řady pouze z vlastností jejich koeficientů.

Soustavy diferenciálních rovnic

Soustavou diferenciálních rovnic rozumíme soustavu rovnic svazující několik neznámých funkcí a jejich derivace. Uvedme malý příklad

$$\begin{aligned} f' &= 2f - g, \\ g' &= 4f - g. \end{aligned} \quad (28)$$

Nejjednodušší metoda řešení je převedení této soustavy na jednu diferenciální rovnici vyššího řádu (řád výsledné rovnice je roven počtu původních rovnic). V uvedeném příkladě to provedeme dosazením za $g = 2f - f'$ z první rovnice do druhé (dostáváme $g' = f' + 2f$), zderivováním první rovnice (dostáváme $f'' = 2f' - g'$) a dosazením za g' z druhé do první (zderivované) rovnice. tím dostáváme

$$f'' - f' + 2f = 0. \quad (29)$$

Tuto rovnici již snadno vyřešíme metodou charakteristického polynomu. Funkci g pak dopočítáme například z první (nezderivované) rovnice dosazením f . Tato metoda se tedy podobá metodě řešení soustavy (algebraických) lineárních rovnic. Na rovnici (28) můžeme pohlížet také tak, že dvojice funkcí f, g tvoří složky vektoru. Rovnici bychom pak mohli napsat v řeči matic (pokud nevíte jak se pracuje s maticemi, tak buď nahlédněte do příslušné literatury nebo odložte čtení následujícího odstavce a vraťte se k němu až po přečtení příštího dílu seriálu, který bude pojednávat o lineární algebře)

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Označíme-li vektor $\mathbf{u} = (f, g)$ a příslušnou matici A , můžeme zapsat rovnici (28) v kompaktním tvaru

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u}. \quad (30)$$

Pokud by bylo A obyčejné číslo a \mathbf{u} obyčejná funkce, byla by řešením evidentně funkce $u = Ce^{Ax}$. Vězte, že řešení vypadá v případě že \mathbf{u} je vektor a A je matice, úplně stejně. Otázkou je ovšem, co je to exponenciála matice. Ta je definována pomocí Taylorovy řady (narozdíl od exponenciály dokážeme mocninu matice spočítat přímo) jako

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (31)$$

Kde za nultou mocninu matice bereme takzvanou jednotkovou matici I (platí $I\mathbf{u} = \mathbf{u}$ pro každý vektor \mathbf{u}). Výpočet exponenciály matice z definice je však ve většině případů téměř neproveditelný (jak už to většinou bývá) a existují jednodušší způsoby. Jedním z nich je například převedení matice na takzvaný diagonální tvar, jehož exponenciála se dá spočítat velmi jednoduše.

Jinou možností je využití následující věty (všimněte si, že věta platí i pro případ, kdy A je číslo a ne matice, protože na něj můžeme nahlížet jako na matici 1×1 . V tomto případě je platnost tvrzení jednoduchým důsledkem reziduové věty zmiňované v prvním díle seriálu.)

$$e^A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z}{zI - A}, \quad (32)$$

kde Γ značí uzavřenou křivku v komplexní rovině obíhající spektrum matice A , ale to už poněkud přesahuje rámec našeho seriálu.

Úloha IV . S ... *diferenciální rovnice*

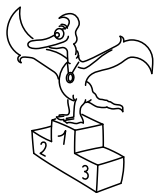
- a) Organizátor FYKOSu vypil velmi rychle láhev tvrdého alkoholu. Alkohol se z žaludku vstřebává do krve rychlostí úměrnou jeho množství (v žaludku) s konstantou úměrnosti α a z krve je odbouráván játry podle stejného vztahu, tentokrát však s konstantou úměrnosti β . Sestavte diferenciální rovnici popisující tyto děje, určete závislost množství alkoholu v krvi na čase, určete čas, ve kterém je koncentrace maximální a vypočítejte ji.
- b) Šnek plazící se rychlostí $1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ se v čase t_0 postaví na začátek gumového lana dlouhého 1 m a začne se plazit. Ve stejném okamžiku se lano začne napínat rychlostí $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (je nekonečně pružné takže nikdy nepraskne). Rozhodněte, zda šnek dosáhne konce lana v konečném čase a pokud ano, spočítejte, za jak dlouho se tak stane.
- c) Takzvaná redukovaná Gaussova rovnice má tvar

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$$

Předpokládejte řešení ve tvaru Taylorova polynomu, určete vztah pro jeho koeficienty a vyšetřete asymptotické chování řešení (tj. určete jakou funkcí by se dalo vystihnout jeho chování pro velká x). Určete pro jaké hodnoty koeficientů γ a α je konečný tento integrál

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} F(\alpha, \gamma, x) dx,$$

kde $F(\alpha, \gamma, x)$ značí řešení Gaussovy rovnice (takzvaná redukovaná hypergeometrická funkce). Poznámka: Pokud označíme $E = -1/\alpha^2$, dostaneme z poslední rovnice pro E zajímavou podmínku. A pokud se vám při pohledu na ni začíná vybavovat vzorec pro možné hodnoty energie elektronu v atomu vodíku, pak vezte, že podobnost s vaším výsledkem není vůbec náhodná.



Pořadí řešitelů po II. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | II | % | Σ |
|-------------------------------------|----------------------|---|---|---|---|---|----|---|-----------|------------|-----------|
| <i>Student Pilný</i> | MFF UK | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 4 | 32 | <i>100</i> | 65 |
| 1. Jaroslav Trnka | G Na Pražačce | 2 | 4 | 5 | 5 | 3 | 10 | 4 | 33 | <i>100</i> | 65 |
| 2. Miroslav Hejna | G F. M. Pelcla | 2 | 4 | 4 | 5 | 5 | 7 | 4 | 31 | <i>97</i> | 63 |
| 3. Jan Prachař | G F. M. Pelcla | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | – | 4 | 15 | <i>85</i> | 44 |
| 4. Lukáš Chvátal | | 1 | 4 | 2 | 4 | – | – | 4 | 15 | <i>81</i> | 42 |
| 5. Karel Tůma | G Matiční | 2 | 2 | 1 | 4 | – | 2 | 4 | 15 | <i>65</i> | 39 |
| 6. Tibor Vansa | G Matiční | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 4 | 16 | <i>57</i> | 35 |
| 7. Jiří Lipovský | G Bystřice n. Pern. | – | – | – | 4 | – | 7 | 4 | 15 | <i>86</i> | 32 |
| 8. Václav Cviček | G Petra Bezruče | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>96</i> | 24 |
| 9. Lukáš Vozdecký | G Vejrostopa, Brno | 1 | 3 | 1 | 1 | – | – | 3 | 9 | <i>53</i> | 21 |
| 10.–11. Michal Bareš | G Mikulášské náměstí | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>80</i> | 20 |
| <i>Bryan Chen</i> | | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>61</i> | 20 |
| 12. Jan Perný | G Nová Paka | 1 | 1 | 1 | 0 | – | – | 3 | 6 | <i>39</i> | 17 |
| 13. Matěj Týč | G Zastávka | 2 | – | – | – | – | – | 4 | 6 | <i>63</i> | 15 |
| 14. Tomáš Kozelek | G Kadaň | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>62</i> | 13 |
| 15. Miloslav Havelka | G Zastávka | 2 | 3 | – | – | – | – | 4 | 9 | <i>73</i> | 11 |
| 16.–17. Lukáš Snášel | COP Hronov | – | – | – | – | – | – | 4 | 4 | <i>100</i> | 8 |
| <i>Marek Vyšinka</i> | G Matyáše Lercha | – | – | – | – | – | – | 4 | 4 | <i>100</i> | 8 |
| 18. Barbora Galaczková | | 2 | – | – | – | – | – | 4 | 6 | <i>64</i> | 7 |
| 19.–24. Vendula Exnerová | G Nad Štolou, Praha | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>24</i> | 4 |
| <i>Josef Hanuš</i> | G Děčín | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>19</i> | 4 |
| <i>Kateřina Jelénková</i> | G Staré Město | – | – | – | – | – | – | 4 | 4 | <i>100</i> | 4 |
| <i>Radim Kusák</i> | G Frýdek-Místek | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>100</i> | 4 |
| <i>Marek Pavlů</i> | SOU Litovel | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>100</i> | 4 |
| <i>Martin Szablatura</i> | | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>100</i> | 4 |
| 25. Ľuboš Rabčan | G Trstená | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>15</i> | 2 |
| 26.–28. Veronika Chromčíková | G Přerov | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>25</i> | 1 |
| <i>Petr Navrátil</i> | G Přerov | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>25</i> | 1 |
| <i>Zuzana Svobodová</i> | G Zlaté Moravce | – | – | – | – | – | – | – | 0 | <i>25</i> | 1 |

Kategorie třetích ročníků

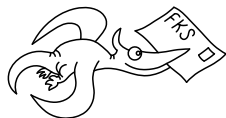
| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | II | % | Σ |
|-----------------------------------|----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|----|
| <i>Student Pilný</i> | MFF UK | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 4 | 32 | 100 | 65 |
| 1. <i>Matouš Ringel</i> | G Broumov | 3 | 4 | 4 | 4 | 2 | 8 | 4 | 29 | 88 | 57 |
| 2. <i>Jana Matějová</i> | SPŠ Chrudim | 2 | 3 | - | 5 | - | 5 | 3 | 18 | 79 | 44 |
| 3.-4. <i>Alexandr Kazda</i> | G Nad Alejí, Praha | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | - | 4 | 15 | 70 | 40 |
| <i>Jan Moláček</i> | G J. K. Tyla | 2 | 2 | - | 4 | 5 | - | 4 | 17 | 89 | 40 |
| 5. <i>Jakub Závodný</i> | G Bratislava, Grösslingova | 4 | - | - | - | - | - | 3 | 7 | 72 | 26 |
| 6. <i>Vojtěch Krejčířík</i> | | 1 | - | 1 | - | - | - | 4 | 6 | 63 | 25 |
| 7. <i>Petr Dostál</i> | G Žamberk | 1 | 3 | 1 | 2 | - | 3 | - | 10 | 48 | 23 |
| 8.-9. <i>Hynek Hanke</i> | G Budějovická, Praha | - | 1 | 1 | 1 | 1 | - | 4 | 8 | 46 | 21 |
| <i>Jan Olšina</i> | G Kroměříž | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 72 | 21 |
| 10.-11. <i>Pavel Hála</i> | G Český Krumlov | - | 1 | - | 2 | - | - | 3 | 6 | 46 | 19 |
| <i>Martin Rybář</i> | GOA Blansko | 1 | 3 | - | - | - | 5 | 3 | 12 | 53 | 19 |
| 12. <i>Jan Ondruš</i> | G F. M. Pelcla | - | 1 | 0 | 1 | - | - | - | 2 | 46 | 17 |
| 13. <i>Lucie Strmisková</i> | G Kyjov | 2 | 3 | - | - | - | - | 3 | 8 | 65 | 15 |
| 14. <i>Jana Hrudíková</i> | G Přerov | - | 4 | - | - | - | - | 4 | 8 | 70 | 14 |
| 15.-16. <i>Petr Bílý</i> | G Slaný | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 76 | 13 |
| <i>Zuzana Rozlívková</i> | G Bozeny Němcové | 1 | - | - | 1 | - | - | 4 | 6 | 68 | 13 |
| 17.-18. <i>Michal Růžek</i> | G Arcibiskupské | - | 3 | - | - | - | - | - | 3 | 65 | 11 |
| <i>Radoslav Sopoliga</i> | G Svidník | 1 | 0 | - | 0 | - | - | - | 1 | 34 | 11 |
| 19.-21. <i>Pavol Lakatoš</i> | G Velké Kapušany | 1 | 3 | 0 | 0 | - | - | - | 4 | 25 | 9 |
| <i>Jan Švarcbach</i> | G Louny | - | 0 | - | 0 | - | - | - | 0 | 22 | 9 |
| <i>Michal Witiska</i> | G Jihlava | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 31 | 9 |
| 22. <i>Zdeněk Váňa</i> | COP Hronov | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 67 | 8 |
| 23. <i>Tomáš Gavenčiak</i> | G Bílovec | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 38 | 6 |
| 24.-25. <i>Jan Křivonožka</i> | G Bílovec | - | - | - | 0 | - | - | 3 | 3 | 25 | 5 |
| <i>Jan Skalický</i> | G J. Heyrovského, Praha | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 38 | 5 |
| 26.-30. <i>Jan Křetínský</i> | G Matyáše Lercha | - | - | - | - | - | - | 4 | 4 | 100 | 4 |
| <i>Markéta Novotná</i> | G Hranice | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 100 | 4 |
| <i>Martina Smolová</i> | G Písek | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 44 | 4 |
| <i>Vladimír Sommer</i> | G Žďár nad Sázavou | - | - | - | - | - | - | 4 | 4 | 100 | 4 |
| <i>Petra Suková</i> | G Svitavy | - | - | - | - | - | - | 4 | 4 | 100 | 4 |
| 31.-33. <i>Pavína Karníková</i> | G Dobruška | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 25 | 3 |
| <i>Libor Kukačka</i> | GOA Vrchlabí | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 75 | 3 |
| <i>Eva Lovišková</i> | G V. Makovského | - | 1 | - | - | - | - | - | 1 | 25 | 3 |
| 34.-35. <i>Kateřina Balcarová</i> | G Dobruška | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 15 | 2 |
| <i>Michal Havel</i> | COP Hronov | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 25 | 2 |
| 36.-37. <i>Jana Pechková</i> | G Trutnov | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 11 | 1 |
| <i>Stanislav Plánička</i> | G Klatovy | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 25 | 1 |

Kategorie druhých ročníků

| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | II | % | Σ |
|----------------------------|------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|----|
| <i>Student Pilný</i> | MFF UK | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 4 | 32 | 100 | 65 |
| 1. Anton Repko | G Sv. Mikuláša, Prešov | 2 | 4 | - | - | 1 | 8 | 4 | 19 | 89 | 39 |
| 2. Petr Houštěk | G Pelhřimov | 1 | 4 | - | 4 | - | - | 4 | 13 | 77 | 34 |
| 3. Peter Greškovič | G Svidník | 1 | 1 | - | 0 | 2 | 3 | 2 | 9 | 39 | 22 |
| 4. Michal Humpala | G Uherský Brod | 1 | 1 | - | - | - | - | 4 | 6 | 59 | 16 |
| 5. Lenka Rychtřová | G Louny | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 2 | - | 7 | 25 | 14 |
| 6. Martin Takáč | G Nové Zámky | - | - | - | 0 | 0 | - | 4 | 4 | 39 | 13 |
| 7. Pavel Kocourek | SPŠ Panská | 2 | 4 | - | - | - | - | 4 | 10 | 91 | 10 |
| 8. Hana Suchomelová | G Ludovíta Štúra | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 36 | 9 |
| 9.-10. Rostislav Kváš | G Jihlava | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 100 | 8 |
| Mária Šedivá | G Ludovíta Štúra | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 40 | 8 |
| 11. Markéta Vilimovská | G Českolipská, Praha | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 44 | 7 |
| 12.-13. Markéta Kavalířová | G Českolipská, Praha | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 38 | 6 |
| Zdeněk Kučka | G Žďár nad Sázavou | - | 0 | - | 0 | 1 | - | 0 | 1 | 12 | 6 |
| 14. Jiří Kubr | COP Hronov | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 63 | 5 |
| 15.-16. Jiří Kulda | COP Hronov | 3 | - | - | - | - | - | - | 3 | 57 | 4 |
| Aleš Razým | | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 24 | 4 |
| 17. Karel Hofman | COP Hronov | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 38 | 3 |
| 18.-19. Kateřina Divišová | GOA Sedlčany | 0 | 0 | - | 0 | - | - | - | 0 | 8 | 2 |
| Monika Martinisková | | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 15 | 2 |
| 20.-21. Štěpánka Mohylová | G Čs. exilu | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 13 | 1 |
| Vladimíra Sečkářová | G J. G. Tajovského | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 8 | 1 |

Kategorie prvních ročníků

| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | II | % | Σ |
|-----------------------|------------------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|------------|-----------|
| <i>Student Pilný</i> | MFF UK | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 4 | 32 | <i>100</i> | 65 |
| 1. Tereza Klímošová | G Lanškroun | - | - | 1 | - | - | - | 4 | 5 | <i>90</i> | 18 |
| 2. Jan Valášek | G Broumov | - | 1 | - | - | - | 6 | - | 7 | <i>70</i> | 14 |
| 3. Jana Vrábelová | ZŠ Trenčín | - | 3 | - | 0 | - | 2 | - | 5 | <i>31</i> | 11 |
| 4.-5. Michal Sivák | G Ludovíta Štúra | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>40</i> | 8 |
| Vladimír Sivák | G Ludovíta Štúra | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>40</i> | 8 |
| 6. Petra Malá | | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>41</i> | 7 |
| 7.-8. Jan Bednář | COP Hronov | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>75</i> | 6 |
| Ondřej Bogár | ZŠ Trenčín | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>35</i> | 6 |
| 9. Tomáš Bednárik | G Vsetín | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>50</i> | 4 |
| 10. Daniela Svobodová | | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>25</i> | 3 |
| 11. Marek Jansa | COP Hronov | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>13</i> | 2 |
| 12.-13. Radek Škuta | G Čs. exilu | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>13</i> | 1 |
| Zuzana Urbancová | G Vlašim | - | - | - | - | - | - | - | 0 | <i>25</i> | 1 |
| 14. David Chval | GOA Vimperk | - | - | - | 0 | - | - | - | 0 | <i>0</i> | 0 |

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.